Université Fédérale
Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse - Jean Jaurès

en cotutelle internationale avec l'Université de Genève

Présentée et soutenue par :

le 12 février 2018

Titre :

Enquête comparatiste sur la mise en oeuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques
Etude de cas en Suisse et en France

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED CLESCO : Sciences de l'éducation

Unité de recherche :

UMR Education FormationTravail Savoir (EFTS)

Directeur/trice(s) de Thèse :

Chantal Amade-Escot, Professeure, Sciences de l'éducation, Université Toulouse - Jean Jaurès
Francia Leutenegger, Professeure, Sciences de l'éducation, Université de Genève (Suisse)
Jean-Luc Dorier, Professeur ordinaire, Didactique des mathématiques, Université de Genève (Suisse)

Jury :

Magali Hersant, Professeure, Sciences de l'éducation, Université de Nantes, Rapporteure
Laurent Theis, Professeur titulaire, Université de Sherbrooke (Canada), Rapporteur

Lucie Mottier-Lopez, Professeure, Sciences de l'éducation, Université de Genève (Suisse)
Serge Quilio, Maître de Conférences, Université de Nice Sophia Antipolis
Eric Roditi, Professeur, Sciences de l'éducation, Université de Paris Descartes

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Section des Sciences de l'Éducation

Sous la co-direction de
Chantal Amade-Escot, Francia Leutenegger, Jean-Luc Dorier

TITRE DE LA THESE

Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques
Études de cas en Suisse et en France

THESE EN CO-TUTELLE INTERNATIONALE

Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
de l'Université de Genève
et
Université de Toulouse Jean Jaurès

pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Education

par

Michèle COUDERETTE
De

Toulouse (France)

Thèse No 700

Présentée à TOULOUSE

Février 2018

13-328-745

Remerciements

Je remercie Chantal Amade-Escot et Francia Leutenegger, mes directrices de thèses, pour m'avoir accompagnée, guidée, dans cette aventure … qui en fut vraiment une ! Merci de m'avoir fait visiter des contrées « en didactique » dont je ne connaissais auparavant qu'à peine l'existence. Je remercie Jean-Luc Dorier pour ses conseils, sa gentillesse, ses encouragements.

Un merci particulier à Chantal pour avoir été présente à chacune de mes hésitations, chacun de mes vacillements.

Merci aux enseignantes qui m'ont ouvert leur classe et qui ont accepté de travailler avec une ingénierie ….pas si facile !! !

Merci à mes collègues de l'équipe des formateurs de mathématiques mais aussi des autres disciplines de l'ESPE Midi-Pyrénées. Vos encouragements ont été précieux.

Merci à l'ESPE Midi-Pyrénées et l'Université de Genève pour avoir favorisé ma recherche, qui par une décharge horaire, qui par un accueil dans ses murs, qui par un emploi du temps sur mesure, etc. Ce fut une aide plus qu'appréciable.

Merci à Christelle et Sébastien (allez, continue !), Karine (termine ta thèse !), Laureline (tu lâches pas !), Natalie (allez, courage !), Pierre (alors, t'as écrit aujourd'hui ?), Rémi (trois pages, c'est tout ?), Daniel, Pascale, Claire, Lionel, Patrice, Sylvie, Juliette, Claude, Véronique, Yves, SoSo, Marie-Hélène, Anne, Christelle, Christiane, Manuel, Wilhelmina, Gisèle, Anne-Valérie, Laurence, Florence, Mathias, Patricia, Nicolas, Malika, Mado, Jean-François, Laurent ……………. Vous avez été très nombreux. Merci !

Enfin, je dédie cette recherche à Liliane qui, hélas, n'aura pas eu le temps d'en voir le résultat.

Liste des abréviations

ARDM : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

ARCD : Association pour les Recherches Comparatistes en Didactique

ACD : action conjointe en didactique

BOEN HS : Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale Hors Série

CE1 : cours élémentaire 1ère année

COPIRELEM : Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire

COREM : Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques

COROME : Commission Romande pour les Moyens d'Enseignement

DAEST : Laboratoire de Didactique des enseignements Scientifiques et Technique de l'Université Victor Segalen, Bordeaux 2

EMF : Espace Mathématique Francophone

ESPE : École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

FPSE : Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation

GREDIC : Groupe de REcherche en DIdactique Comparée, Université de Genève.

GDM : Groupe de didactique des mathématiques du Québec

GRECO : le Groupement de Recherche Coordonnées (Didactique et Acquisition de connaissances scientifiques)

ICME : International Congress on Mathematical Education

ICMI : International Commission on Mathematical Instruction

IUFM : Institut Universitaire de Formation des Maîtres

PER : Plan d'Étude Romand

PIRLS : Progress in International Reading Literacy Study

SFR-AEF : Structure Fédérative de Recherche « Apprentissage, Éducation, Formation »

TAD : théorie anthropologique du didactique

TCC : théorie des champs conceptuels

TSD : théorie des situations didactiques

UMR – EFTS : Unité Mixte de Recherche « Education, Formation, Travail, Savoirs », Université de Toulouse Jean Jaurès.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Cette recherche de thèse prend son origine dans mon travail de formatrice en formation initiale et continue des enseignants dans le premier et second degré, d'abord en tant que formatrice associée à l'IUFM[1] de Toulouse, puis en tant que professeure certifiée recrutée à l'ESPE[2] pour assurer la formation mathématique des futurs professeurs d'école.

À temps partagé entre mon lycée et l'IUFM de Midi Pyrénées, j'ai été confrontée à l'introduction d'un objet d'enseignement, l'algorithmique, dans le cours de mathématiques en seconde. Le fait d'avoir à la fois la charge de l'enseigner à mes élèves et d'assurer la formation continue de mes collègues du secondaire, m'a portée à m'interroger sur une expression couramment utilisée dans la sphère scolaire : « donner du sens aux apprentissages ». Pour quelles raisons l'enseignement de l'algorithmique était-il arrivé dans l'enseignement des mathématiques ? Était-ce pour motiver les élèves en leur présentant différemment le cours de mathématiques, ou y avait-il un réel enjeu d'étude ? Comment les enseignants allaient-ils donner sens à cet objet hybride, qu'ils connaissaient pour la plupart à peine, appartenant à la fois au domaine mathématique et au domaine informatique ? Recrutée à plein temps à l'ESPE, j'ai eu alors la chance de côtoyer le monde de la recherche et d'approfondir cette question dans le cadre d'un Master 2 Recherche en Sciences de l'Éducation. Il s'agissait d'observer en situation de classe ordinaire, comment une enseignante construisait, dans l'action conjointe, le sens des objets algorithmiques, par exemple celui de « variable », selon que cet objet soit utilisé en mathématique, en informatique ou en algorithmique (Couderette, 2012, 2016). Mes activités de formatrice s'orientant ensuite principalement vers la formation initiale des enseignants du premier degré, j'ai pu alors me rendre compte que la question du sens restait tout aussi cruciale. Amenée à visiter des professeurs des écoles stagiaires, j'ai observé que pour beaucoup d'entre eux la question du sens se réduisait au choix d'une activité motivante ou à la formulation d'énoncés explicatifs. Dans le premier cas, il s'agissait de rendre l'apprentissage des mathématiques attrayant ; dans l'autre, d'aider l'élève en lui fournissant une méthodologie permettant de résoudre les

1 Institut Universitaire de Formation des Maîtres
2 École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

problèmes (repérer les données principales, les données superflues, repérer la question… etc.). Cet apprentissage, en fin de compte, finissait par avoir le même statut que l'apprentissage d'un savoir mathématique, les nombres, les polygones, la soustraction, etc. De ce fait, j'ai souvent observé mes étudiants convenir à la doxa institutionnelle, c'est-à-dire introduire une activité dite « de découverte », « de mise en train » (les manuels scolaires ont l'art et la manière d'intituler ce type d'activité) en début de séquence, puis travailler techniquement les enjeux de savoir, pour enfin les réinvestir dans une activité de résolution de problèmes. *In fine*, l'activité de résolution de problèmes mathématiques finissait par occuper une place particulière, au bout de la chaine d'apprentissage. Lors des visites de professeurs-stagiaires, il m'est bien souvent arrivé d'entendre « aujourd'hui [ajoutant parfois ça va vous plaire…], je vais faire une séance de résolution de problèmes » et de ne repérer l'enjeu d'étude réel qu'en fin de séance ou par le biais du cahier de préparation de l'enseignant. La démarche ainsi adoptée, se réclamant souvent du « socioconstructiviste » (ou plutôt de ses traits de surface), se caractérise selon mes observations, par une faible épaisseur des mathématiques enseignées au profit d'une conception de l'activité de résolution de problème réduite à la capacité des élèves à discuter collectivement de leurs résultats.

Aussi, la question du sens que l'on donne à l'activité mathématique m'importe particulièrement : en fin de compte, est-il nécessaire de comprendre ce que l'on apprend ? Ma réponse étant, on s'en doute, positive, comment concevoir un enseignement afin que les élèves ne fonctionnent pas comme des « automaths », formule chère à Stella Baruk (2000) ?

Ma participation à divers colloques et universités d'été, en particulier l'école d'été de l'ARDM[3] à Carcassonne (2011) et le colloque de l'ARCD[4] à Marseille (2013) m'a amenée à prendre connaissance de plusieurs travaux de recherche portant sur la mise en œuvre d'ingénieries didactiques dans des classes ordinaires. L'ingénierie didactique élaborée par Brousseau au COREM[5] portant sur la soustraction m'intéressait particulièrement : comment donner sens à une différence ? Pour beaucoup d'élèves, une première conception de la soustraction est un retrait. Mais pour beaucoup d'adultes aussi… Les recherches de Vergnaud (1991) ont permis de répondre cette question et sont maintenant largement diffusées dans les formations des enseignants au primaire. Mais comment donner sens à un algorithme ? Ce « petit un » que l'on écrit du chiffre des unités, d'où vient-il ? Et celui que l'on met en bas à

[3] Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques
[4] Association pour les Recherches Comparatistes en Didactique
[5] Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques

côté du chiffre des dizaines ? L'algorithme utilisé s'appuie-t-il sur une propriété de l'opération ou sur une propriété du nombre ? Bien souvent, un matériel didactique vient illustrer cette propriété, comme si « illustrer » permettait d'accéder à la compréhension mathématique d'un algorithme et d'éviter certaines erreurs. Les erreurs des élèves sont souvent attribuées par mes étudiants à des étourderies : une « leçon mal apprise, voire pas apprise du tout, un manque d'entrainement, etc. ». Les travaux de Resnick (1982) et de Brown & Van Lehn, 1980) montrent qu'il n'en est rien et qu'elles trouvent pour la plupart une explication logique.

L'ensemble de ces questions professionnelles et mes premières rencontres avec la recherche didactique par le biais de mon mémoire de recherche de master et les colloques fréquentés, sont à l'origine de mon intérêt pour l'ingénierie didactique de la soustraction. Il s'agit d'une ressource didactique qualifiée de robuste par la communauté des didacticiens des mathématiques dont la caractéristique est qu'elle dévolue des situations d'apprentissage construisant d'une part, le sens de l'opération et d'autre part, le sens d'un algorithme opératoire. Par ailleurs, cette ingénierie me permettait d'alimenter ma pratique professionnelle dans la formation continue et initiale des enseignants.

L'ESPE Midi-Pyrénées ayant ouvert au sein de la structure fédérative de recherche (SFR AEF[6]) un dispositif permettant de mener des travaux collaboratifs avec des enseignants sur le terrain, j'ai candidaté pour coordonner une étude sur l'usage de l'ingénierie broussaldienne de la soustraction. Ce dispositif m'intéressait particulièrement parce qu'il faisait le lien entre recherche, formation et formation continue dans un cadre assez large et avec peu de contraintes. Cette recherche collaborative, toujours en cours, m'a ainsi servi de terrain d'étude, et m'a donné l'occasion de mener des observations *in situ* comme je l'avais fait lors de ma recherche en Master 2, mais cette fois-ci sur des pratiques enseignantes dans le premier degré. Sur les cinq enseignantes participant à cette recherche, deux ont accepté d'entrer dans un contrat de recherche, l'une ayant une expérience avérée (25 ans d'ancienneté) et l'autre, en début de carrière, en début de carrière (7 ans d'ancienneté).

La rencontre lors du colloque de l'ARCD de Marseille avec la professeure Leutenegger de l'université de Genève a rendu possible un élargissement de ma recherche de thèse en intégrant à ma problématique un « estrangement » (au sens de Ginzburg, 2001) par la mise en comparaison de mises en œuvre de cette même ingénierie didactique dans deux systèmes éducatifs : la Suisse romande et la France. Cette opportunité a créé les conditions

[6] Structure Fédérative de Recherche « Apprentissage, Éducation, Formation »

d'une thèse de didactique comparée en cotutelle entre l'Université de Toulouse Jean Jaurès et l'Université de Genève sous la co-direction des professeures Amade-Escot et Leutenegger. Le développement de ma recherche doctorale a donc été réalisé au sein de l'UMR EFTS[7] et du GREDIC[8].

Dans le cadre de cette cotutelle, ma problématique de recherche s'oriente sur un double questionnement comparatif : quelle peut être l'influence des préconisations institutionnelles propres aux systèmes éducatifs de Suisse romande et de France sur les mises en œuvre d'une ingénierie didactique dont on est assuré de la robustesse et quelle peut être l'influence de l'expérience d'enseignement dans cette mise en œuvre. Ce double questionnement, qui sera affiné au fil de la première partie de ce manuscrit, s'appuyait sur l'idée, développée en didactique comparée et explorée dans mon mémoire de master, de l'existence de possibles déterminants de l'action didactique, à la fois institutionnels et relevant de l'épistémologie des professeurs.

Ainsi, mes préoccupations didactiques de formatrice (autour des questions du sens des objets mathématiques et du rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages à l'école primaire), articulées à celles (naissantes) de chercheure, relatives aux possibles déterminants de l'action didactique, m'ont amenées à élaborer la problématique de ma recherche doctorale intitulée : « Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques. Études de cas en Suisse et en France ».

Le manuscrit de cette thèse est structuré en deux parties, chacune développée en trois chapitres :

- La première partie présente une revue de littérature, l'inscription théorique et la problématique de recherche, ainsi que les méthodes utilisées.

  - Le premier chapitre fait un bref état de la littérature sur la question du sens des objets mathématiques et de la résolution de problème en didactique des mathématiques, plus particulièrement dans le champ numérique, domaine d'enseignement central à l'école primaire. Nous avons d'abord cherché, en réduisant notre revue à l'espace francophone, à identifier comment la question du sens est travaillée dans les différentes approches théoriques le la didactique des

7 Unité Mixte de Recherche « Education, Formation, Travail, Savoirs », Université de Toulouse Jean Jaurès.
8 Groupe de REcherche en DIdactique Comparée, Université de Genève.

mathématiques. Nous avons ensuite dressé un bref état de l'art sur la résolution de problèmes dans le domaine numérique au primaire dans le monde francophone mais aussi anglo-saxon, pour par la suite nous restreindre au champ additif. Cette revue sur sens et résolution de problèmes à l'école primaire dans le domaine numérique, permet de valider le choix effectué d'initier le travail comparatiste d'analyse des pratiques d'enseignement à partir de l'introduction d'une composante expérimentale (l'ingénierie broussaldienne de la soustraction qui, dans sa conception, allie les questions de construction du sens et de résolution de problèmes mathématiques via des situations a-didactiques). L'ingénierie de la soustraction aura ainsi le statut de *tertium comparationis* [9]dans notre recherche.

- Le second chapitre porte sur l'inscription théorique de la recherche. Dans une première section, nous introduisons l'approche comparatiste dans laquelle nous nous inscrivons. Dans une deuxième section, nous présentons le cadre théorique, celui de l'action conjointe en didactique, ainsi que les concepts mobilisés lors de l'enquête empirique. La troisième section précise la problématique et présente les questions de recherche.
- Le dernier chapitre de la première partie porte sur les options méthodologiques retenues. Il expose les méthodes d'analyse des textes institutionnels en Suisse romande et en France (1er plan de comparaison), puis celles utilisées pour l'analyse des pratiques didactiques de trois enseignantes mettant en œuvre l'ingénierie de la soustraction : deux enseignantes chevronnées, l'une en Suisse romande, l'autre en France (2ème plan de comparaison), et une enseignante en début de carrière en France (3ème plan de comparaison entre enseignantes françaises d'expériences contrastées).

- La seconde partie présente les résultats de la recherche. Elle s'organise autour de 3 chapitres, la comparaison des pré-construits institutionnels en Suisse romande et en France, l'analyse, dans chacun des sites, de l'implémentation de l'ingénierie par les trois enseignantes, la comparaison du fonctionnement des trois systèmes didactiques observés au regard des questions de recherche.

- Le premier chapitre porte sur l'analyse des préconstruits dans chacun des pays (Suisse romande et France). Nous identifions les généricités et les spécificités des curriculums mathématiques susceptibles d'avoir un impact sur les pratiques

[9] Voir à ce propos dans le chapitre 3 de la partie 1, la section 2.1.3

enseignantes qui seront observées. Il s'agit de se donner la possibilité d'accéder, par leur contextualisation, à l'intelligibilité des mises en œuvre de l'ingénierie didactique sur chacun des sites.

- Le second chapitre des résultats, qui constitue la partie centrale du travail empirique, rend compte des modalités d'implémentation de l'ingénierie didactique par les trois enseignantes. Dans un premier temps (titre 1), nous rendons compte d'une analyse épistémique de l'ingénierie didactique broussaldienne, afin d'accéder à sa logique interne et d'en identifier les enjeux. Dans un second temps (titre 2, titre 3 et titre 4), nous rendons compte, à partir d'analyses mésogénétiques de la succession des séances, des modalités de mises en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans chacun des sites. Il s'agit alors de répondre aux questions de recherche : comment les enseignantes ont-elles mis en scène l'ingénierie didactique dans leur classe ? Quels savoirs ont été réellement co-construits par les acteurs dans la classe ? En quoi les textes officiels sont-ils possiblement déterminants ? De la même façon, en quoi l'épistémologie pratique du professeur pèse-t-elle sur les adaptations produites ?
- Le troisième et dernier chapitre des résultats porte sur la comparaison deux à deux du fonctionnement des systèmes didactiques confrontés à l'implémentation de l'ingénierie de la soustraction. Il s'agit cette fois-ci d'accéder à la logique macrodidactique d'implémentation de l'ingénierie. Nous démêlons en quoi les pratiques observées sont influencées par les préconisations institutionnelles et/ou par l'épistémologie pratique des professeurs observés, à partir de l'étude de leurs généricités et spécificités. Les constats établis permettent de rendre intelligibles les différentes logiques d'implémentation de l'ingénierie et d'identifier deux moments cruciaux lors desquels, quels que soient les sites, les phénomènes didactiques mis au jour révèlent des difficultés récurrentes dans l'usage de cette ressource didactique.

La conclusion générale de la thèse revient sur les réponses apportées aux questions de recherche, sur les apports et les limites de notre travail, sur les perspectives qui s'en dégagent pour la formation des enseignants. Elle indique quelques pistes d'approfondissement et de recherches que nous envisageons de poursuivre.

PARTIE 1 :

Revue de littérature

Cadre théorique, problématique

Méthodologie de recherche

Cette partie est constituée de trois chapitres :

- **Le premier chapitre** rend compte la manière dont est traitée la question du sens en didactique des mathématiques, puis présente une brève revue de littérature sur la résolution de problèmes en particulier dans le champ additif
- **Le second chapitre** présente les arrières plans sous-tendant notre problématique et notre méthodologie. Dans un premier temps, nous présentons l'approche comparatiste dans laquelle s'inscrit notre recherche, dans une deuxième temps le cadre théorique. Enfin, dans un troisième temps, nous formulons notre problématique ainsi que les questions de recherche.
- **Le troisième chapitre** présente les principes généraux de la recherche ainsi que les choix méthodologiques pour l'analyse des curriculums et des pratiques

Chapitre 1. Revue de littérature

Cette revue de littérature comporte deux sections :

La première section rend compte de la manière dont la question du sens est traitée en didactique des mathématiques

La seconde section rend compte de travaux de recherche portant la résolution de problèmes numériques à l'école primaire, en particulier dans le champ additif

Dans le cadre de la problématique de cette thèse qui est de mener une recherche comparatiste sur la manière dont des enseignants s'approprient une ingénierie didactique sur l'enseignement de la soustraction au primaire, ingénierie qualifiée de robuste du point de vue épistémologique, nous nous proposons d'explorer dans cette revue de littérature les travaux en didactique des mathématiques qui ont exploré les questions du sens et de la résolution de problèmes, notamment au niveau de l'enseignement des nombres et de leurs opérations. Le choix de cette focale renvoie à des préoccupations professionnelles indiquées en introduction ainsi qu'aux enjeux centraux de l'ingénierie broussaldienne, à savoir ceux relatifs aux conditions didactiques qui permettent aux élèves de s'approprier le sens de la soustraction et ceux qui consistent à les confronter, sous couvert de situations a-didactiques, à un ensemble de problèmes à partir desquels ils doivent construire des connaissances. Cette ingénierie s'inscrit en effet, dans le grand mouvement de l'enseignement des mathématiques qui consiste à acquérir les concepts mathématiques par la résolution de problèmes et non pas à appliquer des techniques algorithmiques même si, au final, les élèves devront les maitriser. Ceci nous amène à focaliser cette revue de littérature sur ces deux thèmes qui traversent toutes les ingénieries didactiques broussaldiennes. Pour autant, cette revue n'a pas l'ambition d'être exhaustive. Nous réduisons son empan au champ numérique et plus particulièrement au domaine additif en examinant :

- la manière dont est traitée la question du sens dans les différentes approches de l'enseignement des nombres et leurs opérations dans la didactique des mathématiques francophone (section 1) ;

- la résolution de problèmes dans le champ additif à l'école primaire dans les travaux de langue française et anglaise (section 2)

1. La question du sens en didactique des mathématiques

L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques se réalisent dans un lieu dédié, l'école. Au sein de cette institution, enseignants et élèves interagissent afin de donner sens à un savoir. Comment alors le sens d'un savoir émerge-t-il dans la classe ? Dans une vision constructiviste, la didactique des mathématiques donne une place importante à l'activité de l'élève dans la construction des apprentissages. Posant la question du sens, les didacticiens interrogent le rôle de chacun des acteurs dans la classe. Comment l'enseignant organise-t-il son enseignement pour donner sens à un concept ? Quelle situation propose-t-il ? Et symétriquement, comment les élèves donnent-ils sens à l'activité proposée par leur enseignant et construisent-ils ces concepts ?

Nombreux sont les chercheurs qui ont travaillé ces questions. Dans les sections qui suivent, nous nous intéressons plus particulièrement aux différentes approches qui ont été effectuées en langue francophone et qui ont été discutées notamment par Lemoyne (1993) dans le cadre du Réseau international de recherche en Éducation et en Formation (REF) et Perrin-Glorian (1994a). Il ressort de l'ensemble des travaux auxquels nous avons eu accès, que de multiples entrées, correspondant à des découpages de réalité différents, conduisent à l'utilisation d'une multiplicité de cadres théoriques proposant des éclairages différents de cette question.

Aussi, dans un premier temps, nous examinons comment cette question du sens est traitée par l'approche formalisant la notion de jeux de cadres et la dialectique outil/objet à partir d'un point de vue lié à la théorie des situations didactiques (Douady, 1984, 1986, 1996 ; Douady & Perrin-Glorian, 1989), par le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert & Rogalski, 2002) puis par l'approche sémiologique (Duval, 1993), par la théorie anthropologique du didactique[10] (Chevallard & Johsua, 1991). Dans les trois sections suivantes, nous nous intéressons plus particulièrement à la manière dont au niveau de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, la théorie des champs conceptuels, la théorie des situations didactiques et la théorie de l'action conjointe ont abordé la problématique du sens.

1.1. L'approche par la dialectique « outil/objet » et les jeux de cadres

Pour Douady (1984, 1996), organiser l'enseignement pour donner sens à un concept, c'est jouer sur deux leviers, la dialectique « outil/objet » et le « jeu de cadres ». Elle part de l'idée que les situations scolaires d'apprentissage doivent mettre l'élève en activité mathématique dès l'école primaire grâce à des problèmes répondant à certaines conditions (Douady, 1984, 1986, 1994). Cette auteure distingue le caractère outil et le caractère objet d'un concept mathématique.

> « Un concept est **outil** lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions. Un même outil peut être *adapté* à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

[10] Notons que la plupart des travaux en théorie anthropologique du didactique relève de l'enseignement du secondaire supérieur.

Un concept est **objet** lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances d'un moment reconnues socialement » (Douady, Perrin-Glorian, 1989, p. 388).

Ces auteures (1989) considère que c'est le caractère outil qui donne sens au concept, le travail sur l'objet permettant « la décontextualisation et la capitalisation du savoir » (*Ibid.*). Et c'est dans une dialectique « outil/objet », c'est-à-dire dans des allers retours entre l'aspect outil et l'aspect objet que se construit le sens d'un concept : Elles estime que l'élève a acquis de nouvelles connaissances s'il est capable de manier l'outil de manière *explicite*, voire de l'adapter à de nouvelles situations.

Retenant les concepts piagétiens d'assimilation et d'accommodation, Douady et Perrin-Glorian désignent un deuxième levier s'inscrivant dans une dialectique ancien/nouveau, « le jeu de cadres ». Par cadre, elle entend un domaine mathématique identifié par ses objets, les relations entre ces objets, les représentations de ces objets, ainsi que les traitements qu'ils mobilisent. Pour Douady, un concept mathématique est associé à plusieurs cadres et c'est par les « jeux de cadres [que l'on donne du sens] *à l'activité mathématique puisque les mathématiques ne décrivent que des relations* ». Ce sont les changements de cadres, provoqués intentionnellement par l'enseignant, qui permettent d'obtenir des formulations différentes d'un problème. Et c'est la mise en correspondance des différents cadres qui amène à l'émergence de nouveaux objets mathématiques, à leurs mises en relation avec les objets conceptuels déjà construits et donc à donner sens aux concepts visés.

Si Douady donne sens aux concepts par les jeux de cadre, c'est-à-dire par le contenu mathématique, Duval soutient que le sens des concepts mathématiques se travaille aussi par leurs représentations sémiotiques.

1.2. La question du sens dans la double approche ergonomique et didactique

La double approche s'inscrit dans une double dimension, l'une s'appuyant sur une dimension psychologique de l'action de l'enseignant (théorie d'ergonomie cognitive), l'autre sur une dimension didactique (didactique des mathématiques). Roditi (2010) distingue deux activités dans le travail de l'enseignant :

> « D'une part, comme tout professionnel, il réalise la tâche prescrite en connaissance du but assigné par l'employeur et pour satisfaire sa propre motivation. D'autre part, il a des objectifs pour ses élèves quant à leur enrôlement dans les situations pédagogiques qu'il leur propose, quant à la nature de leur activité mathématique, et au bout du compte quant à leur apprentissage. Il y a donc deux activités en cascade : la première est une activité

> de l'enseignant qui répond à une tâche qui lui est prescrite par l'institution scolaire, la seconde est une activité de l'élève en réponse à la situation mathématique proposée en classe par l'enseignant » (p. 207)

Aussi, les deux valences de la double approche, didactique et ergonomique, permettent de lier « les analyses des activités des élèves à des analyses des activités de l'enseignant liées à l'exercice du métier » (Robert, 2008, p. 14). Dans l'analyse didactique, il s'agit, de se focaliser sur l'organisation de connaissances mathématiques telle qu'elles ont été pensées par l'enseignant et au travers des tâches qu'il propose à ces élèves. L'approche ergonomique permet quant à elle d'analyser l'activité réelle de l'enseignant, c'est-à-dire ce qui se passe dans la classe mais aussi à l'extérieur de la classe, relativement à l'exercice de son métier d'enseignant : environnement social, les contraintes locales, les contraintes institutionnelles etc. Dans ce cadre théorique, le sens de l'activité mathématique est donc travaillé selon une entrée par l'activité du professeur. Les savoirs mathématiques prennent sens dans la capacité de l'enseignant à structurer des tâches en assurant la cohérence entre le niveau idéologique (qui caractérise l'activité du professeur réfléchissant l'enseignement de façon général), le niveau épistémologique, et l'activité dans la classe.

Plusieurs travaux de recherche ont montré la stabilité et la cohérence des pratiques enseignantes. Roditi (2003) montre dans une recherche sur l'enseignement de la multiplication de nombre décimaux « régularités et les variabilités » des pratiques enseignantes. Butlen, Masselot et Pézard (2003) montrent que si la cohérence s'observe dans les choix généraux de l'enseignant relativement à l'enseignement des mathématiques, elle est aussi en relation avec la gestion de la classe.

1.3. L'approche par les représentations sémiotiques

Duval (1993), psychologue en sciences cognitives, s'intéresse au fonctionnement cognitif de la pensée humaine, en particulier dans le champ des mathématiques. Il souligne le fait que les objets mathématiques ne peuvent être compris que conceptuellement. Pour autant, écrit-il, c'est par une représentation sémiotique qu'un travail sur les objets mathématiques est possible. C'est ce qu'il nomme le « paradoxe cognitif de la pensée mathématique ». Pour ce chercheur, la distinction entre l'objet conceptuel et sa représentation est un « point stratégique » pour la compréhension des mathématiques. Or, comment des élèves apprenants peuvent-ils ne pas confondre l'objet conceptuel et sa représentation s'ils ne travaillent que sur sa représentation ? Et à l'inverse, comment peuvent-ils traiter mathématiquement les problèmes proposés au travers de systèmes sémiotiques, s'ils n'ont pas une appréhension conceptuelle des objets mathématiques ? Duval (1993) répond à cette question à en proposant une organisation de l'enseignement articulant l'appréhension de la représentation sémiotique et l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique dans différents registres sémiotiques :

> « [Le] recours à plusieurs registres semble une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent être reconnus dans chacune de leurs représentations » (Duval, 1993, p. 40).

Pour Duval, ce sont les interactions d'une représentation d'un concept avec ses représentations dans d'autres registres sémiotiques qui construisent le sens d'un concept. En d'autres termes, pour ce chercheur, c'est le processus de transformations de la représentation des concepts au sein d'un même registre, mais aussi entre les registres qui permet la construction du sens d'un concept. Aussi, dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques, une grande importance est donnée aux activités de transformations (que Duval nomme « conversion ») des représentations du concept d'un registre à un autre.

1.4. L'approche du sens dans la théorie anthropologique du didactique

La théorie anthropologique du didactique travaille, pour sa part, la question du sens d'un concept au travers de la notion de « rapport au savoir ». Pour Chevallard, une personne x connaît un objet *o* si cet objet existe pour x, c'est-à-dire s'il existe un rapport personnel R (x, *o*) de x à *o*. Ce rapport est le fruit de l'ensemble de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet *o* (Chevallard, 2003). De la même façon, une institution I connaît un objet o si cet objet existe pour I, c'est-à-dire s'il existe un rapport institutionnel R (I, *o*) de I à *o*. (Bosch et Chevallard, 1999). Par institution, Chevallard entend :

> « un dispositif social total, […], qui permet et impose à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu d'une manière de faire et de penser propres » (Chevallard, 2003).

L'école, la classe (CE1 par exemple) sont des institutions. Les sujets de l'institution CE1 occupent soit la position d'élèves, soit la position de professeur ou bien encore celle d'assistant de vie scolaire... Comment évolue alors ce que Chevallard (2003) appelle « l'univers cognitif » de l'élève dans cette institution ?

> « Le rapport personnel de x à un objet o change – ou se crée, s'il n'existait pas encore – par l'entrée de x dans certaines œuvres O dont l'objet o est constitutif, et qui vivent en certaines institutions I où x vient occuper une certaine position p. » (*Ibid.*).

En d’autres termes, discuter du sens d’un objet de savoir chez un élève revient à discuter du rapport de cet élève au savoir relatif à cet objet, dans l’institution à laquelle il appartient, ce que Chevallard transcrit par R_I (p, o). La recherche du sens s’assimile à une recherche de mise « en conformité » du rapport personnel de l’élève au savoir officiel de l’institution à laquelle cet élève appartient :

> « Dire que x est un bon sujet de I en position p, c’est dire que l’on a R (x, o) ≅ R_I (p, o), où le symbole ≅ désigne la conformité du rapport personnel de x au rapport institutionnel en position p » (*Ibid.*).

De nombreux de travaux ont cherché à étudier la conformité des rapports personnels des élèves avec le rapport institutionnel (Grugeon, 1995 ; Bronner, 1997 ; Majaj, 2011 ; Wozniak, 2012 ; Rinaldi, 2016), mais aussi celle des enseignants (Bronner, 1997 ; Chaachoua, 1997 ; Crumière, 2017).

Si, dans la, la question du sens est travaillée au travers du concept de rapport au savoir dans une institution, la théorie des champs conceptuels, qui s’origine dans la psychologie du développement, privilégie une entrée par le sujet confronté à des problèmes mathématiques.

1.5. La question du sens dans la théorie des champs conceptuels

Pour traiter la question du sens, la théorie des champs conceptuels privilégie l’entrée par le sujet épistémique. Selon Vergnaud (1990), le sens est une relation du sujet-élève aux situations et aux signifiants, dont le « schème » rend compte.

Vergnaud définit un concept comme un triplet composé de l’ensemble des situations et problèmes qui donnent sens à ce concept mathématique, l’ensemble des invariants opératoires attachés à ce concept (signifié) ainsi que l’ensemble des formes langagières et non langagières permettant d’agir sur les invariants opératoires (signifiant). Pour ce chercheur, le sens des concepts se construit au travers de la relation que le sujet entretient avec la situation[11].

> « Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l’on s’intéresse à son apprentissage et son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour 1'enfant. […] Ce sont les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes. Il n'est pas non plus dans les mots et les symboles mathématiques » (Vergnaud, 1990, pp. 135-158).

Il précise plus loin :

[11] Vergnaud (1990) précise dans ce même article ne pas donner au concept de « situation » la signification qu’elle prend dans la théorie des situations, mais « se limiter au sens que lui donne habituellement le psychologue : les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. » (p. 150)

> « ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. Les schèmes, c'est-à-dire les conduites et leur organisation » (Vergnaud, 1990, p. 158).

Lemoyne (1993) rappelle que le concept de schème est emprunté à la théorie piagétienne : « les schèmes, selon Piaget, sont le canevas des actions susceptibles d'être répétées activement » (p. 272). Un schème, dans cette théorie, est décrit comme un instrument d'assimilation applicable dans des situations reconnues, mais aussi dans des situations nouvelles, conférant une signification aux actions. Aussi, lorsque Vergnaud écrit « ce sont les schèmes […] qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant », il reprend ce concept de schème dans un cadre didactique en précisant que c'est le couple « schème-situation » qui est au centre de la construction du sens d'un concept, et non sa seule définition : « un concept ne peut être réduit à sa définition, […] c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant » (p. 135). En d'autres termes, un concept mathématique prend sens pour un élève au travers de l'ensemble des schèmes qu'il aura mis en œuvre pour traiter un ensemble de situations le confrontant à ce concept. Dans le cas de la soustraction, pour un élève le sens premier correspond à une diminution. C'est la confrontation à diverses situations qui l'amène à comprendre la soustraction comme un complément, comme une comparaison entre deux états. Si chacune des situations a mobilisé un ou des schèmes différents, tous aboutissent au même schème-algorithme, la soustraction. La notion de champ conceptuel répond à cette organisation de situations relevant d'un même concept : champ additif, champ multiplicatif, etc.

La théorie des champs conceptuels et en particulier le concept de schème opératoire a été utilisée dans de nombreux travaux en didactique des mathématiques, notamment dans le domaine numérique, par l'école genevoise qui l'a introduite dans les plans de formation des enseignants (*cf.* Brun & Conne, Journal de l'enseignement primaire, 1993). Citons en particulier les travaux de Brun, Conne, Cordey, Floris, Lemoyne, Leutenegger, et Portugais (1993) et de Brun, Conne, Lemoyne, Portugais (1994). Reprenant les travaux de Brown et Burton (1978), de Brown et Van Lehn (1980, 1982) qui analysent les erreurs systématiques des élèves dans les algorithmes de la division, ces auteurs exploitent le concept de schème pour montrer le processus de construction du « schème-algorithme »[12] de la division. L'analyse des erreurs des élèves n'est pas conduite sous l'angle syntaxique des règles algorithmiques (Brown, Burton & Van Lehn cités auparavant), mais selon le concept de

[12] Ces auteurs considèrent « l'ensemble des conduites nécessaires à l'accomplissement de l'algorithme de la division comme un seul et même schème »

schème. Examinant « les tentatives d'adaptations actives à la variété des situations de divisions présentée » (p. 122), ces auteurs mettent en évidence des « sous-schèmes » qui, par leur combinaison, leur juxtaposition, leur confrontation conduisent les élèves à la construction du sens de la division. Dans la lignée de ces travaux, Lemoyne, Vincent, Brun, Conne et Portugais (1993) poursuivent en montrant comment un schème de la division, « partager/distribuer » se coordonne à d'autres schèmes dans des situations additives et multiplicatives.

Utilisant le concept de schème comme moyen d'analyse, Flückiger (2000, 2004, 2005) montre la compatibilité de la théorie des champs conceptuels et de la théorie des situations didactiques : se servant de la théorie des situations didactiques comme cadre de référence pour la mise en place de micro-ingénieries didactiques, elle montre, dans les interactions en classe et dans la gestion de la mémoire didactique des élèves et de l'enseignant, l'élaboration progressive et collective des connaissances numériques relatives au sens de l'algorithme de la division.

1.6. La question du sens en théorie des situations didactiques

La théorie des situations didactiques aborde la question du sens des concepts mathématiques par les contenus, c'est-à-dire par les situations d'enseignement proposées aux élèves. Dans « Vingt ans de didactique des mathématiques en France », Perrin-Glorian rappelle que Brousseau a élaboré la théorie des situations didactiques « en s'appuyant sur le structuralisme pour se construire contre lui » (1994 b, p. 105) c'est-à-dire en se démarquant nettement des méthodes pédagogiques dérivées du « processus psychodynamique » prôné par Dienès[13]. Pour Brousseau, le plus important est de « trouver les conditions didactiques des apprentissages, les caractéristiques informationnelles des concepts visés plutôt que de fournir des modèles généraux simplifiés qui ne fonctionnent finalement que de façon idéologique » (cité par Perrin-Glorian, 1994 b, p.104). Il s'agit dans la TSD de fabriquer des situations didactiques qui favorisent une « genèse artificielle » (1981, p. 50) de savoirs mathématiques. Sarrazy (1996) souligne que « la situation n'est pas un simple décor de la scène didactique, mais [qu'elle] intervient activement dans l'établissement des rapports unaires, binaires, et ternaires des partenaires de la relation didactique et contribue à l'élaboration du sens des objets et des sujets de cette relation » (p. 15). Cette préoccupation, épistémologique, est appuyée par Artigue (1988, 1996) qui précise qu'à la différence des théories constructivistes

[13] « Par son "processus psychodynamique", Dienès propose un modèle d'apprentissage fondé sur la reconnaissance des similitudes entre des "jeux structurés", puis sur la schématisation et la formalisation de ces généralisations" guidées. » (Brousseau, 1992, p. 7)

centrées sur l'engagement de l'élève dans la construction du savoir, la théorie des situations didactiques met l'accent sur le « contrôle des rapports entre sens et situations ». L'analyse *a priori,* de par son mode de contrôle, fait partie des éléments essentiels du dispositif de construction d'une ingénierie didactique au sens de la théorie des situations.

Dans le texte « le cas de Gaël », Brousseau (1999/2009) définit les éléments constitutifs du sens de la soustraction :

> « En théorie des situations, le sens, en particulier celui de la soustraction, est constitué par :
>
> 1. l'ensemble des situations qui sont résolues par une "soustraction"
> 2. l'ensemble des procédures de résolution de ces situations (en particulier celles qui reposent sur des répertoires " primitifs " et dont la soustraction est une sorte de réécriture)
> 3. l'ensemble des moyens culturels et des relations développés pour "expliquer" la soustraction. C'est-à-dire les connaissances (considérées) utilisées pour "contraindre" un apprenant et qui simulent sa compréhension (supposée) de la soustraction » (Brousseau, 1999/2009, p.19).

Il ressort des trois points sur le cas particulier de la soustraction, que ce qui est recherché relève les conditions et des contraintes permettant de construire des situations donnant le maximum de sens à l'activité de l'élève en résolution de problèmes soustractifs. Élément-clé de la théorie, la situation fondamentale (par exemple le problème du parking dans l'ingénierie sur la soustraction qui fera l'objet de notre étude empirique) est définie comme caractéristique du sens du savoir visé et comme une « modélisation de cette famille de situations non didactiques spécifiques du savoir visé » (Bessot, 2003, p. 16). Brousseau (1986) spécifie les situations a-didactiques comme des situations relatives à une connaissance : « aménagées à des fins didactiques, elles déterminent la connaissance enseignée à un moment donné et le sens particulier que cette connaissance va prendre du fait des restrictions et des déformations ainsi apportées à la situation fondamentale » (p. 60). Le concept de situation a-didactique dans la théorie broussaldienne est consubstantiellement lié à celui de dévolution (cinq étapes de la dévolution sont décrite par l'auteur, approche purement ludique, dévolution d'une préférence, dévolution d'une responsabilité et d'une causalité, dévolution de l'anticipation, dévolution de la situation a-didactique, Brousseau, 1986, p. 53-56).

Brousseau donne à l'erreur un statut constitutif du sens d'une connaissance. En référence à Bachelard et à Piaget, il retient qu'une connaissance se construit sur et contre des connaissances anciennes :

> « La constitution du sens implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles » (1978a, p.170).

Ce qui amène cet auteur à considérer que les problèmes les plus intéressants sont ceux qui permettent de franchir « de véritables obstacles » et à conclure qu'un « obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance en ce sens que celui qui l'a rencontré et surmonté, a une connaissance différente de celui qui ne s'y est pas heurté » (Brousseau, 1989a).

Plusieurs travaux dans le domaine de la numération à l'école primaire ont fait l'objet d'étude en théorie des situations didactiques à partir de productions d'ingénieries didactiques[14] ou d'analyse de leurs effets (notamment Briand, 1993 ; Bolon, 1996 ; Douaire, 2006 ; Tempier, 2013).

1.7. La question du sens dans l'approche de l'action didactique conjointe

Les travaux menés dans le cadre théorique de l'action conjointe en didactique sont apparus autour des années 2000 à propos du travail sur l'action du professeur (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000 ; Sensevy, 2001, 2006). Ils se sont poursuivis dans le cadre du mouvement comparatiste en didactique naissant autour des unités de recherche de Rennes, Genève, Marseille et Toulouse. Cette perspective tente de tenir, d'un point de vue pragmatiste, à la fois la question du savoir et la question des sujets (Schubauer-Leoni, 1997a ; Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat, Fluckiger, & 2007 ; Assude & Mercier, 2007 ; Sensevy & Mercier, 2007) : ces unités de recherche abordent cette question à partir de l'analyse *in situ* de transactions telles qu'elles se déroulent entre professeurs et élèves dans les séances de mathématiques[15]. Cette approche prend appui sur des concepts élaborés en théorie anthropologique du didactique et en théorie des situations didactiques, et travaille la question du sens à partir d'une analyse des interactions verbales et non verbales des professeurs et des élèves.

[14] Sur la présentation de la théorie des situations didactiques et ses liens avec les questions théoriques et méthodologiques relatives aux recherches d'ingénierie didactique, voir chapitre suivant section 3.
[15] Pour des précisions sur le modèle théorique, voir section 4

Le milieu didactique est décrit dans la théorie anthropologique du didactique comme un milieu dynamique tenant du rapport personnel aux objets composant ce milieu : « à chaque instant, le milieu apparaît subjectivement comme un donné ; mais c'est en vérité un construit permanent » (Chevallard, 1992, p. 95). La théorie des situations didactiques quant à elle caractérise le milieu comme antagoniste et rétroactif, l'élève construisant le savoir par adaptation (Brousseau, 1986). Dans l'action conjointe, la notion de milieu didactique est reconceptualisée comme « une configuration dynamique d'objets auxquels les sujets de l'institution didactique (enseignant et élèves) établissent des rapports à travers leurs gestes et leurs discours » (Ligozat, 2015). En d'autres termes, l'action conjointe considère que c'est dans un processus dynamique, au travers de transactions relatives aux objets mésogénétiques (objets matériels, langagiers, symboliques, règles d'action, etc.) introduits par les actants, que se construit le sens du savoir visé. Schubauer-Leoni et al. (2007) présentent la mésogenèse comme un élément déterminant de la construction du savoir :

> « la *mésogénèse* en tant que construction de la référence est *première* […] nous estimons que l'étude de l'action conjointe gagne à être abordée par la prise en compte des gestes et techniques de type mésogénétiques » (Schubauer-Leoni et al., 2007, p. 58).

Se référant à la théorie des situations didactiques, Sensevy (2007) insiste sur la nécessité d'un milieu rétroactif pour que l'élève puisse s'engager « de son propre mouvement » dans la situation, et élaborer des stratégies de résolutions pertinentes. Cependant, ainsi que le signalent Amade-Escot et Venturini (2009), rien ne garantit que les objets introduits dans le milieu didactique conduisent au sens du savoir.

> « Le milieu nécessaire à l'étude des savoirs relève d'un processus de co-construction qui n'est jamais totalement contrôlé ni garanti par le dispositif ou la tâche d'apprentissage. […] S'il implique bien évidemment des aspects liés à l'épistémologie du professeur et aux conditions matérielles et symboliques structurant les dispositifs proposés aux élèves, au-delà, il est aussi le produit émergent de l'action conjointe professeur-élèves. » (Amade-Escot et Venturini, 2009, p. 15).

Deux grandes catégories de travaux portant sur l'analyse de pratiques enseignantes ont été menés sous couvert de l'action conjointe en didactique : des travaux sur l'analyse de pratiques ordinaires au sein de classes ordinaires, et d'autres travaux sur l'analyse de pratiques d'enseignement aux prises avec des ingénieries didactiques[16] dans le cadre de dispositifs appelés « ingénieries coopératives » (Sensevy, 2009 ; Sensevy, et al., 2013).

---

[16] Rappelons qu'initialement (dans les années 80) la méthodologie d'ingénierie didactique en mathématiques avait pour principale visée la production de phénomènes pour la recherche (Artigue, 1988).

1.7.1. La construction du sens dans l'analyse des pratiques en classe ordinaire

Cette première catégorie de travaux reprend la question du sens en montrant comment, dans la dévolution et au fil des interactions, l'élève construit *proprio motu* (Sensevy, 2007) le sens des connaissances. Citons par exemple les travaux d'Assude et Mercier (2007) de Marlot et Toullec-Théry (2011) et de Sensevy (1998).

Sensevy (1998b) montre dans sa thèse, au travers de la dévolution d'un savoir relatif à la notion de fraction (Journal des Fractions), que « l'autonomie cognitive de l'élève » est directement liée à la forme de l'organisation de l'étude : comment construire une « institution didactique » conduisant à l'autonomie des élèves ? Cet auteur pose la question de la dévolution et des modes de régulation nécessaires à la construction du sens d'un concept (ici le concept de fraction). Nous retenons les premières interrogations de Sensevy :

> « Comment le professeur peut-il faire face à la multiplication des parcours individuels ? Des éléments de réponse résideraient alors dans la collectivisation de certains éléments de ces parcours. […] Quelles sont les techniques dont les professeurs disposent pour ne pas accroître encore davantage la disqualification des plus faibles ? » (Sensevy, 1998 b, p.50)

En avançant la « nécessaire coopérativité de l'apprentissage » (*Ibid*.), Sensevy pose les premiers jalons du modèle de l'action conjointe.

L'originalité de ces travaux est de s'intéresser aux situations du didactique ordinaire c'est-à-dire non pilotée par une l'introduction d'une conception didactique. Dans cette perspective, Ligozat (2008, 2015) s'intéresse aux logiques d'action d'une enseignante genevoise dans une séance de mathématiques en 6P Harmos aux prises avec une ressource issue des moyens d'enseignement de suisse romande portant sur les règles d'écritures de grands nombres. Ses analyses montrent les limites de « l'ingéniosité de l'enseignante » à articuler les types de tâche présents dans cette ressource.

Marlot et Toullec-Théry (2011) analysent les gestes d'une enseignante relatifs à l'aide ordinaire de manière à saisir son épistémologie pratique. Ce faisant, ces deux auteures montrent comment un savoir (ici, celui de la multiplication) ne prend pas sens auprès d'élèves en difficultés en raison d'une simplification de la tâche prescrite initialement. Les modifications du milieu didactique par les interactions (effets Jourdain et Topaze, échanges de nature conversationnelle) montrent un « évanouissement du savoir visé » (p. 10). Ces deux auteures convoquent le concept d'épistémologie pratique du professeur pour interpréter ce phénomène didactique : celui-ci relèverait d'une forme de doxa inhérente à l'aide consistant

« à mettre les élèves en groupe "homogène faible", à simplifier, voire éparpiller les tâches, à faire réussir les élèves à tout prix au travers de la production de traces, en partie déconnectées des enjeux de savoir. »

1.7.2. La reprise d’ingénieries didactiques broussaldiennes dans l’étude du didactique ordinaire

Ce qui nous intéresse dans cette revue de questions est qu’un certain nombre de travaux récents ont retravaillé la question de la pertinence des ingénieries didactiques broussaldiennes dans des classes ordinaires actuelles. Une seconde catégorie de travaux porte sur la reprise d’ingénieries didactiques broussaldiennes élaborées originellement dans une visée phénoménotechnique, dans des classes « ordinaires » (Leutenegger & Ligozat, 2010 ; Leutenegger & Quilio, 2013 ; Morales, Bueno-Ravel, 2012 ; Morales & Sensevy, 2013 ; Quilio, Morellato & Crumière, 2012 ; Quilio & Mercier, 2010 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger, 2007 ; Sensevy, Ligozat, Leutenegger, & Mercier, 2005).

Schubauer-Leoni et al. (2007) reprennent une ingénierie didactique broussaldienne « la course à vingt » et font une analyse comparative entre deux systèmes didactiques S1 et S2 contrastés de par la formation didactique des enseignantes : dans S1, l’enseignante P1 est formée aux enjeux mathématiques et didactiques du jeu ainsi qu’à la théorie des situations didactiques alors que l’enseignante P2 du système S2 ne l’est pas. Ces auteures montrent que dans S2, une situation de preuve n’émerge pas du fait que la phase initiale d’action ne parvient pas à basculer en une phase de formulation, ce qui les amène à conclure que « même dans le cas d’une situation mathématiquement consistante, on peut constater que ses conditions de vie tiennent aux gestes et techniques didactiques qu’active le professeur pour faire exister le jeu. » (p. 20)

La reprise de l’ingénierie du jeu du trésor (Forget & Schubauer-Leoni, 2008 ; Leutenegger & Ligozat, 2010 ; Morales & Sensevy, 2013 ; Quilio & Mercier, 2010 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger & Forget, 2007) met en évidence que le contenu des interactions pouvait être sous couvert d’un apprentissage de mathématiques (énumération) ou sous couvert d’un apprentissage d’un code linguistique et montre l’instabilité de la prise de sens dans les interactions entre les sujets.

L'ingénierie didactique de la soustraction, pour sa part, a été reprise à Marseille dans le cadre d'une recherche par l'IFE 17 (Quilio, Assude & Mercier, 2011 ; Quilio, Morellato & Crumière, 2012). Quilio et al. montrent que les éléments mésogénétiques {boite-cubes} font obstacle à l'avancée du savoir visé : ces auteurs montrent un « enfermement » dans la manipulation du matériel freinant le passage de la vérification empirique à une preuve intellectuelle d'un résultat. Ils montrent par ailleurs une difficulté de lecture de l'ingénierie par l'enseignant qui se manifeste par une non identification des différents statuts de la boite, en particulier dans l'étape 2 de la preuve d'un résultat. C'est dans la veine de la reprise de l'ingénierie broussaldienne de la soustraction que nous nous inscrivons, mais dans notre thèse, sans visée de transformation des pratiques[18].

Nous venons de dresser un bref panorama des recherches s'intéressant à la construction du sens dans l'enseignement des mathématiques au travers de différentes théories. Il ressort de ces travaux la nécessité de relier le sens et la résolution de problème mathématiques. Ce point nous amène vers la deuxième section de cette revue de littérature.

2. Enseignement des mathématiques et résolution de problèmes

La littérature sur la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques est extrêmement importante et diversifiée. Plusieurs domaines scientifiques s'y sont intéressés : la psychologie des apprentissages, les sciences cognitives en général, les approches ethno-mathématiques, etc., pour n'en citer que quelques uns. L'étendue de cette littérature nous a amené à faire le choix d'aborder cette question à travers le prisme des travaux anglo-saxons en enseignement des mathématiques, des travaux de psychologie des apprentissages ainsi que des travaux francophones en didactique des mathématiques, dès lors qu'ils portent sur le domaine de la numération à l'école primaire et plus particulièrement sur le champ additif, car la problématique de son enseignement est au cœur de notre thèse. Une première section aborde la résolution de problème dans le domaine de la numération à l'école primaire au sens large, afin de délimiter à grands traits l'état de la question. La deuxième section se focalise sur la littérature portant sur le champ additif.

---

[17] IFÉ : Institut Français de l'Éducation

[18] Nous revenons sur ce point dans le chapitre sur les méthodes, où nous précisons que les données françaises ont été certes recueillies dans un dispositif de recherche collaborative, mais lors d'un premier essai dans les classes, avant même que ne soient enclenchés les échanges collaboratifs à l'origine des deuxième et troisième essais.

2.1. Brève revue sur la résolution de problèmes dans le domaine numérique au primaire

Dans cette section, nous abordons les thèmes principaux qui ont animé ou qui animent encore les échanges scientifiques dans le domaine de l'enseignement du nombre et de ses opérations.

Un regard sur les différents systèmes éducatifs dans le monde montre que la résolution de problèmes est très présente dans les programmes d'étude en mathématiques. Par ailleurs, de nombreux colloques témoignent de l'intensité des débats autour de la place et de la nature des problèmes dans l'apprentissage des mathématiques : en 2009 la COPIRELEM[19] posait la question « L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème ? », tandis qu'en 2012, le GDM[20] prenait pour thème d'étude « La recherche sur la résolution de problèmes en mathématiques : au-delà d'une compétence, au-delà des constats ». Enfin, plusieurs colloques internationaux tels que ICME[21], ICMI[22], ou encore EMF[23] consacrent des groupes de travail à cette thématique. La liste est loin d'être exhaustive…

2.1.1. Qu'entend-t-on par résolution de problèmes en enseignement des mathématiques ?

Dans l'article « La résolution de problèmes à l'école primaire française : perspective curriculaires et didactique », Coppé et Houdement (2009) retracent l'évolution de la résolution de problèmes dans les programmes scolaires français depuis les années 1945 et montrent que celle-ci a eu une place constante :

> « Après 1945, [les problèmes] ont une fonction utilitariste […] **Placés en fin d'apprentissage**[24], ils ont aussi pour fonction de montrer que les savoirs transmis par l'école ont été appris. 25 ans plus tard, les problèmes acquièrent une nouvelle fonction, celle de **motiver les apprentissages voire de les initier**. De la réforme des Mathématiques Modernes à nos jours, les problèmes confirment leur place **en début du processus d'apprentissage**, où ils devraient permettre non seulement de motiver, mais aussi **d'engager les élèves dans une découverte des notions mathématiques nouvelles**. Simultanément nait un autre mouvement dans les années 1980 : **l'introduction d'ambitions méthodologiques et plus transversales**, avec les situations problèmes, parmi lesquelles les problèmes ouverts » (Coppé, Houdement, 2009, p.11)

[19] Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire
[20] Groupe de didactique des mathématiques au Québec
[21] International Congress on Mathematical Education
[22] International Commission on Mathematical Instruction
[23] Espace Mathématique Francophone
[24] Souligné par nous

Ces auteures notent ainsi une évolution dans le rôle de l'activité de résolution de problèmes et plus particulièrement une diversification de ces activités, ayant donné lieu à un essai de typologie de ces activités de résolution de problèmes.

Nous ne revenons pas dans cette section sur le concept de situation a-didactique que nous avons évoqué précédemment. Rappelons simplement que pour Brousseau, « la notion de situation inclut, étend et diversifie la notion de problème » (cité par Coppé et Houdement, 2009). Brousseau (1998) définit l'enseignement/apprentissage comme « la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. […] Le maître doit effectuer, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution d'un bon problème » (p. 60). Rappelons aussi que, si le concept de situation a-didactique est central dans la théorie, c'est le contrat didactique, c'est-à-dire les règles implicites, qui gèrent les responsabilités des élèves et du professeur dans la prise en charge de l'avancée du savoir. Mais alors, quand peut-on dire qu'un problème est « bon » ? Si les didacticiens ne répondent pas explicitement à cette question, ils émettent toutefois un certain nombre de propositions.

Douady (1994) formule une réponse en terme de conditions : un problème est susceptible d'être « source d'apprentissage » si celui-ci remplit plusieurs conditions :

> - À l'aide de ses connaissances antérieures, un élève peut comprendre l'énoncé
>
> - Avec ses connaissances, l'élève ne peut pas résoudre complètement le problème
>
> - Les objets d'enseignement, ce que l'enseignant veut que les élèves apprennent et retiennent, sont des outils adaptés à la résolution du problème
>
> - Le problème s'exprime dans au moins deux cadres (Douady, 1994, p. 20-21)

Charnay (1992) propose quant à lui une typologie de problèmes permettant d'analyser le processus d'utilisation de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. Il définit ainsi une première catégorie de problèmes visant la construction et la maitrise de notions mathématiques :

- Les problèmes destinés à donner sens à de nouveaux concepts. Placés en début d'apprentissage, ceux-ci sont souvent désignés par le terme de « situations-problèmes »
- Les problèmes pour appliquer ou réinvestir une notion déjà étudiée
- Les problèmes pour élargir le champ d'application d'une notion

- Les problèmes pour lier cette notion à d'autres notions étudiées auparavant
- Les problèmes d'évaluation d'une notion

Une seconde catégorie vise le développement d'attitudes, de méthodes de recherches dans l'activité de résolution de problèmes :

- Les problèmes ouverts, n'induisant pas la méthode, n'orientant pas non plus vers une solution, mais restant toutefois accessibles sur le plan conceptuel aux élèves

Charnay désigne les problèmes ouverts comme « principalement destinés à développer un comportement de recherche et des capacités d'ordre méthodologique : faire et gérer des essais, faire des hypothèses, imaginer des solutions, éprouver leur validité, argumenter,… » (1992, p.79).

2.1.2. Les problèmes visant la construction et la maitrise de connaissances mathématiques

De nombreux travaux de recherche portent sur la thématique de la résolution de problèmes pour initier des apprentissages. Dans l'article « quels problèmes pour quels apprentissages ? Quelques exemples en mathématiques », Valentin, Charnay, Douaire et Guillaume (1993) discutent du rôle de l'activité de résolution de problèmes dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques :

> « de nombreuses connaissances (savoirs, savoir-faire, conceptions, représentations) se construisent et prennent du sens à travers des actions finalisées, c'est-à-dire permettant de résoudre un problème, de répondre à une question, dans une situation que le sujet a pu s'approprier. […] il s'agit de situation (ou d'un ensemble de situations) dans laquelle le sujet peut investir ses connaissances antérieures les plus variées de manière […], mais pour l'élaboration de laquelle ses connaissances sont malgré tout insuffisantes » (Valentin, Charnay, Douaire, & Guillaume, 1993, p. 110)

Pour ces auteurs, c'est par la « démolition/reconstruction », la « recherche d'économie », « l'extension d'un sens d'un concept », « l'expérience » que les connaissances prennent sens pour l'élève.

La recherche en didactique des mathématiques a donné lieu à de multiples travaux sur et pour les pratiques de classes. Ainsi, certaines ressources produites sont destinées directement aux enseignants, pour ne citer que l'importante collection de manuels ERMEL qui fait explicitement référence à la théorie des situations didactiques et des champs conceptuels ainsi qu'à la dialectique outil/objet de Douady, l'ouvrage québécois « L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques » (Theis & Gagnon, 2013) qui se réfère à la didactique des sciences pour définir une situation problème, « le problème devient le moyen même de l'apprentissage, […] la source, le lieu et le critère de l'élaboration du savoir. C'est lui qui va permettre l'engagement de l'élève dans une résolution et qui va catalyser la genèse des instruments intellectuels, dont la construction se révélera nécessaire, chemin faisant » (Astolfi, 1993, p. 313)[25] ou encore, outre la revue Grand N dont en particulier le numéro spécial de la revue Grand N « points de départ » de 2003.

2.1.3. La dimension « méta » dans la résolution de problèmes

Robert et Robinet (1993) proposent de prendre en compte la dimension « méta » dans l'activité de résolution de problèmes. Ces auteurs définissent le méta comme « des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, sur leur apprentissage, qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine en particulier ». Si cette prise de position a provoqué en France une controverse au sein de la communauté des didacticiens[26], l'idée de développer des compétences sur « comment chercher, comment résoudre » a retenu l'attention des institutions d'enseignement. La pratique de « problèmes pour chercher » est alors devenu un objet d'enseignement dans les programmes officiels, en France, mais aussi globalement dans le monde francophone et anglo-saxon (Charnay, 1992 ; Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R., 2016 ; Verschaffel & de Corte, 2005).

De nombreuses recherches ont exploré les potentialités des problèmes "pour chercher". Elles montrent que l'activité de recherche dans la résolution de problèmes peut permettre de :

- développer une « posture scientifique » au travers de savoirs transversaux, tels que l'expérimentation, l'argumentation, la capacité à communiquer ses résultats. (Choquet, 2012 ; Godot, 2006 ; Gravier, Payan & Colliard, 2008 ; Grenier & Payan, 2003 ; Hitt, 2006 ; Hitt & Passero, 2007).

- développer des compétences liées au raisonnement, à la pertinence de démarches de résolution, à la conjecture, à l'activité de modélisation (Gibel, 2008, 2015 ; Rauscher, 2001, 2006 ; Verschaffel & De Corte, 2005)

[25] Cité par Theis et Gagnon, p. 5

[26] Sarrazy (1997) soutient, en s'appuyant sur une expérience auprès de 14 classes du primaire, que même si des compétences « méta » sont ou semblent acquises, il n'est pas sûr que les élèves sachent les réutiliser dans d'autres contextes de résolution de problèmes.

- développer des apprentissages liés à la validation d'une conjecture (Douaire & Hubert, 1999 ; Georget, 2012 ; Hersant, 2006, 2008, 2012 ; Houdement, 2009 ; Houdement & Coppé, 2002 ; Thomas, 2007)

- de mettre en réseau des connaissances (Priolet, 2014 ; Houdement, 2017)

2.1.4. Le rôle du contexte dans la résolution de problèmes mathématiques en classe

De nombreux travaux de recherche depuis la fin des années 80 se sont inscrits dans la « perspective située » qui s'intéresse aux relations entre cognition, activité et situation. En enseignement des mathématiques, ces travaux ont été initialement et principalement développés aux États-Unis (Cobb, Wood & Yackel, 1993 ; Cobb, Perlwits & Underwood, 1994 ; Greeno, 1991, etc. pour n'en citer que quelques uns). Ces auteurs mettent en évidence au sein de la classe le rôle des interactions mathématiques en contexte, les effets du fonctionnement de « communautés de pratiques mathématiques », les dimensions collectives des modalités de résolution de problèmes mathématiques. Le rôle structurant des ressources sociales et matérielles est ainsi souligné. Pour ces chercheurs, l'activité mathématique de résolution de problèmes s'opère en étroite relation avec la situation, sa finalité, ses dimensions contextuelles et interactionnelles.

Dans l'espace francophone, la question de la « micro-culture de classe » en mathématiques a été plus particulièrement travaillée par Mottier Lopez (2003, 2006, 2008). Ses travaux ont montré que la résolution de problèmes relève de la négociation du sens et des significations lors d'activités mathématiques en classe. « La microculture de classe se constitue et se renégocie au cours des interactions continues entre l'enseignant et les élèves dans un contexte institutionnel donné, tout en reconnaissant le rôle important du guidage joué par l'enseignant. » (Définition de Cobb, et al. 1993, citée par Mottier Lopez, Allal, 2004, p.66). L'approche de cette auteure, qui s'intéresse plus particulièrement au champ additif et multiplicatif, montre que dans la micro-culture de classe les interventions des différents enseignants, notamment les évaluations formatives interactives qu'ils produisent au cours des échanges en classe facilitent la construction du sens par la résolution de problèmes mathématiques au sein de collectif d'élèves. (Mottier Lopez, 2008). Cette approche située des interactions en classe traite de questions d'enseignement des mathématiques qui ne sont pas sans point de convergence avec l'approche de l'action conjointe du professeur et des élèves que nous présenterons dans le chapitre suivant.

Enfin, dans une perspective proche, mais plus fortement marquée par l'école historico-culturelle de Vigotsky, il convient aussi de citer les travaux de Radford (2011) sur le rôle des contextes d'apprentissage en classe et leurs soubassements culturel et social. Pour cet auteur, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ne peut être saisi à travers une approche mentaliste, mais, doit spécifiquement prendre en compte les moyens sémiotiques d'objectivation utilisés par les élèves en contexte pour résoudre les problèmes mathématiques en situation d'interaction intégrant le langage, les gestes, les artefacts présents mis à disposition par l'enseignant.

Ce panorama des recherches sur la résolution de problèmes dans le domaine numérique au primaire nous amène maintenant à resserrer plus particulièrement notre propos sur les travaux relatif au champ additif.

2.2. La résolution de problèmes dans le champ additif

Le domaine de la résolution de problèmes additifs a été largement étudié en didactique des mathématiques et en psychologie des apprentissages des mathématiques, notamment dans le monde anglo-saxon avec les traditions de recherche de « Mathematics Education ». Dans les sections qui suivent, nous restreignons notre propos aux principaux travaux relevant du système de numération occidental, nous nous situons dans le système de numération occidental, c'est-à-dire dans un système de position à base 10 : ce système est composé de dix chiffres n'ayant pas la même signification selon leur position dans le nombre. Des recherches portant sur d'autres systèmes de numération ont été étudiées (Chemla & Shuchun, 2004 ; Clanché & Sarrazy, 2002 ; Ginsburg, 1982 ; Guedj & Truffault, 1996 ; Ifrah, 1994 ; Lemaitre, 1985 etc.), nous n'en ferons pas état dans cette revue.

Deux grandes questions orientent les recherches : le raisonnement sur les quantités, le raisonnement sur les opérations.

2.2.1. Raisonnement sur les quantités

Dans l'ouvrage « Les chemin du nombres » (Bideaud, Meljac & Fisher, 1991), Fayol relève que les travaux de recherche pointent deux catégories de facteurs impactant sur les difficultés des élèves en résolution de problèmes additifs : la dimension conceptuelle - sémantique et la dimension linguistique - rhétorique.

2.2.1.1. La dimension conceptuelle-sémantique

2.2.1.1.1. Approches taxonomiques des problèmes dans le champ additif

Les recherches relatives à la résolution de problèmes dans le champ additif font apparaître que les opérations addition *vs* soustraction ne suffisent pas à rendre compte des difficultés de résolution des élèves (Bilsky & Judd, 1986).

Les chercheurs en psychologie cognitive des mathématiques ont élaboré une première taxonomie des problèmes ne reposant ni sur les calculs numériques, ni sur le formalisme mathématique, mais relevant des caractéristiques sémantiques des situations. Cette première taxonomie repose sur les taux de réussite à des problèmes mettant en jeu la même « équation », mais dans des situations différentes (Carpenter & Moser, 1982, 1983, 1984 ; Carpenter, Hiebert & Moser,1981 ; Riley, Greeno & Heller, 1983). Cette taxonomie distingue trois catégories de problèmes :

- La catégorie « Change » porte sur des situations de transformation d'une collection : « Joe had 3 marbles. Then, Tom gave him 5 more marbles. How many marbles does Joe have now? » Dans cette catégorie de problèmes, la transformation de la collection de billes peut être positive ou négative. La question peut porter sur l'état initial de la collection, la transformation, ou son état final.
- La catégorie « Combine » porte sur des situations de combinaison de deux quantités : « Joe has 3 marbles. Tom has 5 marbles. How many marbles do they have together? » Dans cette catégorie, la question peut porter sur le tout ou sur une des parties.
- La catégorie « Compare » porte sur des situations de relation de comparaison de deux quantités engageant une comparaison par l'utilisation de termes tels « *plus que* » « *moins que* » : « Joe has 3 marbles. Tom has 5 more marbles than Joe. How many marbles does Tome have? ». Dans cette catégorie, la question peut aussi porter sur la relation de comparaison.

Vergnaud suggère de différencier le « calcul numérique » (c'est-à-dire les opérations d'additions, de soustraction de multiplication et de division) du « calcul relationnel » (c'est-à-dire les opérations de pensées nécessaires à la gestion des relations contenues dans le problème). Par ailleurs, il prend en compte la dimension temporelle (les transformations s'inscrivent dans le temps), de la dimension actionnelle (situation statique ou dynamique) ainsi que des grandeurs (les problèmes ne traitent pas de nombres éthérés, mais de diverses grandeurs).

Reprenant la taxinomie de Carpenter et Moser, Vergnaud et Durand (1976) et Vergnaud (1982) l'étendent en définissant des catégories portant sur des combinaisons de transformation et/ou de relations.

- problèmes de combinaison de transformation (par exemple, le matin Pierre a gagné 8 billes, et l'après midi, il en a perdu 12. Que s'est-il passé dans la journée ?)
- problèmes de combinaison de relations (par exemple, Pierre a 5 billes de plus que Rémi et Rémi a 3 billes de moins que Léa. Combien Pierre a t-il de billes de plus ou de moins que Léa ? ou bien Pierre doit payer 15 € ses achats. Il donne un billet de 20 € au vendeur. Combien doit-on lui rendre ?)
- problèmes de transformation d'une relation (par exemples, ou encore Pierre doit 20 € à Rémi. Il lui donne 15 €, combien lui doit-il encore ?)

Nous présentons ci-après les catégories de problèmes[27] du champ additif telle que présentées par Vergnaud :

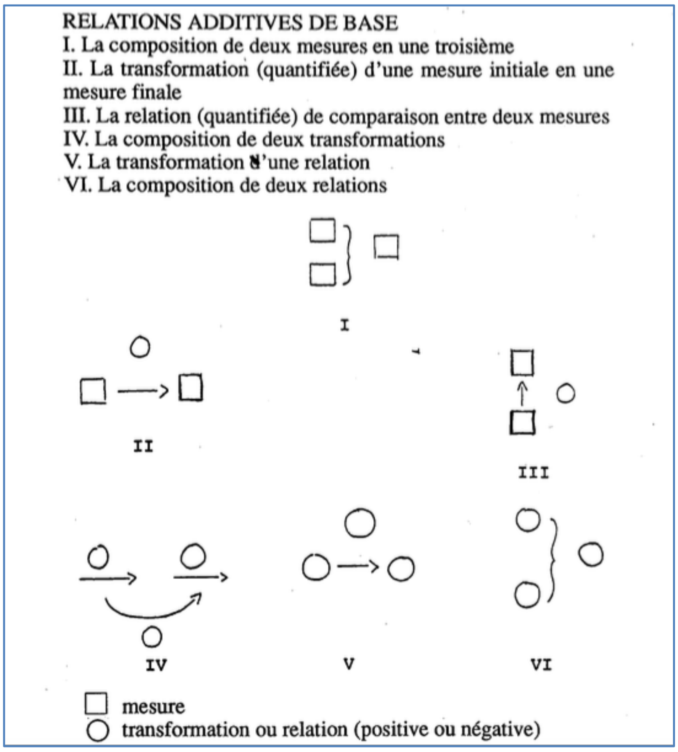


Figure 1 : relations additives de base (Vergnaud, 1990, p. 152)

A l'intérieur de chacune des catégories de problèmes, Vergnaud distingue différentes classes de problèmes, selon que la question porte sur l'état initial, final, la transformation etc.

[27] Précision sur le formalisme dans la thèse : nous adoptons la notation e t- E pour désigner un problème appartenant à la catégorie transformation d'états. Il s'agit ici de déterminer l'état final d'une collection dont on connaît l'état initial et la transformation ; la notation e E e pour problème appartenant à la catégorie composition d'états. Il s'agit ici de déterminer un état connaissant deux états ; la notation e e | C pour problème appartenant à la catégorie comparaison d'états. (Vergnaud, 1990)

Ces classes de problèmes sont de difficultés différentes selon le « calcul relationnel » (Brun, 1990) amenant à la solution.

Cette taxonomie a donné lieu à de nombreux travaux de recherche, se focalisant sur la performance et les stratégies de résolution, mesurant les taux de réussites des élèves selon les catégories de problèmes et classes de problèmes.

2.2.1.1.2. Performance selon les catégories de problèmes additifs

Nombreuses sont les recherches se rapportant à la performance des élèves selon les catégories de problèmes proposés. Elles s'accordent sur le fait que la performance des élèves est fortement liée aux caractéristiques sémantiques des situations (Carpenter, 1985 ; Carpenter & Moser 1982, 1983 ; De Corte & Verschaffel, 1985, 1987 ; Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Vergnaud, 1979, 1982 ; Stern & Lenrndorfer, 1992 ; Verschaffel, De Corte & Pauwels, 1992 ; Stern, 1992).

Ces chercheurs ont établi une hiérarchie de complexité en fonction des catégories de problèmes, et des classes de problèmes à l'intérieur des différentes catégories.

- Dans une situation de transformation, il est plus facile de chercher la valeur de l'état final que de rechercher celle de l'état initial
- Dans une situation de combinaison, il est plus facile de chercher la valeur du tout que de rechercher la valeur d'une des parties
- Les problèmes de comparaison sont les problèmes les plus difficiles, en particulier s'ils portent sur la recherche de la référence.

Pour autant, ces chercheurs développent des points de vue différents sur ce qui oriente les stratégies de résolution mises en œuvre par les élèves.

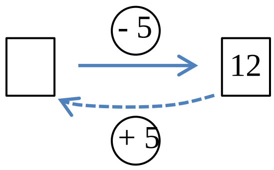
Certains convergent vers le fait que c'est la structure du problème (transformation, combinaison, comparaison) qui oriente les stratégies de résolution des élèves (Carpenter, 1985 ; Carpenter & Moser 1982, 1983 ; Ahscraft & Battaglia, 1978 ; Ahscraft & Fierman, 1982 ; Baroody, Ginsburg & Waxman, 1983 ; Baroody, A. J., Berent, R. & Packman, D., 1982 ; De Corte & Verschaffel, 1987). Ces chercheurs se rejoignent sur plusieurs points :

- D'abord, sur une pluralité de procédures de résolution tant pour des problèmes d'additions ou des problèmes de soustractions : résolution empirique, en réunissant ou séparant, puis en dénombrant ; sur-comptage à partir du premier cardinal fourni par le problème, sur-comptage à partir du cardinal le plus grand ; comptage à rebours ; mise en correspondance terme à terme, faits numériques mémorisés etc.

- Ensuite, sur une forte corrélation entre certaines catégories de problèmes et certaines procédures. Par exemple, Carpenter (1985) montre que les problèmes de transformation négative avec recherche de l'état final (et-E) sont le plus souvent résolus en effectuant une séparation « physique », alors que pour les problèmes de comparaison (« combien a t-il de plus ? »), c'est la correspondance terme à terme qui l'emporte.

- Enfin, sur une progressivité des procédures de résolution : si les élèves de CP effectuent les opérations par comptage en simulant les actions décrites dans les problèmes (Groen & Parkman, 1972), c'est au CE2 que les élèves procèdent par « récupération en mémoire de faits numériques »[28] (Ashcraft & Battaglia, 1978 ; Ashcraft & Fierman, 1982).

D'autres, notamment dans la tradition francophone, considèrent que c'est le calcul relationnel qui oriente les stratégies de résolutions des élèves. Se référant à Vergnaud (1982), Brun (1990) écrit « la clé de voûte des catégories de relations additives est la distinction entre États et Transformations ». Par exemple, dans le problème « Pierre a perdu 5 billes à la récréation. Il en a maintenant 12. Combien en avait-il avant la récréation ? » 12 billes mesure l'état de la collection de billes de Pierre après la récréation alors que 5 billes désigne une transformation négative de l'état de la collection avant la récréation ». Cette distinction renvoie à celle de nombre-mesure et nombre-transformation et donc au calcul relationnel, c'est-à-dire aux « opérations de pensée nécessaires pour effectuer les mises en relations pertinentes et utiliser les procédures adéquates » (*Ibid*.). Par exemple, le calcul relationnel du problème que nous venons de citer peut être représenté par le schéma suivant :



Ce serait donc par le calcul relationnel, c'est-à-dire par les « opérations de pensées » (Vergnaud, 1990, p. 160) que l'élève structure et se représente les problèmes.

Alors que les travaux de Vergnaud et Durand (1976) développent, à partir d'observation *in situ*, des modèles théoriques amenant à définir les notions de nombres-états et de nombres-transformations puis à déduire une hiérarchie de complexité des problèmes à partir des traitements effectués par les élèves, d'autres recherches portent sur le fonctionnement de l'élève en résolution de problèmes.

[28] La mémorisation de l'association "opérandes et résultats" est appelée fait numérique. Par exemple, 2 + 3 = 5

2.2.1.1.3. Fonctionnement de l'élève en résolution de problèmes additifs

Une troisième perspective de travaux s'intéresse à la manière dont les élèves construisent ces notions de nombres-états et de nombres-transformations en situation de classe.

Ces recherches s'intéressent aux processus de compréhension et de construction d'une représentation de problèmes : quels sont les schémas de représentation des problèmes effectivement activés par des élèves ? (Richard, 1984 ; Escarabajal, 1984,1988 ; Baffret-Dumont, 1996 ; Weisser, 1999). Pour Escarbajal, il s'agit d'un glissement de sens inter-catégoriel : les élèves (CM1/CM2) inscrivent les problèmes de catégorie TTT dans un schéma temporel, montrant ainsi que cette catégorie est perçue comme une action, ce qui est la marque d'un glissement vers une autre catégorie de problèmes, celle des transformations. Baffret-Dumont (1996) met en regard la « structure proposé » dans l'énoncé et la « structure effective », c'est-à-dire la structure observée dans la démarche de l'élève. Comme Escarbajal, elle observe des glissements de sens. Par contre, elle note que ces glissements de sens sont nettement plus fréquents à l'intérieur même des catégories qu'entre les catégories, ce qu'elle interprète comme une adaptation par l'élève du problème à ses schémas antérieurs connus.

Comme s'opèrent les « glissements de sens » dans les résolutions des élèves (Conne, 1979 ; Vergnaud, 1990) ? Relativement à la construction de la notion de nombre-transformation, Conne (1985) met en lumière une progressivité : (i) la reconnaissance du signe de la transformation, (ii) la reconnaissance de la transformation comme d'un opérateur, (iii) la reconnaissance du signe de la transformation et de son intensité. Par ailleurs, l'auteur montre que les problèmes appartenant à la catégorie « composition de transformations » sont plus difficiles : les élèves appliquent le schéma des transformations d'états, inversent l'ordre des données ou présupposent des hypothèses sur l'état initial.

Pour autant, les recherches ont montré que les dimensions conceptuelles ou sémantiques ne suffisaient pas à expliquer les difficultés des élèves. La dimension linguistique et rhétorique est elle aussi à prendre en compte.

2.2.1.2. La dimension linguistique et rhétorique des problèmes

Les recherches conduites à propos de l'enseignement des mathématiques, montrent que la formulation des énoncés des problèmes influe sur la réussite des élèves (Cummins, 1991 ; Cummins et al., 1988 ; Davis-Dorsey, Ross & Morrison, 1991 ; Hudson, 1983 ; Kilpatrick, 1987 ; Reusser, 1989, 1990).

Principalement, ces travaux ont cherché à déterminer en quoi l'ordre d'introduction des informations dans le problème et/ou le rôle de certains éléments lexicaux pouvaient en gêner/améliorer la compréhension et reconnaissance des problèmes.

2.2.1.2.1. Impact du lexique : dimension linguistique

Plusieurs recherches attestent que certaines erreurs des élèves relèvent d'une difficulté à comprendre un langage abstrait ou ambigu que d'un accès aux connaissances mathématiques. Le rôle de certains éléments lexicaux dans les difficultés des élèves, et principalement celui traduisant des comparaisons, a beaucoup retenu l'attention des chercheurs (Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer, 1988 ; De Corte & Vershaffel, 1985, 1987 ; De Corte, Vershaffel & De Win, 1985 ; Donaldson, 1978 ; Stern, 1992, 1993).

Plusieurs recherches mettent en évidence que les termes ou expressions relationnels tels que « plus que », « moins que » sont interprétés par les élèves comme des termes non relationnels : par exemple « Pierre a 5 billes. Jean a 2 billes de plus » est compris comme « Pierre a 5 billes. Jean a 2 billes » (Hudson, 1983 ; Riley et al., 1983 ; De Corte et al., 1985 ; Cummins et al., 1988 ; De Corte & Vershaffel, 1985,1987 ; De Blois 1997). Cette interprétation a pour effet d'induire un glissement catégoriel du problème de la comparaison vers la combinaison.

Reprenant les travaux de Carpenter et Moser (1982, 1983, 1984), De Corte et Verschaffel (1985, 1987), de Riley, Greeno et Heller (1983), Stern (1993) montre que les difficultés de résolution des problèmes de transformation avec recherche de l'état initial n'est pas seulement due à la complexité de la tâche, mais à une incompréhension du caractère symétrique d'expressions telles que « X a 5… de plus que Y » et « Y a 5… de moins que X ». Pour des élèves de première et seconde année du primaire, ces deux expressions semblent indépendantes et non symétriques. Stern fait l'hypothèse qu'une règle telle que « si une phrase contient le mot "plus de" et une autre le mot "moins de", ces deux phrases ne peuvent avoir le même sens » ralentit la construction du schéma relationnel de cette catégorie de problèmes. Un autre terme ayant été relevé par plusieurs chercheurs est l'adverbe « ensemble » (Hudson, 1983 ; De Corte et al., 1985 ; Cummins et al., 1988). Ces auteurs montrent que celui-ci est confondu avec « chacun » ce qui modifie complètement la perception en « parties-tout » de la catégorie combinaison.

D'autres recherches se sont penchées sur l'impact que certains mots ou expressions employés à contre emploi pouvaient avoir sur la représentation du problème, comme par exemple, perdre associé à une addition, ou les locutions adverbiales « en plus », « en tout » associées à une soustraction (Ehrlich, 1990 ; Weisser, 1999). Weisser montre que leur impact est relativement réduit, au regard d'autres traits tels l'ordonnancement de l'énoncé, la complexité des phrases, la taille des variables numériques.

Pour conclure, l'ensemble de ces recherches montre que les termes lexicaux, en particuliers ceux exprimant des relations, ont une forte incidence sur la représentation des problèmes, et donc dans l'élaboration du calcul relationnel.

2.2.1.2.2. Impact de la chronologie : dimension rhétorique

Si le lexique impacte la construction de la représentation des problèmes additifs, la configuration rhétorique des énoncés de problèmes a elle aussi son importance : l'ordre de présentations des données dans l'énoncé, la reformulation et la réorganisation induite des segment du problème, la place de la question influent sur les réponses des élèves.

- La présentation des éléments de l'énoncé dans l'ordre temporel influe sur la résolution des problèmes. Dans l'article « la résolution de problèmes arithmétiques, bilan et perspectives », Brun (1990) rapporte une recherche de Bovet (1978) faisant varier les énoncés d'une même classe (catégorie des transformations avec recherche de l'état initial). Aucun des énoncés ne comportait d'adverbe de temps, seuls l'ordre chronologique et le temps des verbes variaient. Les résultats de cette recherche rejoignent ceux de plusieurs autres : les problèmes introduisant les évènements en suivant l'ordre chronologique de leur occurrence présentent moins d'erreurs que ceux dans lequel l'ordre est modifié (De Corte, Verschaffel & De Win, 1985 ; De Corte & Verschaffel, 1987 ; Fayol & Abdi, 1986 ; Gombert & Fayol, 1988).

- Les recherches portant sur la reformulation des problèmes verbaux confortent celles que nous venons de citer (Hudson, 1983 ; Dellarosa-Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer, 1988). Si la reformulation des problèmes verbaux conserve la structure sémantique et mathématique des problèmes initiaux, elles réorganisent les segments du problème et rendent plus explicites les relations sémantiques entre les données du problème. De Corte et al. (1985) soutiennent que cette reformulation des problèmes compense des schémas sémantiques moins bien reconnus par des élèves de 1ère et 2ème année, et aident à une représentation mentale appropriée des situations.

- Nombreuses sont les recherches montrant l'influence du placement de la question sur le score de réussite (Kieras, 1980 ; Fayol & Abdi, 1986 ; Fayol, Abdi & Gombert, 1987 ; Fayol, 1990, 1991 ; De Corte et al., 1990 ; Devidal, Fayol & Barrouillet, 1997 ; Coquin-Viennot, 1998, 2001). Les résultats font apparaître que placer la question en tête augmente la performance, et de manière plus nette si le problème est plus complexe. Placer la question en tête de l’énoncé permet d’identifier la situation problème et d’utiliser les données numériques aux cours de la lecture du problème. Fayol et al. (1986, 1987) notent que pour des problèmes de transformation avec recherche de l’état initial, problèmes repérés comme complexes, l’emplacement de la question amène à des changements de procédures. Lorsque la question est en fin d’énoncé, ceux-ci sont souvent traités comme s’il s’agissait de rechercher l’état final. Par contre, lorsqu’elle est en début d’énoncé, le score de réussite est grandement amélioré. Ces auteurs interprètent ces phénomènes en terme de mémoire de travail et de mémoire à long terme : dans le premier cas, la procédure fonctionne en « bottom-up », ce qui induit une surcharge de la mémoire de travail, tandis que dans le second cas, la procédure fonctionne en « top-down », activant des schémas sémantiques déjà disponibles en mémoire à long terme. Coquin-Viennot (2001) module ces résultats en montrant que ceux-ci ne sont vrais que si la question coïncide avec une « question attendue ». Par question attendue, elle entend la question inférée à partir de toutes les données de l’énoncé, répondant à une règle implicite « il faut utiliser toutes les informations numériques pour répondre à la question ». Si la question est au contraire inattendue, c’est-à-dire ne prenant pas en compte l’ensemble des données numériques du problème, cette chercheure constate que les taux de réussite demeurent identiques quelle que soit la place de la question. Elle explique ce phénomène par « l’existence d’une conception partiellement erronée du problème arithmétique en général, construite au cours de sa scolarité ».

Les chercheurs en didactique des mathématiques ont repris cette question de recherche, testant en situation de classe, ce qui a été appelé dans la littérature « problèmes impossibles » ou encore « problèmes absurdes ». Bien qu’obtenant des réponses similaires, ils proposent, en s’appuyant sur le concept broussaldien de contrat didactique, une autre analyse de ce phénomène (Brissiaud, 1988 ; Chevallard, 1988 ; D’Amore & Sandri, 1998 ; Mercier, 1980 ; Sarrazy, 1997 ; Schubauer-Leoni & Ntamakiliro, 1994). Brissiaud (1988) soutient, d’un point de vue de psychologue, que la difficulté est reconnue par les élèves comme une anomalie de l’énoncé, mais que ceux-ci sont incapables de le rejeter, préférant avancer une réponse « plutôt que de remettre en cause la validité provenant d’un adulte qui, d’ordinaire ne propose pas une tâche impossible » (p. 30). Les didacticiens, pour leur part, proposent une explication en terme de contrat didactique (Brousseau, 1990). Pour ces chercheurs, deux logiques co-existent : l’une relevant du « bon sens » et remettant en cause la légitimité de la question, l’autre relevant du contrat didactique et conduisant à proposer une réponse. Chevallard (1988), précise que seule la deuxième prend place dans l’interaction didactique, la tâche de l’élève n’étant habituellement pas d’interroger la justesse des énoncés.

2.2.2. Raisonnement sur les opérations

Dans cette section, nous faisons état des recherches sur les algorithmes opératoires de l'addition et de la soustraction. Nous avons relevés deux versants de recherche, l'un portant sur les stratégies opératoires (mentales ou écrites) des élèves pour effectuer un calcul engageant une soustraction, l'autre sur les erreurs algorithmiques lors de l'effectuation d'une soustraction par un algorithme.

2.2.2.1. Des recherches sur les stratégies opératoires des élèves

Depuis les années 80, de nombreuses recherches ont porté sur les procédures des élèves pour effectuer une addition ou une soustraction de nombres entiers à plusieurs chiffres. (Citons notamment : Baroody, 2003 ; Barrouillet, Mignon & Thevenot, 2008 ; Kilpatrick, Swafford & Findell 2001 ; Selter, 2001 ; Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2009 ; Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006 ; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007 ; etc.)

Une série de travaux ont porté sur les stratégies opératoires utilisées par les élèves pour effectuer des additions et des soustractions. Deux types de stratégies opératoires ont pu être observées : (i) les stratégies par soustraction directe pour lesquelles on soustrait le second terme au premier terme ; (ii) les stratégies par recherche du complément pour lesquelles le résultat de la soustraction est le nombre que l'on ajoute au second terme pour obtenir le premier terme.

- La soustraction directe : le résultat est obtenu en soustrayant le second terme au premier terme

Une première procédure observée est la décomposition des termes de l'opération en unités dizaines centaines puis recombinaison du résultat, appelée dans la littérature anglo-saxonne « split method », « decomposition method », « partitioning method », ou encore « combining-units-separately method » (Fuson, 1992 ; Fuson, Wearne, Hiebert, Murray et al., 1997 ; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012 ; Selter, 1998 ; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2006) :

> Ainsi, pour effectuer l'opération 86 – 25, l'élève effectue 80 – 20 = 60 et 6 – 5 = 1. La réponse est ensuite recomposée 60 + 1 = 61.

Une seconde procédure, appelée alors « the jump method » ou « sequential method », ou encore « begin-with-one-number method », consiste à ne décomposer en centaines, dizaines et unités que le second terme, et ensuite effectuer des soustractions successives,

> Ainsi par exemple, pour effectuer l'opération 86 – 25, l'élève effectue 86 – 20 = 66 puis 66 – 5 = 61.

Certaines recherches (Fuson et al, 1997 ; Torbeyns et al., 2006) relèvent une troisième procédure :

> 86 – 25 = 85 – 25 + 1 = 61

Un grand nombre des recherches a porté sur ces deux procédures, se centrant essentiellement sur l'efficacité (tant du point de vue de l'exactitude que de la rapidité) des élèves à les utiliser (Fuson, 1992 ; Klein, Beishuizen & Treffers, 1998 ; Fuson et al., 1997 ; Klein et al., 1998 ; Selter, 1998 ; Torbeyns et al., 2006).

- La soustraction par addition : le résultat de la soustraction est obtenu en recherchant le nombre à ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand

D'autres procédures observées portent sur la recherche du résultat d'une soustraction par une addition (Barrody, 2003 ; Blöte, van der Burg & Klein, 2001 ; Brissiaud, 1994, De Corte & Verschaffel, 1987 ; Fuson, 1982 ; Fuson & Fuson, 1992 ; Fuson & Willis, 1988 ; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012 ; Selter, 2001, Torbeyns, De Smedt, Stassens, Gesquière, & Verschaffel, 2009 ; Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwen, & Van Dooren, 2007 ; Verschaffel, Bryant & Torbeyns, 2012)

> Ainsi par exemple, pour calculer 83 – 62, on peut effectuer 62 + 20 = 82 et 82 + 1 = 83. La réponse est alors 20 + 1 = 21

Différents noms ont été donnés pour décrire cette procédure, « short jump strategy » (Blöte et al, 2001), « working forward » (Brissiaud, 1994), « adding-up or completion strategy » (Selter, 2001), « indirect addition strategy » (Torbeyns et al., 2009).

Quelles procédures, et sous quelles conditions, les élèves utilisent-ils pour effectuer une soustraction de type a – b ? Quand et comment font-ils le choix d'effectuer une « soustraction directe » ou une « addition indirecte » ?

Ces questions ont fait l'objet d'un nombre important de recherches. (Baroody, 2003 ; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998 ; De Corte & Verschaffel, 1981 ; De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010 ; Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2009 ; Verschaffel, Torbeyn, De Smedt, Luwel, & Van Dooren, 2007 ; Torbeyns, Peters, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2016). Elles montrent que sur des soustractions engageant des nombres à un chiffre, les élèves utilisent indifféremment les deux procédures (Woods et al., 1975). Pour autant, des recherches ultérieures montrent que ce n'est plus le cas dès que la taille des nombres est plus importante. Torbeyns et al. (2009) notent que les élèves d'école primaire utilisent rarement la procédure d'addition indirecte sur des soustractions à deux chiffres[29], optant principalement pour des stratégies de soustractions directes (« jump method »). Peters et al. (2012) montrent que le format de présentation de la soustraction (a – b = • ou b + • = a) influe sur le choix de la procédure.

Plusieurs interprétations sont avancées par ces auteurs :

- une première réside dans la difficulté à conceptualiser la relation inverse entre l'addition et la soustraction, c'est-à-dire « si a – b = c alors b + c = a ». (Baroody, 2003 ; Baroody, Torbeyns & Verschaffel, 2009 ; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2012 ; Torbeyns et al., 2009 ; Torbeyns, et al., 2016). Un volume de la revue Educational Studies in Mathematics (2012, Volume 79/3), est consacré à la difficulté des élèves à comprendre le « principe inverse ». Ces auteurs font remarquer que les élèves peuvent avoir acquis des compétences procédurales en résolution de problèmes verbaux utilisant la soustraction directe ou l'addition indirecte, sans pour autant avoir conceptualisé la relation d'équivalence entre l'addition et la soustraction. Ainsi, beaucoup d'élèves ne s'aperçoivent pas que 61 – 48 + 48 = 61 et que la différence 61 – 59 peut être trouvée en effectuant 59 + 2 = 61.

- une deuxième hypothèse relèverait de l'enseignement reçu par les élèves : l'introduction de la soustraction par des situations de « taking away » amenant les élèves à associer trop fortement le signe « – » à une situation de retrait par les élèves.

- enfin, certains chercheurs avancent l'idée de normes et de pratiques de classes pour expliquer la faible utilisation de l'addition pour effectuer un calcul soustractif : les enseignants valoriseraient la rapidité et l'exactitude, et donc la maitrise d'une routine, aux dépens d'autres procédures.

2.2.2.2. Des recherches sur les erreurs d'ordre algorithmique des élèves

L'observation des difficultés des élèves à apprendre des algorithmes opératoires a provoqué une recherche importante sur leur enseignement/apprentissage. Nous n'avons pas l'ambition de faire ici une revue de littérature exhaustive, le nombre de travaux sur ce sujet étant extrêmement important.

Plusieurs auteurs ont pointé les erreurs ou difficultés des élèves lorsqu'ils effectuent selon les algorithmes de calculs « traditionnels » [30] d'addition ou de soustraction, y compris

[29] Dans un souci d'alléger l'écriture, nous utiliserons l'expression « soustraction à deux chiffres » pour exprimer « soustraction engageant des nombres à deux chiffres »

dans le cadre de dispositif d'aide à des élèves en difficulté (Arsenault & Lemoyne, 2000 ; Bednarz & Janvier, 1984a, 1984 b ; Brown & Van Lehn, 1982 ; Brun & Conne, 1993 ; Brown & Burton, 1978 ; Carpenter & Moser, 1984 ; Coulange & Grugeon, 2008 ; Liraud & Roditi, 2016 ; Resnick, 1982 ; Rinaldi, 2016 ; Sackur, Maurel, Drouhard, Perriollat & Ciaravola, 2010 ; Van Lehn, 1990 ; etc.). Sans s'opposer, les résultats mettent en exergue plusieurs raisons à ces difficultés.

- des schèmes en construction plutôt que des difficultés

Les études de Brown, Burton et Van Lehn (Brown & Van Lehn, 1980,1982 ; Brown, Burton, 1978 ; Resnick, 1982 ; Van Lehn, 1990) ont développé une théorie (« repair theory ») modélisant les erreurs dans les calculs algorithmiques des élèves. Ces chercheurs ont montré que celles-ci sont particulièrement organisées : les élèves surmontent une difficulté de nature algorithmique en « inventant » une procédure personnelle. Nous reprenons quelques erreurs citées par Brown et Van Lehn (1982) :

226 – 38 = 212 ou bien 200 – 35 = 200 ou bien encore 407 – 8 = 499

Selon ces auteurs, un possible discours accompagnant le premier calcul pourrait être « 8 moins 6, ça fait 2 ; 3 moins 2, ça fait 1 donc le résultat est 212. ». Le résultat du deuxième calcul s'appuierait sur le fait que tout nombre moins zéro égal à ce même nombre tandis que pour le troisième calcul, l'élève prendrait en compte l'emprunt d'un dizaine (17 – 8 = 9), mais ne prendrait pas en compte l'emprunt d'une centaine.

Pour Brun et al. (1993, 1994), Portugais (1992, 1995) ainsi que pour Vergnaud (1991), ces « inventions » sont le fruit d'un ensemble de connaissances plus ou moins bien maitrisées et coordonnées, mais témoignant de formes transitoires d'un schème en élaboration. Lors de leur communication au colloque « Vingt ans de la didactique des mathématiques en France », Brun et al. (1994) soutiennent que repenser les erreurs des élèves « en terme de traces de la construction progressive d'un schème-algorithme permet d'intégrer dans une même perspective théorique les constats sur le caractère organisé des conduites erronées avec la fonctionnalité de la dynamique assimilation/accommodation à l'œuvre dans les schèmes. » (p. 1). En d'autres termes, c'est une dynamique d'adaptation de connaissances que révèlent ces erreurs. Cette prise de position a donné lieu à de nombreux travaux de recherche (en particulier celles de Brun & Conne, 1991, 1993 ; Brun, Conne, Lemoyne, & Portugais, 1994 ; Normandeau, 2010 ; Vergnaud, 1985, 1990)

[30] Nous entendons par traditionnels les algorithmes de l'addition et de la soustraction enseignés habituellement dans les classes, c'est-à-dire pour la soustraction, l'algorithme par conversion ou par emprunt où l'on « casse les dizaines » ou l'algorithme par conservation des écarts.

- des recherches portant sur la recherche de solution à ces difficultés

D'autres recherches relient les erreurs des élèves à des difficultés dans la compréhension du système de numération (Bednarz & Janvier, 1984 b ; Fuson, 1985, 1986 ; Fuson & Briars, 1990 ; Jonaert, 1993). Ces auteurs montrent qu'elles se manifestent dans la construction même dans sa représentation dans un système décimal ou dans bien encore dans son écriture chiffrée, ce qui conduirait à une absence de lien entre le système de numération décimal et les règles algorithmiques. Elles suggèrent l'utilisation conjointe d'un matériel de numération (cubes, buchettes, boites) et du codage du nombre pour aider les élèves à comprendre un algorithme opératoire. Pour autant, ainsi que le précisent Nunes, Vargas-Dorneles, Lin et Raghtgeb-Schnierer (2016), l'objet de ces recherches ne portaient pas sur la relation entre les nombres et les quantités ce qui, du coup, ne traitait pas de l'absurdité d'un calcul tel que 407 – 8 = 499. Notons toutefois que Brousseau critique l'utilisation de ce matériel de numération (cubes, buchettes, etc.…). Il désigne par effet « Diénes », ce qu'il considère comme une croyance de l'enseignant qui consiste à déplacer la résolution de ces opératoires (par exemple la soustraction ci-dessus) sur un terrain manipulatoire., ce qui consiste à interpréter sa réussite (celle de l'élève) comme une preuve suffisante de la construction d'un savoir. Pointons ici que l'on retrouve ici la question du sens de l'algorithme.

Maurel et al. (2010) formulent, pour leur part, les mêmes hypothèses liées à la compréhension du système de numération, mais à la différence des auteurs cités en début de paragraphe, ils proposent un dispositif de remédiation différent reposant sur la notion de « connaissance locale »[31] (Léonard & Sackur, 1991) pour accéder aux erreurs des élèves : ces chercheurs ont élaboré un dispositif permettant aux élèves d'utiliser et de dévoiler leurs connaissances locales puis de les transformer. Ce dispositif met en lumière la prégnance de connaissances locales (par exemple « on fait la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas ») et la difficulté des élèves à les transformer pour acquérir de nouvelles connaissances.

[31] « Une connaissance locale est une connaissance mathématique juste du point de vue mathématique, dans un certain domaine dont les élèves ignorent les limites. Ils peuvent alors utiliser cette connaissance en dehors de ses limites de validité ce qui produit des erreurs. » (Maurel et al., 2010, p.1)

Ces mêmes chercheures, mais aussi nous avons retrouvé des propos similaires chez Coulange & Grugeon (2008) et Rinaldi (2016), montrent que des procédures erronées peuvent aussi résulter d'usages et de pratiques au sein de la classe. Ainsi, Maurel et al. (2010) notent des expressions automatisées telles que « j'emprunte une dizaine et je la rends » pour justifier le fait d'écrire deux retenues tandis que Coulange & Grugeon (2008) et de Rinaldi (2016) relèvent « un discours formel et convenu » dans les discours des élèves lors qu'ils effectuent des algorithmes opératoires. Par ailleurs, dans l'article « il ne faut pas désarticuler un nombre », Maurel et al. (2010) rejoignent Jonaert (1993) et Nantais (1991) qui montrent qu'un propos tel que « il n'est pas possible de prendre un plus grand nombre d'un plus petit » peut amener les élèves à réaliser un raisonnement quantitatif sur chacun des chiffres composant les nombres engagés dans l'opération, démontrant ainsi d'une perte de signification dans la mise en œuvre des algorithmes opératoires.

D'autres recherches reprennent la question du lien entre sens et technique en montrant que la pratique du calcul mental et la connaissance du nombre et des opérations se développe dialectiquement. Celles-ci montrent par ailleurs qu'une pratique régulière du calcul mental favorise chez les élèves la résolution de problèmes numériques standards, en accélérant la reconnaissance de l'opération en jeu. (Boule, 1997 ; Butlen, 2007 ; Butlen & Pézard, 2003, 2007 ; Butlen & Masselot, 2010 ; Fisher, 1987 ; Richard, 1982 ; 1990 ; Vergnaud, 1981).

Conclusion

Cette brève revue de littérature traite prioritairement de la manière dont les questions de la résolution de problème et de la construction du sens par les élèves sont abordées dans les recherches en enseignement des mathématiques. Nous avons exploré ce qui dans le champ des nombres et de leurs opérations, et plus particulièrement dans le champ additif à l'école primaire, permet de situer notre travail de thèse et d'en pointer la spécificité.

La recherche que nous menons vise à identifier comment des enseignantes en Suisse et en France, de niveaux d'expérience dans le métier différents, sont en mesure de s'approprier la ressource didactique que constitue l'ingénierie didactique de la soustraction. Nous souhaitons explorer, à partir d'une analyse de leurs pratiques en classe, comment elles se saisissent des problèmes mathématiques proposés dans cette ingénierie afin de voir comment elles amènent les élèves à construire le sens de la soustraction. Nous sommes donc maintenant en mesure de préciser quelle sera l'inscription théorique à partir de laquelle nous mèneront cette étude. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2. Inscription théorique et problématique de recherche

Ce chapitre s'attache à préciser quel est le cadre théorique dans lequel s'insère notre recherche de thèse. Dans une première section, nous pointons son inscription dans le cadre de la didactique comparée, puis nous justifions le choix d'une analyse ascendante des phénomènes transpositifs pour conduire les comparaisons de pratiques didactiques. Ces deux points justifient le choix du modèle de l'action conjointe comme cadre théorique de notre enquête. Nous en présentons ensuite les principaux concepts avant de poser plus finement notre problématique et les questions de recherche

La revue de questions du chapitre précédent a mis en évidence la complexité des mises œuvres didactiques rendant possible un enseignement basé sur la résolution de problème. Il est aussi apparu que les enseignants rencontrent des difficultés à maintenir le sens des opérations au début des apprentissages mathématiques de l'école primaire, et ce, même s'ils disposent de ressources didactiques pertinentes et éprouvées. Dans cette thèse, nous souhaitons saisir ce qui influence les mises en œuvre des enseignants lorsqu'ils s'approprient des ressources didactiques ou des prototypes didactiques déjà existants, ce qui rend nécessaire d'aller les observer *in situ* dans des classes ordinaires. Plus précisément, ayant pour objectif de comprendre comment une ingénierie didactique, élaborée dans les années 90 pour produire des phénomènes pour la recherche, est mise en œuvre par des enseignantes en 2013-2014 dans des classes ordinaires, nous avons observé trois enseignantes, qui à la suite d'une formation, utilisent cette ingénierie dans leur classe. S'agissant de mettre à jour les déterminants qui influent sur la mise en œuvre de cette ingénierie dont nous avons postulé, suite à une revue de littérature didactique, qu'ils combinent des dimensions culturelles, institutionnelles, et des dimensions liées à l'histoire professionnelles des enseignants eux-mêmes, notamment leur l'épistémologie pratique, nous avons mené une analyse ascendante de la transposition didactique dans des systèmes didactiques ordinaires contrastés : soit du fait de leur appartenance à deux systèmes éducatifs différents (suisse et français) soit en lien avec l'expérience des enseignants (enseignante en début de carrière, enseignante chevronnée en France).

Ce chapitre vise à présenter les arrières plans théoriques sous-tendant notre problématique et notre méthodologie de recherche. Dans un premier temps, nous présentons l'approche comparatiste dans laquelle nous inscrivons notre recherche. Dans un second temps, nous précisons le cadre théorique et les outils utilisés pour la mener. Enfin, dans une troisième section nous formulons notre problématique ainsi que nos questions de recherche.

1. Une inscription en didactique comparée

Notre objet de recherche se situe en didactique et conjugue deux plans de comparaison. Le premier « met en parallèle » l'enseignement dans deux systèmes didactiques de deux pays (la Suisse romande et la France). Le second « confronte » dans un même pays (la France) les pratiques d'enseignement mises en œuvre par des enseignantes d'expérience contrastée. Avant de développer la problématique comparatiste de notre recherche, nous faisons un bref retour sur le comparatisme en sciences sociales.

1.1. Le comparatisme en sciences sociales

Nous nous référons à trois auteurs, Vigour « la comparaison dans les sciences sociales » (2005) et Jucquois et Veille « Le comparatisme dans les sciences de l'homme » (2000) pour revenir sur la notion de comparaison. Reprenant la définition de Sartori « comparer, c'est à la fois assimiler et différencier par rapport à un critère » (1994, p.22), Vigour précise que la comparaison ne tient pas de l'évidence mais relève d'une construction.

1.1.1. Comparer, dans quel but ?

Distinguant la comparaison de l'analogie et de l'homologie qui font le constat de ressemblance ou de concordance, Vigour définit la comparaison entre différents objets comme une action : « La comparaison renvoie quant à elle à « l'action de comparer », c'est-à-dire d'« établir le rapport qui existe entre les objets », de « mettre en parallèle », de « confronter ». Ainsi la comparaison désigne une action ; ce n'est pas un constat. » (Vigour, 2005, p. 8). Par ailleurs, celle-ci est non orientée : « La comparaison est une mise en regard explicite, dans la quête tant des ressemblances que des différences » (*Ibid.).* Jucquois et Veille (2000) soulignent une « exigence de principe de multiplier les angles de vision » (p. 39) afin de multiplier les interprétations. Ils précisent que « le pluralisme interprétatif découle fondamentalement des conditions dans lesquelles le savoir peut se constituer dans le domaines des sciences ayant l'homme pour objet et des modalités selon lesquelles l'interprétation s'élabore, se construit et se formule » (*Ibid.*). Nous observons ce pluralisme interprétatif à l'œuvre dans plusieurs travaux relevant de la didactique, par exemple au sein des groupes de recherches pluridisciplinaires GRECO – Didactique et Acquisition de connaissances scientifiques[32] structure créée en 1985 au sein du CNRS. Notons aussi l'ouvrage « Regards croisés sur le didactique : un colloque épistolaire » qui réunit des didacticiens des mathématiques sur un même objet (une leçon de mathématiques dans une classe de Première B) (Blanchard-Laville, Chevallard & Schubauer-Leoni, 1996) tandis que « Variations sur une leçon de mathématiques : analyse d'une séquence, "l'écriture des grands nombres" » (Blanchard-Laville, 1997) réunit cette fois-ci des chercheurs de sciences de l'éducation venus d'horizons disciplinaires différents sur l'analyse d'une même leçon. Ces travaux avaient pour ambition de croiser les regards sur un même objet didactique afin de porter le débat au niveau de l'articulation de différentes approches théoriques en didactique

[32] GRECO – Didactique et Acquisition de connaissances scientifiques : le **G**roupement de **Re**cherche **Co**ordonnées a rassemblé une centaine de chercheurs psychologues, mathématiciens et physiciens. Sa création répondait à une « nécessité sociale d'une meilleure formation scientifique et technique de l'ensemble des jeunes, d'autre part sur la maturité scientifique de ce nouveau domaine de recherche. » (Vergnaud, 1985, p. 14). Il fut codirigé par Vergnaud, Brousseau et Hulin.

des mathématiques. Schubauer-Leoni (2009) prolonge la réflexion quant à la comparaison en posant la question « est-ce qu'il s'agit d'un *champ à part entière* ou est-ce qu'il s'agit d'une *méthode* au service d'un domaine à l'intérieur d'une discipline ? » (2009, p. 18), question que nous développons dans la section suivante.

1.1.2. Une méthode ou une manière de voir ?

Si Vigour (2005) reconnaît à la comparaison des caractères méthodologiques, elle la distingue d'une méthode en la caractérisant comme « une démarche, un état d'esprit destiné à déplacer le regard du chercheur » (p. 15). Comparer, c'est en effet non seulement accepter de se décentrer, mais également rendre plus exigeants la formulation d'hypothèses et le travail de théorisation » (*Ibid.*, p. 18). Ginzburg (2001) va plus loin dans l'idée de décentration en proposant la notion d'« *estrangement* » (ou distanciation) qu'il définit comme un procédé consistant à tenir le discours de l'étranger, aux fins de comprendre sa propre société. Changer de point de vue et opérer ainsi une mise à distance permet de se « constituer un antidote efficace à un risque qui nous guette tous : celui de tenir la réalité pour sûre » (Ginzburg, 2001, p. 36). Dans cette thèse de didactique, en suivant cet auteur, nous avons décidé de mettre à distance le système scolaire de notre propre environnement culturel et institutionnel (toulousain, pour ce qui nous concerne) par l'observation d'un système appartenant à un autre environnement (genevois). Ce choix assumé a eu pour fonction de nous obliger à une rupture avec le sens commun, avec « ce qui va de soi », parce que issu d'une représentation naturalisée de l'enseignement des mathématiques au primaire du fait de notre position de formatrice à l'ESPE de Toulouse). Reprenant une formulation de Schubauer-Leoni et Leutenegger (2002), « réagir à l'enfermement disciplinaire » (*Ibid.*, p. 232) permet de se préserver d'une tentation de « naturalisation » des phénomènes didactiques et par voie de conséquence d'approfondir la connaissance des fonctionnements des systèmes didactiques observés. Amade-Escot et Venturini (2008) font par ailleurs le constat que « certains objets transparents dans une analyse strictement disciplinaire se trouvent révélés dans une analyse comparative » (p. 9).

Rappelons la question de Schubauer-Leoni : la didactique comparée est-elle « un *champ à part entière* ou une *méthode* au service d'un domaine à l'intérieur d'une discipline ? » (2009, p.18). Dans cet article les auteures soutiennent l'idée que la didactique comparée est un champ à part entière dans la mesure où elle se situe non pas au plan des disciplines mais au plan des domaines de réalité ce qui, en réponse à Vigour (2005), relève bien d'une « manière de voir ». Ainsi, la didactique comparée « pose des questions et découpe des domaines de réalité didactique non traités et non traitables par les didactiques disciplinaires » (Schubauer-Leoni, 2009, p. 18). Il n'est donc pas question ici de se déplacer seulement pour voir autrement, mais de se saisir différemment d'un questionnement didactique pour pouvoir ainsi que l'écrit Vigour (2005) « rendre plus exigeant la formulation d'hypothèses et le travail de théorisation » (p. 18). Cette nouvelle « manière de voir » en didactique a ainsi permis le développement de concepts et d'outils comparatistes, et l'émergence d'un champ de recherche. C'est l'objet des sections qui suivent.

1.2. La didactique comparée : un champ de recherche en émergence

1.2.1. Origines des premiers travaux

Dans la continuité des travaux du groupe de didacticiens que nous avons cité dans la section précédente et qui a donné lieu à de nombreuses publications dont le colloque épistolaire (Blanchard-Laville, Chevallard, Schubauer-Leoni, 1996), nombreux sont les chercheurs en didactiques poursuivant la réflexion quant aux différentes approches didactiques. Ainsi, remarquant un « cousinage » entre certains concepts élaborés au sein de différentes didactiques disciplinaires, Johsua (2002) soutient l'idée d'une nécessité consistant à « dégager une place à un champ supplémentaire qui serait la comparaison entre les outils conceptuels avancés par chacune des didactiques, le dégagement d'espace commun, [et] de ressaisir avec un autre point de vue ce qui fait l'enseignement en classe » (p. 21). Schubauer-Leoni et Leutenegger (2003) renchérissent en avançant que comme leurs prédécesseurs en sciences humaines et sociales, ayant fait l'expérience du comparatisme, les didacticiens comparatistes ont aussi besoin « d'une décentration, voire d'"estrangement" par rapport à une vision parcellaire du didactique acquise au travers de la didactique disciplinaire » (p. 71) pour pouvoir se dégager d'une forme d'ethnocentricité et d'un risque naturalisation au sein des didactiques.

La parution en 2002 d'un numéro de la Revue Française de Pédagogie entièrement consacré à la didactique comparée (« Vers une didactique comparée »), officialise l'émergence de ce champ de recherche. Dans l'introduction de ce numéro, revenant sur les travaux du GRECO, Mercier, Schubauer-Leoni et Sensevy (2002) soutiennent que « la question de l'interdisciplinarité ou de la co-disciplinarité en sciences de l'éducation […] n'est plus à envisager comme une complémentarité/complétude où chaque contribution viendrait s'ajouter aux autres en vue d'une vision plus exhaustive des phénomènes éducatifs » mais que « c'est davantage dans l'analyse des superpositions relatives des phénomènes et des fonctions qu'ils remplissent dans les différents cadrages théoriques que repose l'intérêt principal de l'échange, entre sciences, au sein des sciences de l'éducation » (*Ibid.*, p.8). On peut percevoir dans ces propos les premiers contours d'un champ théorique en émergence et l'ébauche d'une délimitation des enjeux de la comparaison en didactique selon deux niveaux de questionnements.

1.2.2. Les enjeux de la comparaison en didactique

Cherchant à délimiter ce qui relève *du* didactique de ce qui relève de *la* [science] didactique, Mercier, Schubauer-Leoni et Sensevy (2002) définissent le projet de la didactique comparée à deux niveaux.

Le premier niveau se rapporte « au découpage des domaines de réalité "du" didactique » (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002). Autrement dit, il s'agit « de rendre compte « du » didactique en étudiant comment il est possible à deux ou plusieurs personnes de s'engager dans une interaction dissymétrique, d'enseignement pour les unes, d'étude de ce qui est enseigné pour les autres » (p. 8.) Or ceci ne peut s'effectuer sans tenir compte des institutions qui pilotent l'intention didactique. Ce premier niveau se décline selon deux axes de comparaison.

- Un premier axe de comparaison interroge « l'institution officielle » (Ligozat, 2015) porteuse d'une intention didactique au sein d'une discipline donnée. Il s'agit d'une part de montrer les effets du travail de l'institution sur la relation didactique par la comparaison au sein même de la discipline et d'autre part, d'identifier, par la comparaison interdisciplinaire, les raisons des découpages scolaires.
- Un deuxième axe de comparaison interroge des institutions « non officielles », mais pour autant porteuses d'intentions didactiques (la famille, le club de sport, les associations culturelles, les musées, etc.). Il s'agit alors, par contraste avec les institutions scolaires « officielles », d'éclairer les zones d'ombre du didactique et d'en dégager l'essence même : « ses frontières, ses modalités de commencement et de transition, ses dynamiques de fonctionnement et ses conditions de possibilité » (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002, p. 8)

Le second niveau se rapporte à la science du didactique, c'est-à-dire à la mise en regard de théories et de concepts élaborés au sein des didactiques. Il s'agit de « confronter, en les éprouvant, des systèmes théoriques élaborés par les différentes didactiques des disciplines » (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002, p. 8). Ce niveau se décline lui aussi selon deux axes :

- Le premier axe de comparaison cherche à mettre en exergue des liens entre les objets théoriques des didactiques disciplinaires alors que ceux-ci sont centrés sur leurs propres enjeux de savoirs. A quelques années d'intervalle, Amade-Escot répond à Johsua à propos du « cousinage » de certains objets théoriques « au sein des approches anthropologiques, l'approche comparatiste en didactique vise à produire des modèles de portée générique au-delà des territoires et des découpages de disciplines ou d'institutions » (Amade-Escot, 2007, p. 8).
- Le deuxième axe de comparaison questionne les continuités, inflexions ou ruptures que la science du didactique entretient avec d'autres théories des sciences de la société et de l'homme. Cette recherche de la nature du lien entretenu avec les autres champs théoriques inscrit du même coup pleinement *le* didactique dans les sciences de l'Homme, comme le discute une livraison récente de la revue « Éducation et Didactique » (Marlot & Chabanne, 2016).

La didactique comparée se veut donc d'une part enrichir la connaissance des processus d'enseignement / apprentissage en départageant le spécifique du générique dans les actions des professeurs et des élèves et, d'autre part, contribuer à l'inscription du didactique, en tant que fait social[33], dans le champ des sciences sociales (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002).

Les didacticiens comparatistes actuels prolongent la réflexion quant aux enjeux de ce champ de recherche en construction, en portant le débat sur l'identité même de la didactique comparée, au travers de son périmètre de recherche, de ses composantes, de ses liens avec les autres champs de recherche. Débat dont nous faisons état dans la section suivante.

1.2.3. Débats actuels

Les débats comparatistes trouvent leurs lieux d'expression au sein de l'Association pour les Recherches Comparatistes en Didactiques (ARCD). Pour en décrire l'évolution, nous nous appuyons sur la revue de l'association « Éducation et Didactique », en particulier la revue Éducation & Didactique de 2014 synthétisant les travaux de la journée d'étude « Didactique et/ou didactique(s) ? » (Ligozat, Coquidé & Sensevy, 2014) ainsi que sur un

[33] « De la même façon que l'on parle du religieux ou du politique, on parlera du didactique comme « un fait social total ». Mercier, Schubauer-Leoni et Sensevy (2002, p. 13)

ouvrage de Raisons Éducatives « Didactique en construction, construction des didactiques » (Dorier, Leutenegger & Schneuwly, 2013). Quels sont les contours de ce champ de recherche ? Quelles tensions dans sa définition : les didactiques, la didactique, le didactique ?

Dans le numéro thématique de la revue « Éducation & Didactique » (Ligozat, Coquidé & Sensevy, 2014), deux options sont défendues. Martinand (2014) et Reuter (2014) défendent une vision des didactiques comme structurées par et pour les disciplines scolaires. De son coté Chevallard (2014) formalise une définition de *la didactique* comme étant « la science dont l'objet premier est le didactique, c'est-à-dire l'ensemble *des faits didactiques*. Il y a *fait didactique* (ou "geste didactique") dès lors qu'une instance U (et par instance on entend ici une *personne* ou une *institution*) fait quelque chose ou même envisage de faire quelque chose pour qu'une instance V intègre à son équipement de savoir et de savoir-faire - à son équipement *praxéologique* - certaines connaissances relatives à l'enjeu ♥ du geste didactique » (Chevallard, 2014, p.38).

Dans sa thèse, Ligozat (2008) précise trois manières d'utiliser le mot didactique :

> « (a) comme adjectif pour qualifier des objets et des pratiques qui contribuent effectivement à la réalisation de l'intention de modification de la connaissance d'autrui mais aussi les descripteurs formels de cette intention et de ses formes d'actualisation, c'est-à-dire l'activité, la relation, le système, le contrat, une théorie …etc. ;
>
> (b) comme nom féminin, *la didactique*, pour désigner la science qui étudie les précédents objets (avec sa forme plurielle – *les didactiques* – pour dire les domaines de spécification de cette science) ;
>
> (c) comme nom masculin, *le didactique*, pour désigner un type de phénomènes qui ne se rapportent de manière irréductible à la finalité sociale de faire apprendre. » Ligozat (2008, p. 56)

Cette chercheure définit *la didactique* comme étant « la science qui *étudie* le projet social de faire approprier une connaissance en tant que phénomène, et non le projet social en lui-même. En se démarquant de "la didactique" vue comme la méthodologie des pratiques d'enseignement et d'apprentissage d'un corps de savoirs donné, Ligozat (2008) introduit une nécessaire clarification entre l'objet et la théorie de son fonctionnement ».

Nous observons ici les prémices d'un nouveau développement de la didactique comparée dont nous trouvons confirmation dans les éléments de synthèse de la journée d'étude de l'ARCD de 2013 : « on constate qu'il est désormais possible de débattre de ce que peuvent ou doivent être les composantes fondamentales d'un champ de recherches scientifiques constitué par les "les didactiques (des disciplines)", "des approches didactiques (de pratiques d’enseignement/apprentissage, du curriculum, de la formation professionnelle, etc.)" ou encore l’étude du didactique "tout court" » (Ligozat et al., 2014).

1.3. Commentaires conclusifs

Notre recherche de thèse est donc abordée selon une approche comparatiste. Sans pour autant occulter les débats ouverts actuellement dans les communautés des didacticiens sur l’unification possible ou la diversité des sciences didactiques (Dorier, Leutenegger & Schneuwly, 2013), le choix d’une posture comparatiste dans notre thèse consiste à identifier les contraintes et les possibles de l’enseignement de la soustraction en Suisse romande et en France, à partir de l’étude des modalités de mise en œuvre de l’ingénierie didactique broussaldienne de la soustraction (Berté, 1996) dans trois sites différents par des enseignantes contrastées. Plusieurs plans de comparaison visant à rendre compte de l’influence des déterminants institutionnels et personnels sur les pratiques sont envisagés. Nous les détaillerons dans la section méthodologique.

Néanmoins, à cette étape du cadrage théorique de nos travaux, nous pouvons dire que notre recherche, en menant une étude comparative dans des systèmes didactiques de deux pays, s’inscrit dans la lignée des travaux initiés par Ligozat (2008). De même que cette auteure a mené une étude comparative de l'enseignement / apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisses romandes, notre étude porte sur l’enseignement de la soustraction dans une classe de Suisse romande et deux classes françaises. Sans nous situer sur une comparaison des deux systèmes éducatifs selon l’approche de l’éducation comparée, nous chercherons dans un premier temps à déterminer ce qui structure les choix curriculaires dans ces systèmes afin de déterminer les principales similitudes et différences et de rendre compte du « travail des institutions sur les savoirs et les pratiques d’enseignement et apprentissage » (Ligozat, 2008, p. 20). Puis dans une second temps empirique nous observerons le fonctionnement des trois systèmes didactiques contrastés, soit du fait de leur appartenance à des contextes institutionnels différents (Suisse romande *vs* France), soit du fait des caractéristiques des acteurs en jeu (enseignante en début de carrière *vs* enseignante expérimentée en France). Notre visée sera de produire des connaissances sur les pratiques d'enseignement et d'apprentissage de la soustraction à l’école primaire, en observant les modalités singulières de mise en œuvre de l’ingénierie broussaldienne ce qui nous permettra de mettre au jour les dimensions génériques ou *a contrario* spécifiques de l’action didactique dans les différents contextes d’observation.

Nous avons vu que la didactique comparée participe au « travail de théorisation », en réinterrogeant des concepts théoriques issus des différentes didactiques. Schubauer-Leoni et Leutenegger (2002) posent comme « hypothèse de travail » la question de la nature de la relation didactique se nouant entre les acteurs du système didactique. Se référant à un paradigme indiciaire, les auteures indique que la didactique comparée s'attache à observer et à comparer des systèmes « ordinaires » à la recherche d'indices permettant de traiter une problématique relevant des phénomènes de transposition didactique. Dans notre thèse, il s'agit bien de décrire quels sont les déterminants institutionnels et ceux liées à l'expérience enseignante qui pèsent sur la transposition didactique interne (au sens de Chevallard, 1985). Ceci nous amène dans les sections qui suivent à discuter le concept de transposition didactique et des phénomènes y afférents qui peuvent être analysés soit dans un mouvement descendant, en partant du contrôle épistémologique du savoir, soit dans un mouvement ascendant en partant des pratiques en classes, et dans le but de décanter, à partir de l'analyse des savoirs, les phénomènes transpositifs.

2. La transposition didactique

Dans cette section nous revenons brièvement sur les évolutions du concept de transposition didactique, en nous centrant prioritairement sur son usage en didactique des mathématiques et en didactique comparée.

2.1. Origine du concept

Sans revenir de façon approfondie sur les origines et discussions autour de ce concept sur lequel de nombreux travaux ont été faits, il est important de rappeler que la notion de transposition didactique est née dans le cadre de la sociologie critique universitaire.

Le concept de transposition didactique a été proposé initialement par Verret (1975) définissant la didactique comme « la transmission d'un savoir acquis. Transmission de ceux qui savent à ceux qui ne savent pas. De ceux qui ont appris à ceux qui apprennent » (p. 139). S'interrogeant sur le type de savoir transmis, l'auteur déclare qu'un savoir savant ne peut se transmettre tel quel : « Toute pratique d'enseignement d'un objet présuppose une transformation préalable de cet objet en objet d'enseignement » (Verret, 1975, p. 140). Avant de pouvoir vivre dans une institution d'enseignement, le savoir savant doit donc être « apprêté ». Il s'agit de pouvoir le rendre enseignable par les enseignants et accessible aux apprenants. Pour ce faire, le savoir savant doit subir plusieurs transformations (Verret, 1975, pp. 146-147) :

- La *désynchrétisation du savoir,* c'est-à-dire la déstructuration du savoir en savoirs autonomes pouvant vivre dans d'autres champs de savoir.
- La *dépersonnalisation du savoir,* c'est-à-dire la viabilité du savoir en dehors des individus créateurs ou utilisateurs dans la sphère initiale.
- La *programmation de l'acquisition du savoir,* c'est-à-dire la séquentialisation du savoir afin que celui- ci soit assimilable.
- La *publicité du savoir,* c'est-à-dire la parution dans les référentiels et programmes d'enseignement qui permettent au lecteur de comprendre sur quoi et vers quoi porte l'objet d'enseignement ainsi que le contexte dans lequel il doit être enseigné.
- Le *contrôle social des apprentissages,* c'est-à-dire une forme de validation par la société du savoir appris dans son nouveau contexte.

Bien que portant sur les savoirs transmissibles dans l'enseignement de la philosophie à l'université, les propositions de Verret ont eu une portée considérable en alimentant les débats dans plusieurs didactiques disciplinaires : notamment pour ne citer que quelques premiers travaux et auteurs emblématiques : Chervel (1988) et Halté (1998) pour la didactique du français, Audigier (1998) pour la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences sociales, Marsenach, (1991) en éducation physique, ou Brousseau (1980, 1990), Brun (1992), Chevallard (1985), Chevallard et Johsua (1991), Arsac (1992) en didactique des mathématiques.

2.2. Le travail du concept : l'apport de la didactique des mathématiques

C'est à la didactique des mathématiques que l'on doit la discussion théorique du terme de transposition didactique proposé par Verret (1975). Dans le sillage de la contribution décisive de Chevallard à l'école d'été de didactique des mathématiques de Jolivet et la parution de la première édition de son ouvrage éponyme (1985), les didacticiens des mathématiques se sont confrontés à l'analyse des processus de transposition didactique. Nous présentons dans les sections suivantes un rapide panorama de l'élaboration conceptuelle et des débats qu'elle a suscitée, en terminant par les travaux de Brousseau que, bien qu'antérieurs, nous plaçons en dernier dans cette section puisque notre thèse porte sur la mise en œuvre dans des classes ordinaires d'une ingénierie didactique broussaldienne. Par ailleurs, et parce que l'on doit à Chevallard (1985, 1991), le travail théorique érigeant la notion de transposition didactique en concept, il nous semble important de rendre compte de l'évolution de son évolution à partir de sa contribution fondamentale.

2.2.1. La transposition didactique selon Chevallard

En 1985, dans l'ouvrage « La transposition didactique », Chevallard reprend, élargit et met au « travail » le propos de Verret en discutant la question de la « transformation d'un objet de savoir en un objet d'enseignement » (1985, p. 39). Pour Chevallard, « un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique » (Chevallard, 1985, p. 39). Pour autant, Chevallard ne limite pas la transposition didactique au processus d'adaptation d'un objet de savoir à un objet à enseigner (transposition didactique *stricto sensu*). Il considère l'ensemble du processus de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement : « l'étude scientifique du processus de transposition didactique suppose la prise en compte de la transposition didactique *sensu lato*, représentée selon le schéma :

Objet de savoir → objet à enseigner → objet d'enseignement » (*Ibid.*).

Reprenant le propos de Verret, Chevallard décrit les contraintes auxquelles doit satisfaire le premier niveau de transposition, celui de la mise en texte d'un savoir savant afin que celui-ci devienne enseignable : désyncrétisation du savoir, dépersonnalisation du savoir, programmabilité de l'acquisition du savoir, publicité du savoir, contrôle social des apprentissages. Ce faisant, il détaille le processus de transformation du savoir issu de la « sphère savante » au texte de savoir à enseigner.

L'institution opérant la transposition adaptative du savoir savant au savoir à enseigner est une institution constituée « des représentants du système d'enseignement » et des « représentants de la société ». Nommée « noosphère » par l'auteur, elle est « la sphère *où l'on pense* le fonctionnement didactique » (Chevallard, 1991, p. 25). La noosphère effectue son travail en relation forte avec la société à laquelle elle appartient, ce qui lui permet de maintenir une compatibilité du système didactique avec son environnement sociétal. C'est elle qui porte la responsabilité du choix des objets à sélectionner pour être transformés en objet à enseigner. La question qui se pose est alors quand et pourquoi certains savoirs entrent ou sortent du système d'enseignement par l'intermédiaire de la noosphère ? Chevallard répond à deux niveaux : d'une part, le savoir à enseigner et le savoir enseigné doivent être à une certaine distance du savoir savant : trop éloignés, ils sont alors obsolètes ou archaïques mais trop proches et ils sont alors incompréhensibles. D'autre part, ils doivent aussi être à une certaine distance du savoir de la famille : trop éloignés, ils sont jugés incompréhensibles et trop proches ils sont inutiles parce que pouvant être pris en charge par la famille elle-même. Pour être reconnu, on pourrait donc dire que le savoir enseigné doit être « ressemblant », à la « bonne distance » du savoir savant. La noosphère est donc amenée à remanier, réactualiser les textes à enseigner afin que ceux-ci restent actuels c'est-à-dire compatibles avec les savoirs de référence. Prenons l'exemple de l'informatique : alors qu'elle était déjà présente dans les sphères savantes depuis les années 70, l'utilisation généralisée dans les établissements scolaires, à des fins pédagogiques, n'est entrée dans l'école que dans les années 1980. L'algorithmique en tant qu'objet de savoir à enseigner, tant dans sa valence mathématique qu'informatique, n'est pleinement introduit dans les programmes français qu'en 2009 (Couderette, 2012, 2016). Si certains objets de savoirs apparaissent, d'autres disparaissent : par exemple, l'enseignement de l'extraction d'une racine carrée était inscrite dans les programmes de collège des années 70 mais ne fait plus du tout partie des programmes scolaires actuels, les élèves pouvant accéder à cette fonction sur une calculatrice.

Ce travail de transposition, que Chevallard qualifie de « transposition externe », se poursuit à l'intérieur du système d'enseignement par la « transposition interne » (Chevallard, 1991, p.31), c'est-à-dire par le processus de transformation du savoir à enseigner au savoir enseigné. Si l'enseignant est le principal responsable de cette transformation, il n'a pas le même degré de liberté que la noosphère. Il n'a pas la liberté de choisir les objets de savoir à enseigner et se doit de respecter le texte de savoir tel qu'il a été construit par la noosphère. Pour autant, ainsi que le précise Chevallard dans la deuxième édition augmentée de son ouvrage (1991), tout n'est pas explicite dans le texte de savoir : « les contenus de savoirs désignés comme étant à enseigner [sont] explicitement : dans les programmes [et] implicitement par le truchement de la tradition, évolutive, de l'interprétation des programmes » (Chevallard, 1991, p. 39). Reprenant la définition du savoir à enseigner, Arsac et al. (1989) précisent que « le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme » (p. 12-13). Si la transposition didactique interne peut se révéler au travers de « dysfonctionnement » ou de « créations didactiques d'objets » dus aux contraintes du fonctionnement du système didactique, Chevallard (1991) souligne toutefois la nécessité du « principe de vigilance épistémologique » qui permet au didacticien de se préserver du risque de « l'illusion de la transparence » (p. 42-43).

Pour Arsac (1992), « la théorie de la transposition didactique met en évidence deux points fondamentaux : (i) le problème de la légitimation d'un contenu d'enseignement, (ii) l'apparition systématique d'un écart entre le savoir enseigné et les références qui le légitiment, l'écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement » (p.10). Le problème de la légitimation d'une contenu d'enseignement a amené plusieurs chercheurs à prendre position relativement à ce que l'on désigne par « savoir ». Parmi l'ensemble des travaux reflétant les débats autour de la transposition didactique, nous nous référons dans ce qui suit aux travaux de Martinand et Johsua, travaux ayant fortement contribué au débat à propos de la nature d'un savoir de référence : savant, technique, expert, personnel, etc. Dans son ouvrage « Connaitre et transformer la matière », Martinand (1986) montre que certains enseignements n'ont pas forcément pour référence un savoir savant mais peuvent se référer à un ensemble de pratiques sociales. Johsua distingue pour sa part (1998, 1996, 2002) les savoirs inscrits dans une institution d'enseignement parce que nécessitant un apprentissage explicite de ceux vivant « dans l'environnement » et acquis par un « apprentissage silencieux ».

2.2.2. La théorie de la transposition didactique en débat

Parallèlement à Chevallard, Martinand (1986) en sciences physiques et technologie propose une définition élargie du concept de transposition didactique à partir de celui de Pratique Sociale de Référence (PSR) pour désigner l'ensemble des pratiques sociales pouvant aussi légitimer un savoir à enseigner : « une activité, un problème, des connaissances, des attitudes […] ne sont jamais purs ; ils sont liés à des rôles, des fonctions, plus généralement des pratiques. Il nous paraît donc fondamental de comparer les situations d'enseignement avec celles vécues dans les pratiques sociales sous tous [leurs] aspects » (1986, p. 291). Pour Martinand, les pratiques sociales de référence consistent à : « mettre en relation les buts et contenus pédagogiques, en particulier les activités didactiques, avec les situations, les tâches et les qualifications d'une pratique donnée. » renvoyant aux trois aspects :

> « - Ce sont des activités objectives de transformation d'un donné naturel ou humain ("pratique")
>
> - Elles concernent l'ensemble d'un secteur social, et non des rôles individuels ("social")
>
> - La relation avec les activités didactiques n'est pas d'identité, il y a seulement terme de comparaison ("référence") » (Martinand, 1986, p. 137-138)

Martinand désigne ainsi comme référence, les situations ou activités sociales permettant de donner du sens à ce que l'élève apprend. Comme pour Chevallard, il s'agit alors de mesurer l'écart entre ce qui est produit dans la société et ce qui se fait à l'école en terme de « pratique ». Mais Martinand (2001) défend l'idée d'une « transposition élargie » et non plus seulement d'une transposition de « savoirs » qualifiée par lui de « transposition restreinte ». En mettant en relation PSR et activités d'enseignement, l'auteur se donne alors la possibilité de répondre à la question « quelle utilité ce savoir à enseigner a t-il dans la société actuelle ? ».

Johsua (1997, 1998) discute de la transposition didactique qui selon lui ne peut être qu'une transposition de savoirs, mais il s'agit pour lui d'interroger la nature du savoir de référence. Il en montre que certains savoirs « socialement repérables » (Johsua, 1997), mais ne sont pas ou peu mis à l'étude dans une institution scolaire : les « savoirs pragmatiques acquis en situation », « quotidiens » tels que marcher, parler chez le jeune enfant, sont appris par imprégnation, d'autres plus « pratiques » que l'on rencontre dans des milieux professionnels plus confidentiels sont diffusés entre pairs, par compagnonnage. Alors que d'autres savoirs, « techniques » demandent une intentionnalité d'apprentissage : par exemples, la musique, la conduite automobile ou le « lire écrire compter ». Parmi ceux-ci, certains, « hautement techniques », nécessitent une prise en charge par une institution scolaire ou de transmission (comme les clubs sportifs, ou les conservatoires), au sein desquelles s'opère une nécessaire transposition. Johsua estime que les disciplines enseignées à l'école ne se réfèrent pas uniquement à des savoirs savants. Il introduit les distinctions entre savoirs savants, savoirs experts et savoirs personnels. Pour Johsua, le « savoir savant » relève d'une reconnaissance sociale : « sont considérés comme "savants" les savoirs qu'une société donnée considère comme tels à un moment donné de son histoire », (Johsua, 1997, p.17). Par exemple, parce que reconnue comme savoir savant par la société au XVIIIème siècle, l'astrologie avait une visibilité institutionnelle. Aujourd'hui, elle ne l'est plus. Les savoirs experts sont, quant à eux, définis comme étant « développés dans d'autres institutions (non « savantes »), lesquelles définissent un réseau de relations interpersonnelles où s'élaborent l'objet de la recherche et de la pratique, les méthodologies d'approche, les langages, etc., sans pour autant être dotés d'un monopole reconnu à leur propos » (Johsua, 1998, p. 86). Prenant l'exemple de la musique, certaines composantes de cette discipline renvoient à des savoirs savants (le solfège par exemple), d'autres à des savoirs experts (la pratique d'un instrument) ou d'autres encore à des savoirs très personnalisés (renvoyant à des modalités singulière caractéristiques de tel ou tel interprète ou créateur de Jazz, de Rock, de Hip-hop). Pour

Johsua, l'école ne peut que transmettre des savoirs. Elle n'enseigne jamais ni des théories « pures », ni des pratiques strictes. Les savoirs de référence sont alors des savoirs qui engagent des « interrelations entre théories et pratiques ». D'un point de vue comparatiste, cette perspective est retenue par Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat et Fluckiger (2007) lorsqu'elles écrivent « toute situation d'enseignement est l'occasion de donner vie à des pratiques de savoir en référence à des pratiques socio-historiquement cristallisées en activités » (p. 53) ce qui permet de dépasser l'opposition entre transposition didactique élargie ou restreinte.

Ce très bref retour sur les débats originels en didactique met en évidence une communauté centrée sur des questions transpositives du savoir, cherchant à déterminer, d'un point de vue épistémique, tant sa localisation (institution "savante" ou "non savantes", "société"), que sa nature (savants, techniques, pratiques, expertes etc.). Chevallard (1992) reprend, pour le dépasser, ce débat en posant la question de la transposition didactique du point de vue anthropologique, c'est-à-dire en définissant *le* didactique comme objet d'étude de l'anthropologie didactique, au même titre que le religieux ou le politique sont des objets de l'anthropologie religieuse ou politique et du même coup en l'établissant au côté des nombreuses autres sciences qui étudient l'homme et la société.

2.2.3. La transposition didactique du point de vue anthropologique

En replaçant la question de la transposition didactique dans une perspective anthropologique, et plus précisément dans une Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), Chevallard (1998) « situe l'activité mathématique et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » (p. 91). Institutions, sujets, rapport (personnel) à un objet, rapport (institutionnel), etc. sont les principaux objets de cette anthropologie du didactique. L'approche anthropologique du didactique modélise les acteurs intervenant dans le système didactique, comme des sujets entretenant un certain rapport, personnel et institutionnel, avec un objet de savoir. Par sujet, Chevallard entend un individu assujetti à son institution d'appartenance. Son rapport aux objets de son institution est la résultante du rapport à ce savoir dans cette institution et des multiples autres rapports qu'il aura construits dans les différentes institutions croisées auparavant. Chevallard présente un « bon sujet » X d'une institution I relativement à un objet institutionnel O comme un sujet dont « le rapport R(X, O) est jugé conforme au rapport institutionnel $R_I(O)$. Dans l'approche anthropologique du didactique, Chevallard "retravaille" la transposition didactique interne sous deux angles : l'organisation mathématique (OM) du savoir que l'enseignant construit pour son étude et l'organisation didactique (OD) qu'il met en œuvre dans le déroulé de l'étude et qui peuvent être décrites sous forme de praxéologies. Sans approfondir, nous reprenons ci-dessous ces deux concepts.

<u>Organisation mathématique</u>

S'interroger sur la transposition didactique d'un objet de savoir amène à s'interroger sur la nature de l'objet transposé. Pour accéder à la nature de cet objet, Chevallard développe le concept de praxéologie. Les praxéologies (appelée aussi organisation mathématique) sont des outils se présentant sous la forme d'un système deux blocs, l'un practico-technique [T / τ] et l'autre technologico-théorique [θ / Θ]. Le bloc practico-technique comprend les types de tâche et les techniques permettant la réalisation de ces types de tâche. On fait parfois référence à ce bloc en utilisant le terme de « savoir faire ». Le bloc technicologico-théorique quant à lui rassemble tout ce qui justifie les techniques utilisées. Il fait référence au savoir.

Les praxéologies permettent ainsi de décrire une séance en terme d'unité, chaque unité correspondant à une tâche dans laquelle l'élève est engagé. L'objectif est de déterminer le savoir mis à l'étude, et ainsi de pouvoir répondre à la question : « quelle est l'apprentissage visé dans la séance ? »

<u>Organisation didactique</u>

L'organisation didactique décrit le déroulement de l'étude, telle que celle-ci a été prévue par l'enseignant. Plusieurs « moments » décrivent ce déroulement. On relèvera le moment de la première rencontre avec la tâche et donc par ricochet avec l'objet de savoir prévu dans l'organisation mathématique, les moments d'exploration durant lesquels de nouvelle techniques pourront apparaître, le moment de constitution de l'environnement technologico-théorique, le moment du travail de la technique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Si nous avons énoncé ces moments dans un ordre qui peut paraître chronologique, il n'en est rien, ceux-ci pouvant se réaliser plusieurs fois, être éclatés dans le temps de l'étude.

Si dans les deux éditions de « La transposition didactique », Chevallard (1985, 1991) questionnait davantage la transposition externe du savoir, l'approche anthropologique du didactique permet d'analyser les contraintes et conditions de vie d'un savoir *in situ*, c'est-à-dire prenant en compte ses différents sujets, élèves et professeur. Pour autant, l'approche anthropologique du didactique demeure tournée vers un processus de transposition du savoir selon une logique épistémique : il s'agit, par la modélisation de pratiques enseignantes en termes d'organisations mathématiques et d'organisations didactiques, de s'interroger sur la nature du savoir transposé.

2.2.4. La théorie des situations didactiques et la transposition didactique.

Après avoir rapidement brossé l'évolution du concept de transposition didactique, et les débats qui y ont été associés, intéressons-nous maintenant à une autre facette du travail du didacticien des mathématiques en lien avec les phénomènes transpositifs : celui de la production de dispositifs d'enseignement pour étudier le fonctionnement didactique. Dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD), Brousseau (1978b) définit « la didactique comme un projet social de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution. » (p.131). Quelques années plus tard, il ajoute « l'enseignement, lui aussi, est conçu comme un projet social » (Brousseau, 1986, p. 39). Les recherches de Brousseau dès l'origine sont conçues à la fois comme des recherches fondamentales visant à produire des connaissances sur le fonctionnement didactique, et comme des contributions possibles au changement des pratiques d'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Pour Brousseau, la recherche didactique nécessite de s'appuyer sur des phénoménotechniques (les ingénieries didactiques) pour rendre intelligible les conditions de possibilité d'un enseignement mathématique. L'auteur se situe ainsi, dès ses premiers travaux, en rupture et avec les approches prescriptives et la recherche-action, car il considère que l'innovation est sous la responsabilité des enseignants eux-mêmes (Brousseau, 1989b). La tâche du didacticien est de produire une théorisation validée des phénomènes qu'il observe. Pour conduire ce type de recherche d'ingénierie en didactique des mathématiques, Brousseau conçoit dans les années soixante-dix un lieu d'expérimentation (le COREM[34]) installé à l'école primaire Michelet de Talence, dont l'originalité est de travailler en collaboration avec des enseignants afin de résoudre certaines difficultés de l'enseignement des mathématiques. La visée est de centrer l'enseignement sur des situations fondamentales, celles-ci engageant le savoir (mathématique et scolaire), le travail du professeur, mais aussi le travail des élèves.

Brousseau développe un parallèle entre le travail du chercheur en mathématiques et le travail de l'élève. « Le producteur du savoir [le mathématicien] dépersonnalise, décontextualise et détemporalise le plus possible ses résultats » pour que ceux-ci deviennent un savoir, savoir exploitable par la noosphère pour effectuer un travail de transposition

[34] COREM : Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

didactique (Brousseau, 1986, p. 36). A l'inverse du chercheur en mathématiques, le travail de l'enseignant consiste, ajoute-t-il, à re-contextualiser et re-personnaliser ce savoir, de façon à ce que l'élève puisse se l'approprier et le transformer en une connaissance. L'enseignant a pour charge dans cette configuration de simuler une micro-société scientifique, ce que Brousseau exprime en écrivant :

> « Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves » (Brousseau, 1986, p. 38).

Dans un même mouvement que le mathématicien, l'élève que l'on pourrait alors appeler élève-chercheur, doit pour sa part « re-décontextualiser et re-dépersonnaliser [le] savoir et ceci de façon à identifier [sa] production avec le savoir en cours dans la communauté scientifique » que constitue la classe (*Ibid.*, p. 38). Ce mouvement relève de l'institutionalisation.

Ces assertions au fondement des recherches menées par Brousseau au milieu des années soixante-dix, pointent bien que pour l'auteur, l'activité du chercheur en didactique des mathématiques est au cœur du processus transpositif, dans la mesure où le travail d'ingénierie consiste à proposer de nouvelles modalités transpositives candidates à l'expérimentation en classe et au développement la théorisation didactique.

<u>Au cœur du processus transpositif dans la TSD : la situation fondamentale et la situation a-didactique</u>

Se démarquant de la maïeutique socratique où la responsabilité de l'apprentissage est du côté de l'enseignant et de la conception psychogénétique de Piaget (1975) où l'apprentissage est du côté de l'élève, Brousseau, dans sa thèse d'État (1986*)[35] propose une conception de l'enseignement où l'enseignant met en scène des situations provoquant chez l'élève des adaptations productrices d'apprentissages. Deux notions centrales sont au cœur de la théorisation, celles de situation fondamentale et de situation a-didactique :

[35] L'article de Brousseau paru dans la Revue de Didactique des Mathématiques en 1986 est un extrait (chapitre 3) du manuscrit de la thèse d'État que nous notons ici (1986*)

Situation fondamentale

La TSD s'est initialement centrée sur la notion de « situation fondamentale ». Nous reprenons Dorier (2015) quant à sa définition :

> « Dans la TSD une situation fondamentale d'une connaissance est une modélisation de cette famille de situations mathématiques à potentiel didactique spécifiques du savoir visé. Un problème particulier peut donc être envisagé comme découlant d'une situation « fondamentale » : cette situation « fondamentale » est représentée par un ensemble fini de variables didactiques, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement. Inversement, en donnant des valeurs à ces variables, on génère des situations particulières donnant au savoir une signification particulière. » (Dorier, 2015, p. 112)

De telles situations mettent en place les conditions et contraintes pour rendre l'élève-chercheur autonome et provoquer chez lui un apprentissage par adaptation. Pour que l'intentionnalité didactique n'apparaisse pas explicitement à l'élève, l'enseignant doit dévoluer tout ou partie de cette situation fondamentale.

Situation a-didactique

Le « tout ou partie de la situation fondamentale » que l'enseignant délègue à l'élève est dite a-didactique. En d'autres termes, une situation a-didactique est telle que « l'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques » (Brousseau, 1986, p. 49). En dévoluant à l'élève une telle situation, l'enseignant lui permet d'interagir avec le milieu didactique qui par ses rétroactions aux actions de l'élève, amène ce dernier à construire l'apprentissage visé par l'enseignement..

Il ressort de cette position théorique l'idée que, dans la TSD, les phénomènes transpositifs sont examinés principalement à la lumière de la légitimité du savoir et sa modélisation sous forme d'une situation fondamentale au sein d'une famille de situations mathématiques. On l'a vu, que c'est aussi par l'analyse épistémologique du savoir que la théorie anthropologique du didactique aborde la question transpositive. Mais alors que la TAD questionne principalement l'axe savoir – professeur sous couvert du quadruplet constitutif des praxéologies mathématiques et didactiques [θ / Θ / T / τ], la TSD développe une approche systémique de la transposition didactique, prenant en compte le savoir, l'enseignant, mais aussi l'élève.

Ce bref retour sur la transposition didactique dans les théories de Chevallard et de Brousseau souligne d'une part, la contribution fondamentale de la didactique des mathématiques à la réflexion ébauchée par Verret en 1975, et à l'essaimage du concept de transposition à la fin des années quatre-vingts dans les différentes didactiques disciplinaires (*Cf.* les auteurs cités en section 2.1.) ; et d'autre part, rend compte de la prééminence d'approches des phénomènes transpositifs à partir du contrôle épistémologique des savoirs à enseigner. Néanmoins, nous venons de voir que la transposition didactique est aussi étudiée, notamment par le biais des ingénieries didactiques à partir des savoirs mis en scène dans la classe (ou « transposition didactique interne » selon le terme de Chevallard, 1985). Dans cette perspective, les travaux de Brousseau (1988) et d'Artigue (1986) ont mis en évidence les difficultés de reproductibilité par les enseignants, des ingénieries élaborées lors des recherches. Ces difficultés résulteraient du fait que les enseignants reproduisent les traits de surface des situations (Artigue, 1986). Est mis aussi en exergue le rôle des épistémologies professionnelles dans ces processus (Artigue, 1986, Brousseau, 1986, Perrin-Glorian, 1993), ce qui amène les didacticiens à déplacer leur regard sur les sujets (actants) du système didactique. Ces inflexions sont à l'origine du développement des concepts de contrat didactique et de milieu didactique au sein de la TSD (Brousseau, 1990) concepts qui vers la fin des années quatre-vingt-dix deviendront centraux dans les approches comparatistes et l'analyse ascendante de la transposition didactique.

2.3. L'analyse ascendante des phénomènes transpositifs : une entrée par les interactions

Depuis les années 2000, apparaît dans le champ de la didactique des mathématiques une perspective visant l'analyse des phénomènes didactiques non plus uniquement selon la logique des savoirs mais du point de vue de l'action du professeur (Sensevy, 2001, Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000). Concernant les didactiques des disciplines, Amade-Escot (2013b) identifie pour sa part, un premier moment de bascule dans les IUFM, où s'observe « une évolution des postures et une focalisation plus importante sur l'analyse descriptive des pratiques des enseignants, débutants ou chevronnés » (p. 71). S'intéresser aux pratiques ordinaires laissait ainsi entrevoir une amélioration de la formation des futurs enseignants au sein des IUFM. Un deuxième moment de bascule a lieu dans les années 2005, lorsque le projet comparatiste, s'appuyant sur les didactiques disciplinaires, met en évidence les phénomènes de co-construction du savoir au sein de la classe, induisant ainsi la nécessité d'une analyse ascendante des phénomènes transpositifs (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005). Marquant une rupture avec l'approche classique de la transposition didactique, ces auteures soulignent la nécessité de tenir à la fois deux programmes d'investigation des phénomènes transpositifs : épistémologique et didactique. Si le programme épistémologique effectue une analyse descendante *a priori*, étudiant tous les possibles en terme de savoirs mis à l'étude dans une institution donnée, ces chercheures comparatistes estiment que « le processus de transposition didactique ne peut admettre un vide au plan de la personnalisation et de la contextualisation » (*Ibid.*, p. 418). Se démarquant de Bosch, Fonseca et Gascon (2004) qui assument une posture épistémologique pour chercher les raisons mathématiques de certaines difficultés, Schubauer-Leoni et Leutenegger estiment que le programme épistémologique « ne peut que prendre appui sur un programme didactique qui travaille l'activité via l'agir d'individus concrets » (*Ibid.*, p. 418). Elles précisent plus loin que « dans une classe "quelconque", il s'agit de comprendre, à partir des systèmes de tâches proposés aux élèves, dans quelles pratiques scolaires effectives ils sont engagés, avec quels effets sur le plan des connaissances et avec quel lien de légitimité à l'égard des pratiques de référence. » (*Ibid.*, p. 414). On comprend donc ici que s'il y a nécessité d'aller voir dans les classes et de mener une analyse ascendante des phénomènes transpositifs, le programme épistémologique ne doit pas être ignoré. Il s'agit alors de mettre en exergue et d'articuler un double mouvement, que décrirons caricaturalement d' « ascendant » pour le programme didactique et de « descendant », pour le programme épistémologique. En déclarant que :

> « le lieu d'investigation des phénomènes de transposition didactique [ne se situe] ni (que) dans les savoirs ni (que) dans les sujets – enseignants et apprenants – mais dans leur action conjointe » (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005, p. 408).

… ces deux auteures mettent en avant le caractère interactionnel de la relation didactique entre enseignant, élèves, savoirs au sein de laquelle l'analyse interactionnelle du processus de co-construction du savoir met en exergue, sous couvert de l'analyse épistémique des objets de savoirs mis à l'étude, les effets des actions de chacun des actants dans la dynamique évolutive du système triadique.

Aussi, le projet comparatiste propose-t-il un programme de recherche visant à rendre intelligible les phénomènes transpositifs articulant une analyse ascendante de la transposition didactique (s'appuyant sur les savoirs réellement mis à l'étude et une analyse de leur co-construction par les sujets de l'institution « classe ») et une nécessaire vigilance épistémologique rendue possible par l'analyse a priori des savoirs pris pour référence, leur légitimité culturelle, sociale et institutionnelle.

2.4. Commentaires conclusifs

Les phénomènes transpositifs peuvent être abordés dans les didactiques, et en didactique de façon générale, selon deux types d'entrées : une entrée qui privilégie l'analyse du savoir pour produire des situations de classe et une entrée qui s'attache à partir des transactions entre les acteurs du système didactique à mettre en exergue le savoir réellement construit. Ces deux entrées doivent être articulées si l'on souhaite rendre intelligible les processus à l'œuvre dans l'enseignement de toute discipline scolaire.

Nous situons notre travail dans la seconde perspective d'analyse des phénomènes transpositifs, c'est-à-dire privilégiant une approche ascendante et interactionnelle, sans pour autant sous-estimer le nécessaire travail épistémologique à la lumière duquel doivent être conduites les interprétations. En effet, la particularité de notre thèse est de prendre en considération les avancées produites par les ingénieries broussaldiennes concernant la mise en scène des savoirs (depuis leur dépersonalisation, leur décontextualisation jusqu'à leur re-contextualisation en classe) en nous appuyant sur les travaux ayant produit des ressources didactiques selon une approche légitimée par les savoirs. En d'autres termes, dans un mouvement descendant de transposition didactique, nous nous appuyons sur l'outil phénoménotechnique qu'a constitué l'ingénierie didactique de « la soustraction » (Berté, 1986) pour que cette dernière, une fois précipitée dans des classes sous la responsabilité des enseignants, puisse être étudiée cette fois dans un mouvement ascendant à partir de l'analyse des interactions *in situ*. Nous nous situons donc dans un double mouvement d'étude de la transposition didactique l'un épistémologique, l'autre interactionnel avec comme horizon de produire des connaissances sur les déterminants qui pèsent sur les usages (ou les mésusages) de ressources didactiques.

Notre projet est ainsi d'effectuer une étude ascendante de la transposition didactique lors de la mobilisation de l'ingénierie didactique « soustraction » par trois enseignantes dans des contextes institutionnels différents. Retenant la nécessité d'une entrée à la fois par le savoir et par les sujets de l'interaction, nous nous proposons de mener une analyse des transactions didactiques pour rendre compte des phénomènes transpositifs dans l'enseignement de la soustraction à l'école primaire. Aussi, nous pensons que l'approche de l'action conjointe en didactique (ACD), qui est éminemment pragmatique et interactionnelle, est pertinente pour rendre compte de l'objet central de notre thèse. Avant de développer ce cadre théorique d'inscription de notre recherche de thèse, nous présentons dans la section suivante les principes généraux qui structurent les ingénieries didactiques élaborées en TSD, puisque l'une d'entre elle, celle de la soustraction, constituera la dimension expérimentale commune aux trois études de cas.

3. Le statut des ingénieries didactiques dans la TSD.

Bessot (2011) citant Brousseau et Brousseau (2006) lors d'un séminaire au laboratoire DAES[36], rappelle quelques principes fondamentaux constitutifs des problématiques de recherche liés aux ingénieries didactiques développées notamment au COREM :

> « - L'ingénierie de production et de développement vise uniquement un enseignement ;
> - l'ingénierie phénoménotechnique a pour objet de permettre l'étude empirique des phénomènes didactiques, dans des circonstances compatible avec l'éthique de l'enseignement » (Bessot, 2011, p. 30).

Poursuivant son propos, elle rappelle à la suite de Brousseau qu'au sein de la TSD, l'ingénierie didactique est ainsi l'indispensable instrument de confrontation de la science didactique avec la contingence, parce qu'elle est tout d'abord, l'instrument et l'objet des observations, ainsi que « le moyen de mise en œuvre et de diffusion de ses résultats vers les enseignements et le public. C'est en ce sens que les ingénieries didactiques sont cœur de la didactique (Brousseau et Brousseau, 2006, cités par Bessot, 2011). Nous avons déjà indiqué que Brousseau caractérise l'ingénierie didactique comme un outil méthodologique ayant une fonction phénoménotechnique, c'est-à-dire produisant des connaissances fondamentales, mais a aussi pour un objectif de produire des ressources pour la classe. Pour Brousseau (1978b) l'observation est décisive pour la production de connaissances sur le fonctionnement des systèmes didactiques. Il la conçoit non pas comme une observation de pratique, encore moins ordinaire, mais comme un dispositif construit par le chercheur, pour étudier les possibles et les contraintes d'une mise en œuvre d'un ensemble de séances auparavant construites au COREM en partenariat avec les enseignants, même si dans cette construction, le didacticien prend à sa charge les choix épistémiques qui président à l'agencement des situations didactiques. Dans ce cadre les concepts de la TSD se sont construits dans une dialectique entre théorie et observation de pratique (Brousseau, 1978b). Par exemple les concepts de contrat didactique et de dévolution ont émergé à partir du « cas de Gaël » (Brousseau, 1999/2009), étude de cas à l'origine de la construction de l'ingénierie didactique sur la soustraction. Mais les travaux d'ingénierie didactique menées au COREM ont aussi été animés par une problématique de conception de prototypes d'enseignement à visée

[36] DAEST : Laboratoire de Didactique des enseignements Scientifiques et Technique de l'Univerité Victor Segalen, Bordeaux 2

transformative des pratiques enseignantes. Ces prototypes ont diffusé au niveau de la noosphère. De nombreuses situations proposées dans les documents d'accompagnement des programmes français de l'école primaire ou même du secondaire font référence à des situations fondamentales : par exemples, la situation des wagons d'ERMEL (pour introduire la fonction mémoire du nombre), la situation puzzle (pour l'introduction de la proportionnalité), la situation de l'épaisseur d'une feuille de papier (pour l'introduction des rationnels et décimaux) pour ne citer que quelques exemples emblématiques.

Plus récemment, revenant sur ses travaux au COREM, Brousseau (2013) formule une nouvelle définition de l'ingénierie didactique :

> « L'ingénierie didactique s'occupe de créer des modèles consistants et pertinents et de réaliser des dispositifs d'enseignement d'une connaissance précise, destinés à décrire ou à prévoir, et à expliquer les évènements observables d'un épisode d'enseignement déterminé (situations ou curriculum) observé ou envisagé :
>
> - observé, afin de recueillir les informations qui permettront d'en rendre compte, d'expliquer a posteriori son déroulement et ses résultats, et de permettre sa reproduction
> - envisagé, afin de déterminer les conditions reproductibles (réalisables et communicables) de son déroulement et de ses résultats observables.
>
> L'étude de la consistance et de la pertinence de ces modèles renvoie à un examen critique de tous les concepts relatifs à l'enseignement, à l'apprentissage et à la constitution même de la matière enseignée » (Brousseau, 2013, p. 4).

Selon Brousseau, l'ingénierie didactique est alors devenue, de facto, une partie de la didactique des mathématiques « où se conçoit et s'étudie, empiriquement, expérimentalement et théoriquement, *les dispositifs précis réalisables, observables et reproductibles d'enseignement*[37], spécifiques de diverses formes de connaissances d'entités mathématiques déterminées » (Brousseau, 2013, p. 6). Comme nous l'évoquions précédemment la question de la reproductibilité des ingénieries didactiques est critique. Artigue (1996) à ce sujet met en évidence un double phénomène, celui de l'obsolescence des situations didactiques et celui des contraintes de leur reproductibilité. Elle les situe à deux niveaux, interne et externe. Au niveau interne, Artigue pointent les difficultés à maintenir au fil du temps les conditions susceptibles d'engendrer chez les élèves une même compréhension de la notion enseignée. Au niveau externe, elle met en évidence que les enseignants reproduisent une « histoire » qui, sous les traits d'un déroulement semblable à celui des années précédentes, se caractérise par

[37] Souligné par nous.

des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques présidant au « bon » fonctionnement des situations. Pour cette didacticienne, « c'est en termes de relation d'incertitude qu'il convient de penser les rapports entre reproductibilité interne et reproductibilité externe. En d'autres termes, une exigence forte de reproductibilité externe ne peut être satisfaite qu'en sacrifiant la reproductibilité interne qui est, en fait, celle visée » (Artigue, 1996, p. 268).

Pour conclure sur le statut des ingénieries didactiques dans les recherches menées sous couvert de la TSD, les problèmes identifiés par la question de la reproductibilité confortent notre choix d'étudier les conditions qui influencent la mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans les classes de l'école primaire suisse et française. D'une part, parce que cette ingénierie qualifiée de robuste (Quilio et al., 2012) permet de mettre à l'épreuve la question de sa reproductibilité dans trois contextes différents en explorant à la fois les influences des pré-construits institutionnels sur les pratiques d'enseignement, et celles liées à l'épistémologie pratique des professeurs. D'autre part, parce que ce choix de méthode comparatiste nous permet de travailler dans le double mouvement d'analyse épistémique et interactionnelle de la transposition didactique. Nous bénéficierons en effet pour mener nos analyse de l'ensemble des analyses épistémologiques au fondement de l'ingénierie de la soustraction, tout en nous dotant d'un cadre d'étude *in situ* des transactions didactiques au principe de l'analyse ascendante des phénomènes transpositifs. Nous en présentons les principaux aspects dans la section qui suit.

4. Une inscription théorique dans le modèle de l'action conjointe en didactique

Le modèle de l'action conjointe en didactique (ACD), sans négliger l'entrée par l'objet d'enseignement et d'apprentissage, privilégie, en référence aux théories de l'action, une entrée par les analyses *in situ* des relations qu'entretiennent les sujets didactiques (élèves et enseignants) avec les savoirs mis à l'étude dans la classe.

4.1. Un système didactique insécable

L'analyse de l'action conjointe en didactique fait l'objet d'une élaboration depuis les années 2000 dans un groupe de didacticiens comparatistes. Elle a initialement été pensée en didactique des mathématiques comme une théorie de l'action du professeur (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000) en réponse à un questionnement sur la formation des maîtres. Elle a ensuite été formalisée par Sensevy en termes de théorie de l'action conjointe en didactique

(TACD) dans l’ouvrage collectif édité par Sensevy et Mercier (2007). Il d’agit de modéliser les rapports entre savoir, élèves et professeur comme relation ternaire intrinsèquement indissociable (Schubauer-Leoni, 1998). Dans le système didactique le travail du professeur ne peut être dissocié de celui de l’élève relativement au savoir mis en jeu. Leutenegger (2009) le décrit comme « insécable ». Dans son article « Des catégories pour décrire et comprendre l’action didactique », Sensevy (2007) caractérise l'action didactique en trois points :

- Elle est conjointe : ce qui caractérise « avant tout autre chose l'action didactique, [c'est] tout d'abord le fait qu'une action didactique est nécessairement conjointe. Le terme enseigner, d'une certaine manière, demande le terme apprendre ; le terme apprendre demande le terme enseigner. Il existe certes des moments où quelqu'un enseigne sans que personne n'apprenne rien ; on peut d'autre part clairement apprendre certaines choses sans être enseigné. Mais ce qui caractérise une institution didactique, c'est qu'on y enseigne à des personnes sensées apprendre » ;
- Elle s’inscrit dans la durée : l’action didactique est « fondée sur une communication dans la durée entre le professeur et les élèves, donc sur une relation qui actualise l’action, et qui est actualisée en retour par celle-ci » ;
- Elle est « centrée sur un objet bien précis : le savoir qui doit être transmis » (Sensevy, 2007, p. 14)

4.2. Un modèle d’analyse en filiation avec la TSD et la TAD

Le modèle de l’action conjointe (Sensevy, 2007) reprend des concepts initialement développés en didactique des mathématiques puis mobilisés dans différents travaux de didactique comparée :

- les concepts de milieu didactique et de contrat didactique ;
- les descripteurs de l’action conjointe (mésogenèse, topogenèse, chronogenèse) ;
- les modalités de l’agir professoral (définir, dévoluer, réguler, institutionnaliser).

4.2.1. La dialectique du milieu et du contrat didactique

Milieu didactique

Contrairement à la maïeutique socratique qui doit tout à l’intention didactique (le maitre qui par un jeu de questions bien ciblé « accouche » l’élève du savoir) ou de la théorie piagétienne qui, selon Brousseau (1986), ne semble rien devoir à l’intention didactique (l'élève apprend dans une « interaction faite d'assimilations et d'accommodations »), le concept de milieu didactique tel que élaboré par Brousseau donne une place centrale au fait que l'intention didactique organise son agencement, afin que l'élève puisse « agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement » (*Ibid*., p. 49). Aussi, Brousseau définit le milieu comme étant le système antagoniste de l'élève (l'actant) :

> « Le milieu est le système antagoniste de l'actant. Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. L'actant est « ce » qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. […] Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet. » (Brousseau, 2010, Glossaire en ligne[38])

Sensevy complète en le déclarant antagoniste et rétroactif : « si l'élève finit par produire une stratégie gagnante au jeu, ce n'est pas grâce à son habileté de déchiffrement des intentions didactiques du professeur et des indices que celui-ci peut laisser sur sa route. C'est parce que les rétroactions du milieu auront réfuté les stratégies inopérantes, et validé les bonnes » (Sensevy, 2007, p. 15).

Le concept de milieu, en didactiques des disciplines, a fait l'objet de nombreux débats (pour une synthèse, voir Amade-Escot & Venturini, 2009). Amade-Escot (2007) le définit comme le « système des objets (matériel, symboliques, langagiers) qui détermine les pratiques d'étude de savoirs » rajoutant que celui-ci « résulte d'une co-construction entre professeur et élèves » (p. 120). En effet, si l'enseignant est bien à l'origine d'un milieu didactique primitif, ce sont les transactions élèves – élèves ou élève(s) - enseignant qui le font évoluer. Ainsi, les gestes des élèves comme ceux de l'enseignant, les dires, les écrits, les gestes, sont autant de transactions qui le plus souvent modifient le milieu didactique initial au fil des échanges en classe. Pour autant, tous les éléments versés dans le milieu didactique ne font pas sens aux élèves (et peut-être à l'enseignant ?). Ce point est décisif pour comprendre ce que Brousseau (1986, 1990) nomme « la dialectique du contrat et du milieu », comme le développe Hersant (2010). Car c'est en raisons des significations implicites que les actants (élèves et professeur) attribuent au milieu que les interactions en classe sont potentiellement susceptibles de faire évoluer le contrat didactique.

---

[38] http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Contrat didactique

Ce concept est initialement proposé par Brousseau dans l'étude du « cas Gaël » élève en échec électif en mathématiques (1980, 2009). L'auteur définit le contrat didactique comme « un système d'obligations réciproques qui détermine ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre » (1986, p. 51). Pour Brousseau, le contrat didactique rend compte de la continuation des phénomènes transpositifs dans la classe en ce qu'il est le résultat de « négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir … » (Brousseau, 1986, p. 51). Il n'est pas un contrat juridique en raison des dimensions implicites qui président à son évolution. Ainsi, "le concept théorique en didactique n'est pas le contrat (le bon, le mauvais, le vrai ou le faux) mais le processus de recherche d'un contrat hypothétique » (Brousseau, 1982, p. 39). Dans le prolongement de la perspective broussaldienne, différents auteurs (Amade-Escot, 2005 ; Sarrasy, 1995 ; Schubauer-Leoni, 2003) pointeront que le contrat didactique doit être compris comme un contrat social de communication spécifique d'une intention didactique, traduisant « la dynamique évolutive des attentes réciproques vis-à-vis de l'enjeu de savoir à enseigner et à apprendre » (Amade-Escot, 2007, p. 33). Ligozat (2008) fait remarquer dans sa thèse que le système d'attentes réciproques se joue à deux niveaux :

> (a) D'un côté, *des règles stables*, qualifiées de « pérennes » par Mercier (1988), sont censées installer un climat de confiance dans la relation didactique, de telle sorte que si les élèves savent qu'ils y entrent pour apprendre quelque chose, l'enseignant se doit de proposer des problèmes solvables, où il y a bien quelque chose à apprendre. […]
>
> (b) Mais, d'un autre côté, si le contrat était complètement stable, défini en tout point et à tout moment, il ne pourrait y avoir de nouveaux apprentissages possibles. Brousseau souligne le paradoxe essentiel sur lequel repose le contrat didactique dans le cadre de l'adaptation : l'enseignant a l'obligation sociale d'enseigner, mais pour y réussir, *il ne peut pas dire à l'élève ce qu'il veut obtenir de lui*, sous peine de ne pas obtenir l'effet d'apprentissage escompté (Ligozat, 2008, p.66).

Il ressort de ces éléments que le contrat didactique se rend visible dans ses ruptures, d'une part au regard du contrat pérenne en usage dans la classe, mais aussi au fil des transactions. On saisit dans la citation précédente de Ligozat, le caractère paradoxal du contrat didactique : l'enseignant ne doit pas dire. Il se doit être réticent à dire ce qu'il sait relativement au savoir visé au risque, dans le cas contraire, de faire disparaître le caractère a-didactique de la situation. Pour autant, l'élève doit accepter d'entrer dans la relation didactique et prendre en charge l'avancée du savoir alors qu'il ne sait pas. En fait, ce paradoxe montre le double jeu de l'enseignant : d'une part, il fait semblant de ne pas savoir et dévolue la situation et d'autre part, une fois que la situation résolue, il prend en prend en charge l'avancée du savoir et l'institutionnalise. Par ailleurs, détenant le savoir, l'enseignant peut par quelques subterfuges, provoquer une accélération chronogénétique, abaisser ses intentions didactiques, faire semblant de reconnaître une avancée du savoir du côté des élèves : effet Jourdain et effet Topaze révèlent alors une tentative de contournement d'une difficulté dans la relation didactique.

4.2.2. Les descripteurs de l'action conjointe : mésogenèse, chronogenèse, topogenèse

Dans le modèle de l'ACD les concepts de mésogenèse, chronogenèse et topogenèse, initialement proposés par Chevallard (1992) s'articulent sous forme d'un triplet de descripteurs visant à décrire ce qui se passe dans la classe tant du côté du professeur que des élèves et de leur action conjointe (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002 ; Sensevy 2007) : comment le savoir est-il co-construit et mis en œuvre ? Quelle place élèves et professeur occupent-ils vis-à-vis du savoir construit ? À quel rythme le savoir est-il conduit ? Quels sont les objets constituant le milieu, sachant que ceux-ci sont évolutifs dans la co-construction du savoir ?

L'étude de l'action conjointe fait aujourd'hui l'objet de développements suivant les unités de recherche qui s'inscrivent dans la perspective d'analyse des pratiques didactiques en classe (Amade-Escot & Leutenegger, 2013). Suivant les centrations et les thématiques de recherche, plusieurs inflexions sont repérables dans l'évolution, voire dans la diversification du modèle théorique initial, au point qu'il nous paraît plus judicieux de parler d'étude(s) de l'action conjointe en didactique que d'un ensemble théorique unifié.

Cette brève présentation des questionnements actuels dans la communauté naissante des didacticiens comparatistes nous amène donc à privilégier certains des éléments de la modélisation pour rendre compte des usages faits par les enseignants lorsqu'on met à leur disposition une ingénierie didactique. Plus spécifiquement et comme discuté supra, l'ingénierie de la soustraction, sur laquelle s'appuie notre projet de thèse, a été élaborée dans les années 80 dans le cadre de la TSD. L'analyse des mises en œuvre sera dans notre travail empirique, mené sous couvert du modèle de l'ACD, sans pour autant prendre en considération les notions de jeu(x) épistémique(s) et jeu(x) d'apprentissage(s) actuellement développées dans certains travaux (Gruson, Forest, & Loquet, 2012 ; Sensevy, 2011). Nous nous proposons de décrire l'action didactique conjointe dans différents systèmes selon les descripteurs évoqués précédemment. Nous faisons nôtre le point de vue selon lequel la mésogenèse est première (Amade-Escot & Venturini, 2009 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger ; 2007). Ainsi, pour rendre compte ce qui se passe en classe dans l'action conjointe du professeur et des élèves, nous retenons :

- D'un point de vue mésogénétique : la mésogenèse décrit la genèse du milieu et l'évolution du système des objets introduits dans le milieu. Les objets introduits peuvent être matériels, langagiers ou symboliques. Si le milieu primitif est créé par l'enseignant, il évolue de part les interactions élèves-professeur : « la mésogénèse répond à l'élaboration d'un système commun de significations entre le professeur et les élèves, système dans lequel les transactions didactiques trouvent leur sens. » (Sensevy, 2007, p. 30). Nous nous intéressons aux modifications apportées par les acteurs observés aux milieux initialement conçus dans l'ingénierie construite par le COREM. En quoi les différences culturelles et institutionnelles en France et en Suisse, les degrés d'expérience en enseignement influencent-ils leurs mises en place par les enseignants ? Avec quelles incidences sur l'activité mathématiques des élèves ?
- D'un point de vue chronogénétique : la chronogenèse décrit la genèse et l'avancement des objets de savoir au fil du temps didactique. En effet, comme l'a particulièrement décrit Chevallard (1991) à propos de la transposition didactique, tout enseignement de savoirs peut être décrit comme une progression temporelle principalement sous contrôle du professeur (considéré comme un « chronomaître »). Il reste cependant que le savoir est porté conjointement par le professeur et les élèves, mais pas forcément sur des échelles temporelles identiques. Le professeur décide lui-même en amont, de la chronologie des savoirs mis à l'étude en élaborant une progression annuelle ou séquentielle. L'élève peut être en retard, en phase ou en avance sur l'échelle temporelle impulsée par l'enseignant. Aussi, l'enseignant fait-il évoluer le temps didactique en agissant sur le milieu de manière à ce que idéalement

l'ensemble de ses élèves puissent atteindre l'objectif visé. On peut alors se demander si, comme pour la mésogenèse et la topogenèse, la chronogenèse n'est pas elle aussi affectée par les différences culturelles et institutionnelles ou le degré d'expérience en enseignement.

– D'un point de vue topogénétique : la topogenèse éclaire l'action des transactants engagés dans l'action didactique. Elle décrit les positions relatives des élèves et du professeur dans la gestion de l'activité. Élèves et professeur interagissent sur les objets de savoir, les faisant évoluer tout au long du temps didactique. La topogenèse rend ainsi compte de la manière dont les acteurs partagent les responsabilités dans la manipulation des objets de savoirs, l'un dans son rôle d'enseignant, l'autre dans son rôle d'élève. Quelles places ces actants occupent-ils vis-à-vis du savoir construit ? Les différences culturelles et institutionnelles en France et en Suisse romande d'une part, les degrés d'expérience des enseignants d'autre part ont-ils une incidence sur les positions topogénétiques des acteurs du système didactique ?

Ainsi que le font remarquer certains didacticiens comparatistes, ces trois genèses, en tant que concepts descriptifs, sont étroitement articulées et « permettent de décrire la dynamique de l'étude, une dynamique dans laquelle professeur et élèves doivent constamment se repositionner les uns par rapport aux autres et réciproquement, en fonction de l'évolution de leur responsabilité envers les objets de leurs pratiques et les savoirs partagés, voire distribués au sein de la classe » (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002, p. 11). Ou pour le dire autrement « à chaque étape de la mésogenèse correspond un état de la topogenèse et de la chronogenèse » (Amade-Escot & Venturini, 2009, p. 29).

Ce triplet des genèses permet ainsi de décrire le système didactique en évolution. Il reste que dans le cadre de notre thèse qui vise à rendre compte de la manière dont l'ingénierie de la soustraction est utilisée les enseignants, il est nécessaire de s'intéresser plus particulièrement aux actions du professeur.

4.2.3. Les descripteurs de l'action professorale

Dans le modèle de l'ACD, l'action du professeur est analysée au travers de quatre autres descripteurs : « définir, dévoluer, réguler (gérer les incertitudes), instituer » (Sensevy, 2007) :

Définir regroupe les actions du professeur qui consistent à introduire les objets de savoir et à établir le cadre d'une situation à partir de l'agencement d'un milieu didactique

« primitif ». Cela concerne aussi des actions telles que rappeler à la mémoire de l'élève certaines activités des séances précédentes.

L'action de définir est articulée à celle de dévoluer au sens de Brousseau (1986), c'est-à-dire des actions par lesquelles le professeur accepte de se dessaisir du problème pour que les élèves sans emparent en première personne. Il s'agit d'actions par lesquelles le professeur cherche à ce que l'action de l'élève ne soit produite et justifiée que par les nécessités du milieu didactique ou ses connaissances immédiates, et non par l'interprétation des procédés didactiques de l'enseignant. La dévolution peut s'adresser à un élève, un groupe d'élève ou à la classe entière.

Lorsque le processus de dévolution est engagé le travail du professeur consiste à réguler l'action des élèves. Réguler désigne les actions produites en vue d'obtenir de la part des élèves des stratégies d'apprentissage pertinentes. Ces actions peuvent par exemples consister à réaménager le milieu, à réexpliquer la tâche si nécessaire, à commenter les productions d'élèves, ou d'un élève à destination des toute la classe. Les actions de régulation ont pour visée de gérer l'incertitude et le maintien de la relation didactique.

Au cours des régulations, et parfois à la suite, le professeur propose des formes d'institutionnalisation. Pour Brousseau (1998), il s'agit d'un processus par lequel le professeur indique aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture hors de l'institution-classe, ou seront provisoirement tenues pour base de travail dans la classe. L'institutionnalisation permet au professeur et aux élèves de rendre légitime le savoir à différents moments de l'enseignement. Elle peut consister en la reconnaissance par l'enseignant de la valeur et de la validité d'une production d'élève, ou d'une stratégie que toute la classe devra à partir de ce moment, tenir pour valide.

Dans notre travail de thèse, ces quatre descripteurs permettront de caractériser les interprétations professorales à partir desquelles est gérée la construction du savoir visé dans la classe. L'étude de ces actions particulières permettra aussi de documenter l'épistémologie pratique des professeurs en tant qu'un des déterminants du fonctionnement du système didactique observé (Amade-Escot, 2013a ; Sensevy, 2007).

4.3. L'épistémologie pratique des professeurs

Qu'ils soient fondés sur des « ingénierie didactiques » ou sur des observations du « didactique ordinaire », de nombreux travaux ont cherché à accéder à l'intelligibilité des pratiques enseignantes. Brousseau (1986) est un des premiers à évoquer la notion

« d'épistémologie du professeur » pour désigner ce à quoi se réfère implicitement l'enseignant, c'est-à-dire au fonctionnement implicite de la discipline ou à un modèle, l'objectif premier étant de « résoudre les conflits du contrat didactique » (p. 65). Cette « épistémologie professionnelle » doit faire partie de la culture commune de l'école (élève et parents d'élèves) pour que les justifications des apprentissages puissent être reçus des parents et des élèves. L'enseignant réorganise les connaissances à enseigner de façon à ce qu'elles soient conformes à cette épistémologie professionnelle. C'est, pour Brousseau, le début d'un processus de transposition didactique.

Sensevy (2007) prolonge la réflexion en proposant le terme « d'épistémologie pratique ». Il écrit :

> « lorsqu'un professeur organise l'enseignement dans sa classe, il le fait notamment en fonction d'un certain nombre d'idées, plus ou moins explicites, qu'il entretient à propos du savoir lui-même, de la nature foncière de l'apprentissage, de le signification de l'enseignement » (p. 33)

ajoutant ensuite que cette épistémologie est pratique

> « parce qu'elle a des conséquences pratiques, elle est directement ou indirectement agissante dans le fonctionnement de la classe ; parce qu'elle est produite en grande partie *par* la pratique, dans la confrontation aux causalités que le professeur pense identifier dans celles-ci, et dans les habitudes de perception et d'action cristallisées dans les tâches au moyen desquelles il enseigne ; parce que, même si elle est en grande partie non intentionnelle, elle est produite *pour* la pratique, comme réponse générique aux multiples problèmes qu'elle révèle » (p.38)

Pour cet auteur, l'épistémologie pratique permet d'accéder à la compréhension de l'action didactique au sein du système didactique.

Reprenant Dewey (1934), Sensevy, Maurice, Clanet et Murillo (2008) font le postulat qu'il est impossible de comprendre l'action du professeur sans la relier à son expérience dans le métier. Ne se limitant pas aux savoirs acquis en formation initiale, l'enseignant se construit des savoirs tout au long de son activité professionnelle. Pour Chevallard (1989) le rapport à un objet de savoir d'un enseignant est construit en fonction des différents points de vue qu'il a sur cet objet : objet savant, objet d'apprentissage, objet d'enseignement, difficultés didactiques, choix de mise en œuvre dans son institution (didactique, pédagogique, matérielle) etc. Chevallard définit le rapport au savoir personnel comme la résultante d'une pluralité de rapports institutionnels. Le rapport au savoir institutionnel est la manière dont un individu assujetti à une institution agit avec l'objet de savoir. Le rapport personnel de l'enseignant à un objet de savoir se construit alors à partir des différentes institutions auxquelles il appartient (école, groupes de formations continues, syndicat, fédération de parents d'élèves etc. …) ou auxquelles il a appartenu (par exemple les lieux d'apprentissage initiaux tels que universités, ESPE, les mouvements pédagogiques, etc.). Nous référant à Sensevy (2007), nous pouvons alors considérer que la pluralité de ces rapports au savoir détermine l'épistémologie pratique du professeur. En ce sens, l'épistémologie pratique est un bon candidat pour saisir certaines déterminations de l'action du professeur en situation, notamment pour comprendre les façons dont il se saisit des ressources didactiques qui lui sont données, ou qu'il choisit.

Reprenant Amade-Escot (2014), « l'épistémologie pratique du professeur renvoie à l'ensemble des savoirs qui informent sur ce qu'il fait et dit dans sa classe sans pour autant qu'il ne soit toujours en mesure de les expliciter » (p. 20). Si l'enseignante n'est pas toujours en mesure d'expliciter les raisons de ses actions dans la classe, comment alors accéder à son épistémologie pratique ? Accéder à l'épistémologie pratique du professeur suppose de se rendre attentif au contenu enseigné mais aussi à la manière dont cela est enseigné, en enquêtant au plus près des pratiques de classe.

Pour cela, il est nécessaire de mener l'enquête sur plusieurs plans : à partir de l'observation en classe afin de rendre compte des transactions entre les actants, mais aussi à partir d'entretiens *ante* et *post* avec l'enseignant afin d'accéder au sens que ce dernier donne à ses actions dans la classe, enfin à partir d'une analyse *a priori* des tâches qu'il propose aux élèves afin de déterminer les enjeux de savoirs mis à l'étude. La triangulation de l'ensemble de ces corpus permet ainsi de documenter l'épistémologie pratique de l'enseignant. Nous détaillons plus amplement cette constitution du corpus dans la partie méthodologique.

4.4. Pour conclure sur l'inscription théorique de la recherche

Notre recherche de thèse portant sur une analyse de pratiques d'enseignement dans des classes ordinaires, l'ACD est donc pour nous un cadre pertinent pour rendre compte dans une perspective comparatiste des modalités de mise en œuvre de l'ingénierie didactique sur la co-construction du savoir relatif à la soustraction dans des classes primaires suisse et française et par des enseignants chevronnés ou en début de carrière.

Le triplet des genèses adjoint aux quatre descripteurs nous permettra d'une part, de mettre à jour l'évolution ainsi que la dynamique des systèmes didactiques observés et d'autre part, de rendre compte de l'épistémologie pratique des enseignants aux prises avec la mise en œuvre de l'ingénierie broussaldienne. L'épistémologie pratique des professeurs étant un thème de recherche du laboratoire de Toulouse, le pré-construit institutionnel et culturel un thème de recherche de Genève, nous nous inscrivons dans la lignée des travaux des deux institutions pour identifier quels sont les effets combinés de l'épistémologie pratique des enseignants et des pré-construits culturel et institutionnel sur l'enseignement de la soustraction au cycle 1 de l'école élémentaire dans les deux pays. Notre travail empirique visera tout particulièrement à saisir leur dynamique à travers deux axes de comparaison permettant d'explorer en quoi les déterminants de l'action conjointe Sensevy (2007), à la fois dans leur dimension institutionnelle et au regard de l'épistémologie pratique des professeurs, influencent les mises en œuvre, et par voie de conséquence la reproductibilité de l'ingénierie didactique de la soustraction.

À la suite de notre revue de questions portant sur les travaux de didactique des mathématiques en lien avec notre projet de thèse (voir chapitre précédent), et au regard des choix théoriques que nous venons de discuter, nous pensons être en mesure, comme le soutient Dorier (1997), d'endosser une posture de didacticien : en effet, selon cet auteur, « le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit à la production du savoir […] en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs » (p. 9) car « toute analyse didactique doit englober un aspect de nature épistémologique » (p. 17).

C'est sur la présentation de la problématique de notre thèse que nous concluons, dans la section qui suit les deux premiers chapitres de cette première partie du manuscrit.

5. Problématique et questions de recherche

Notre recherche de thèse s'attache à comparer les manières dont trois enseignantes, une en Suisse romande et deux en France, intègrent dans leur pratique l'ingénierie didactique broussaldienne de la soustraction, élaborée dans les années soixante-dix au sein du COREM. Notre visée est d'étudier les conditions de reproductibilité de cette ingénierie. Dans les deux pays, les enseignantes ont été sensibilisées préalablement à cette ingénierie :

- En France, ce temps de sensibilisation a été conduit par le biais d'une recherche collaborative d'une durée de 3 années que nous dirigeons dans le cadre de l'ESPE[39] de Toulouse. C'est à l'occasion de cette recherche collaborative que les données ont été recueillies dès la première mise en œuvre de l'ingénierie dans les classes par deux enseignantes volontaires, l'une chevronnée, l'autre en début de carrière (pour des précisions,

[39] ESPE : École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

voir chapitre suivant sur les méthodes). Il s'agit donc de la toute première confrontation des enseignantes à cette ingénierie, non encore travaillée avec le chercheur. Il convient d'ajouter ici, que si la recherche collaborative a permis de recueillir les données qui sont analysées en deuxième partie de ce manuscrit, l'étude de son processus et de ses résultats en terme de formation des enseignants ne fait pas partie de la thèse, contrairement à d'autres travaux menés en didactique des mathématiques sous divers cadres conceptuels (Bednarz, Poirier, Desgagné, & Couture, 2001 ; Quilio, 2016 ; Roditi, 2011 ; Roditi & Trgalova, 2016 ; Sensevy, 2009 ; Sensevy, Forest, Quilio, & Moralles, 2013). En elle-même la recherche collaborative, toujours en cours au moment de la rédaction de notre manuscrit, ne constitue donc pas l'objet d'étude de notre recherche de thèse.

- À Genève, le temps de sensibilisation a eu lieu dans le cadre d'un partenariat de recherche entre la FPSE[40] et le Département de l'instruction publique genevoise, dans le cadre du Réseau Maison des Petits, sous la direction de F. Leutenegger. Les données ont été recueillies auprès d'une enseignante chevronnée par cette chercheure, qui dans le cadre de la cotutelle de cette thèse, nous a permis d'accéder à l'intégralité des traces collectées lors d'une première mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction par cette enseignante.

Ainsi, dans les deux pays, la sensibilisation des enseignants à l'ingénierie de la soustraction a été menée dans le cadre de « recherches collaboratives » (Desgagné, et al., 2001). Ces auteurs montrent que conduire la mise en œuvre d'une ingénierie dans un cadre collaboratif entre praticiens et chercheurs permet de poser « un regard complice et réflexif sur la pratique » ordinaire d'enseignement et non d'imposer le modèle de l'enseignement élaboré par le didacticien. Ce point est important car il permet de rendre comparables les sites français et le site genevois.

Comme déjà évoqué au fil de ce chapitre, le design de la recherche comporte plusieurs plans de comparaison que nous approfondirons dans le chapitre sur les méthodes. Ces différents plans sont au service de notre problématique de recherche qui, pour l'essentiel, s'attache à comparer les usages (et les mésusages) de ressources didactiques dans différents contextes. La visée centrale de notre thèse consiste en effet à apprécier le poids des déterminants institutionnels et celui, plus individuel, de l'épistémologie pratique des

[40] FPSE : Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation

professeurs dans la mise en œuvre l'ingénierie de la soustraction au primaire genevois et français. Le cœur de la recherche vise ainsi à comparer le fonctionnement de différents systèmes didactiques et peut être donc résumé par le schéma ci-après :

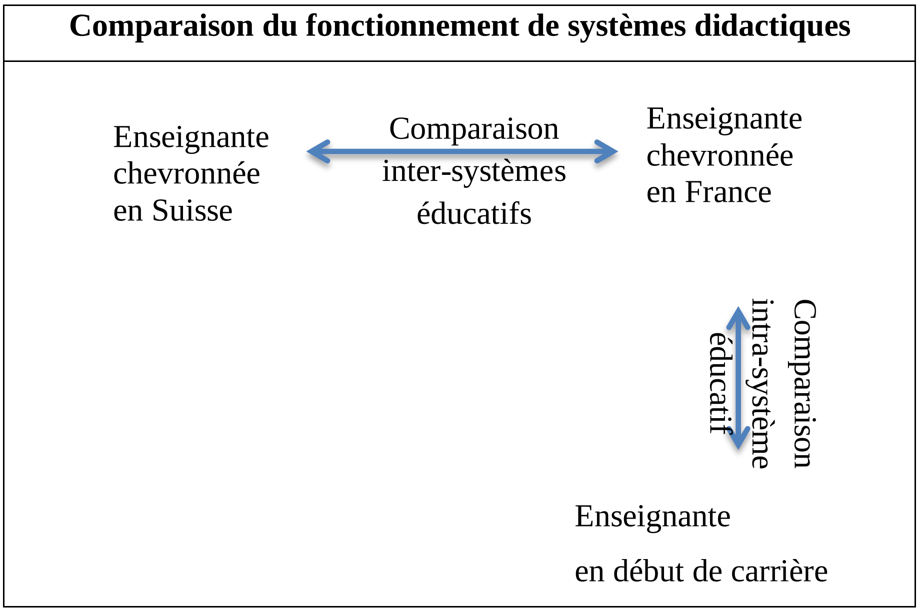


Figure 2 : Schéma de l'étude comparatiste

Ce dispositif de comparaison offre l'opportunité de conduire d'une part, une étude comparatiste inter-systèmes éducatifs suisse et français afin d'étudier l'influence des pré-construits curriculaires sur les pratiques. Il permet en outre de comparer les fonctionnements de systèmes didactiques contrastés du fait de l'expérience des enseignantes observées, afin d'accéder aux effets de leur épistémologie pratique quant à l'interprétation de l'ingénierie didactique, dont on a vu que des travaux antérieurs ont pointé le rôle dans la reproductibilité des ingénieries didactiques. C'est le croisement de ces comparaisons qui sous-tend notre problématique.

Dans ce cadre, le *tertium comparationis* retenu relève de la composante expérimentale que constitue l'ingénierie didactique de la soustraction. Nous nous appuyons sur deux documents la décrivant : l'un rédigé par une participante au COREM à partir « des préparations des professeurs et des chercheurs et des observations faites dans l'école » (Berté, 1996) et l'autre rédigé par Quilio (2010) et annoté par des enseignants français l'ayant mis en œuvre. De la même façon qu'un « texte de programme appelle une interprétation » (Arsac, 1989), nous pensons que le texte de l'ingénierie conduira les enseignants à une interprétation et une mise en œuvre personnelle. À la suite des travaux d'Artigue (1986) sur la reproductibilité des situations didactiques, nous faisons en effet l'hypothèse que les enseignants seront amenés à adapter l'ingénierie en tenant compte d'une part, des contraintes institutionnelles et professionnelles qui sont les leurs et qui varient selon le contexte national, et d'autre part, au regard de leur propre épistémologie pratique (Amade-Escot 2013a ; Sensevy 2007). C'est dans la mise en tension des documents présentant cette ingénierie (Berté, 1996 ; Quilio, 2010) avec le savoir réellement mis à l'étude dans chacune des classes observées, et la manière dont ce dernier est co-construit dans l'action conjointe, que nous nous proposons d'identifier les similitudes et les différences d'interprétation au regard des caractéristiques des enseignants et des institutions. Cette problématique nous conduit à nous poser les questions de recherche suivantes :

Questions de recherche :

1) Comment les enseignantes transposent-elles l'ingénierie ?
    - Quelles sont les modifications, les aménagements apportés dans chacun des systèmes ?
    - Quels sont les savoirs co-construits par les élèves et leurs enseignantes au fil des séances ?

2) Quels sont les possibles déterminants influençant cette transposition et les adaptations produites ?
    - Ceux relevant des déterminants institutionnels ?
    - Ceux relevant de l'épistémologie pratique des professeurs ?

C'est à ces questions que le travail empirique cherchera à répondre. Avant d'en présenter les résultats, nous terminons cette première partie du manuscrit de thèse par la présentation détaillée des méthodes mises en œuvre pour traiter la problématique de recherche comparatiste que nous venons d'exposer.

Chapitre 3. Cadre méthodologique

Ce chapitre comporte trois sections : la première présente les principes généraux de la recherche ; la seconde décrit la méthode d'analyse des curriculums (1er plan de comparaison) ; la dernière section présente les choix méthodologiques (2ème et 3ème plans de comparaison), puis les modalités de recueil des données et de leur analyse relativement à l'observation des pratiques didactiques.

Dans les sections qui suivent, nous présentons les principes généraux qui guident la mise en œuvre de notre recherche comparatiste, les méthodes de collecte de traces, leur structuration sous forme de données dans la transcription, les modalités de traitement de ces données et leur interprétation ; enfin, les manières dont, à partir de ces interprétations, nous construisons les résultats de la thèse.

C'est en lien avec la présentation des principes généraux de la recherche que nous définissons dans un premier temps les différents plans de comparaison structurant notre travail empirique. Nous préciserons ensuite, pour chacun de ces plans la manière dont nous avons recueilli les traces, construit, puis analysé les données.

1. Principes généraux de la recherche

Il s'agit d'une recherche qualitative par étude de cas qui s'intéresse à la manière dont trois enseignantes implémentent une ingénierie didactique créée dans les années 1990 (Berté, 1995). Cette ingénierie porte sur l'introduction de la soustraction au primaire. Nous avons vu qu'un ensemble de travaux récents ont montré la pertinence actuelle de cette ingénierie du point de vue de la logique des apprentissages (*Cf.* le chapitre 1 sur la revue de questions). En relation avec notre problématique qui vise à rendre compte de l'influence des pré-construits institutionnels et des déterminants individuels (l'épistémologie pratique des professeurs) sur les mises en œuvre de cette ingénierie dans trois systèmes didactiques contrastés, nous considérons que l'étude de cas et leur comparaison constitue la meilleure voie d'accès pour traiter nos questions de recherche (Cf. chapitre précédent).

Mais notre recherche est aussi qualitative car nous nous inscrivons dans une analyse ascendante de la transposition didactique à partir des analyses de l'action conjointe enseignante - élève et notamment, des interactions qui se produisent au sein de la classe au fil de la mise en œuvre de l'ingénierie par chaque enseignante.

1.1. Une approche qualitative de phénomènes didactiques

A la suite de Boutin (1997), nous situons notre recherche, à la croisée de plusieurs approches : le « naturalisme-écologique », le « qualitatif-phénoménologique » et « l'interactionnisme symbolique », approches que nous décrivons ici brièvement :

- L’approche « naturalisme-écologique » situe les recherches en contexte naturel. De nombreuses recherches, en particulier en ethnographie, ont démontré « l’importance de l’influence des composantes environnementales sur le comportement des sujets soumis à une investigation » (Boutin, 1997, p. 12). Faisant le constat que certaines recherches menaient à des différences importantes de résultats selon que la recherche était conduite en laboratoire ou sur le terrain, l’approche naturaliste-écologique s’entend comme une réponse prenant en compte le paramètre environnemental qui considère que « dans les conditions de l’observation naturelle, le comportement étudié est sujet aux influences du contexte naturels plutôt qu’à celles des contextes en laboratoire » (Ibid., p. 13)

- L’approche « phénoménologique » centre la recherche sur les données expérientielles : si l’approche positiviste reste attachée aux faits apparents, à leur structure, à leurs propriétés, la phénoménologie cherche à se saisir de la logique des phénomènes au travers du « cadre de référence selon lequel les sujets interprètent leurs pensées, leurs sentiments et leurs actions. » (*Ibid.*, p. 14).

- L’approche « interactionniste symbolique » poursuit l’approche phénoménologique en se centrant sur les interactions du sujet avec autrui. Reprenant Mead, Pourtois et Desmet (2007) rappellent que tout comportement humain doit être compris et expliqué qu’en relation avec les significations que les individus attribuent aux choses et à leurs actions. Pour ces auteurs, le terme « symbolique » renvoie à l’activité de « recherche de signification » des faits. Ils précisent que la signification d’une action est toujours différente pour l’acteur, pour le partenaire et pour l’observateur – parce qu’elle s’enracine dans la situation unique et individuelle de chaque acteur – et qu’en conséquence on ne peut la comprendre qu’à travers la signification que l’action revêt pour l’acteur. La complexité de cette recherche de signification est par ailleurs renforcée par le fait que le chercheur est lui-même empreint de subjectivité : « les "faits" ne seraient que le résultat de la perception du chercheur. Même si son observation est scientifique, elle n’est jamais que le produit de ses sens et de sa représentation du monde ». (*Ibid.* p. 8). Notons par ailleurs que le modèle de l’action conjointe en didactique se situe lui-même dans la filiation des travaux de Mead et al. (2006) et de Blumer (1969) qui considèrent les interactions entre acteurs comme des processus de construction de significations, sans pour autant considérer que ces dernières sont toujours partagées par les acteurs, ici, de la relation didactique (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat, & Fluckiger, 2007 ; Ligozat, 2011)

C'est au croisement de ces trois approches que nous inscrivons notre recherche : nous cherchons à rendre compte, en « terrain naturel », de la complexité de phénomènes didactiques dans des classes ordinaires. Notre recherche porte sur trois études de cas (une en Suisse Romande ; deux en France). C'est par l'observation *in situ* de trois classes que nous souhaitons décrire, interpréter, comparer les mises en œuvre de l'ingénierie didactique broussaldienne par des enseignantes d'expérience contrastée.

Dans ces trois systèmes didactiques, élèves et enseignants sont en interactions. Les outils du cadre théorique de l'action conjointe nous permettent de mettre à jour le processus dynamique de fonctionnement du système didactique, « dynamique dans laquelle professeur et élèves doivent se repositionner les uns par rapport aux autres et réciproquement, en fonction de l'évolution de leur responsabilité envers les objets de leurs pratiques et les savoirs partagés, voire distribués au sein de la classe.» (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002, p.11). C'est en effectuant une analyse ascendante de la transposition didactique, que nous cherchons à rendre compte des objets de savoir réellement mis à l'étude au regard de ceux initialement proposés par l'ingénierie didactique broussaldienne. Nous nous attachons ainsi à saisir, dans les mises en œuvre, ce qui relève d'ajustements compatibles avec l'ingénierie, d'adaptations ingénieuses, ou au contraire de modifications mettant en péril le processus de construction des connaissances visées.

Par ailleurs, ayant conscience que notre statut de formatrice dans la formation des enseignants du premier degré a pu influer sur notre perception des faits lors des observations en classe, nous avons cherché à limiter l'impact de la « subjectivité du chercheur », en triangulant nos données par une observation du système didactique selon plusieurs points de vue : des points de vue interne en enregistrant, en filmant la classe, en récoltant les écrits produits *in situ*, des points de vue externes par en conduisant des entretiens (enregistrés) avec les enseignantes, en recueillant les écrits des différents acteurs produits en dehors de la séance.

Reprenant Paillé et Mucchielli (2016) à propos des recherches qualitatives, notre analyse n'est ni numérique (elle relèverait alors d'une analyse quantitative) ni métrique (elle ne cherche pas à mesurer des phénomènes). Elle vise en réalité à « construire des descriptions et des interprétations. Elle est au service de la quête du *sens* des actions et expériences humaines. » (p. 87).

1.2. Design de la recherche : les différents plans de comparaison

Compte tenu de la problématique et des questions de recherche que nous avons posées, compte tenu de l'influence institutionnelle et culturelle des deux pays dans lesquels se déroule l'enquête, nous avons élaboré un triple plan de comparaison des systèmes didactiques permettant d'étudier les conditions de réception et de mise en œuvre de l'ingénierie dans des classes. Le design de la recherche articule les plans de comparaison suivants :

- Un premier plan de comparaison vise à accéder aux pré-construits qui orientent chacun des systèmes didactiques. Il s'agira d'analyser les curriculums en Suisse Romande et en France.
- Un deuxième plan de comparaison consiste à observer la mise en œuvre de l'ingénierie didactique broussaldienne dans deux sites se différenciant de part leurs systèmes éducatifs d'appartenance, mais au sein desquels les enseignantes sont comparables du point de vue de leur expérience et de leur expertise.
- Enfin, un troisième plan de comparaison consiste à investiguer comment l'ingénierie didactique est implémentée dans deux sites français, comparables du point de vue des pré-construits institutionnels, mais au sein desquels les enseignantes ont une expérience d'enseignement contrastée.

La figure ci-après schématise ces trois plans de comparaison.

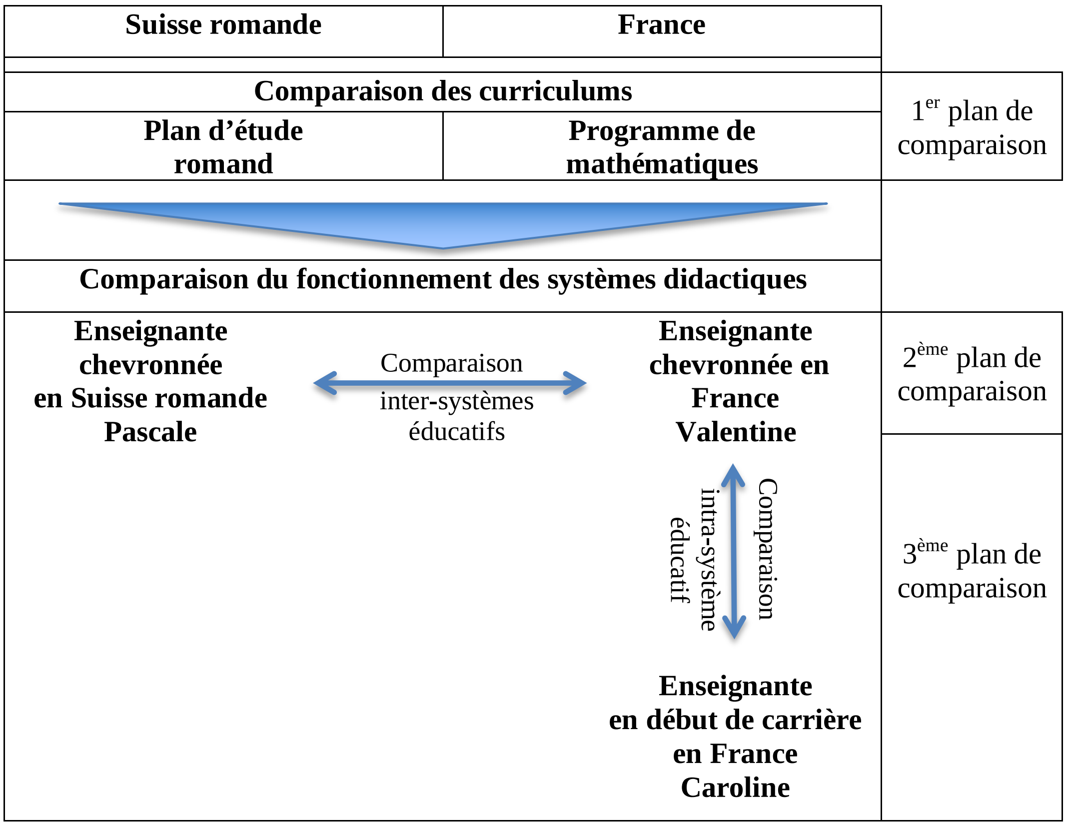


Figure 3 : plans de comparaison didactique

Choix des enseignantes participant à la recherche. Comment avons nous procédé ? Comme indiqué en fin de chapitre précédent, nous disposions, en début de thèse, d'un recueil de traces collectées auprès d'une enseignante chevronnée de la Maison des Petits à Genève, ayant une vingtaine d'année d'ancienneté que nous appellerons Pascale[41]. Nous référant au cycle de vie professionnelle tel que décrit par Huberman (1989) nous avons considéré que Pascale, par son engagement dans le partenariat avec le GREDIC[42] au sein de la maison des petits, relevait de ce que cet auteur qualifie de « phase d'expérimentation ou de différenciation » ou de « diversification et activisme » (troisième phase de la carrière) se traduisant par un investissement important dans le travail pédagogique.

Pour mener la comparaison inter-systèmes éducatifs (2ème plan de comparaison, *cf.* schéma ci-dessus) nous souhaitions retenir, au sein du collectif de la recherche collaborative que nous conduisions en France, une enseignante chevronnée ayant une expérience et expertise comparables à celles de Pascale. Valentine, enseignante ayant une vingtaine d'années d'expérience en tant que Professeur d'École s'est portée volontaire pour participer à

41 Les prénoms des participants à la recherche sont des pseudonymes.
42 Groupe de REcherche en DIdactique Comparée, dirigé par Françia Leutenegger à l'Université de Genève.

la recherche de thèse. Son parcours professionnel d'enseignante ayant assuré des fonctions de directrice d'école, titulaire du Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maître Formateur (CAFIPEMF) et assurant des tâches de maître-formateur nous paraît correspondre à cette même phase de carrière, faite d'engagement et de prise de responsabilité, que Pascale.

Enfin, pour ce qui concerne le 3ème plan de comparaison, nous avons retenu en France une enseignante volontaire, participant à la recherche collaborative (que nous appellerons Caroline), ayant sept ans d'ancienneté dans l'enseignement, dont cinq dans le niveau observé (CE1). En référence à Huberman (1989) nous considérons que Caroline se situe dans une phase de « stabilisation et de consolidation d'un répertoire pédagogique » caractéristique d'un début de carrière. Si Caroline montre une certaine stabilisation dans son mode de fonctionnement pédagogique au sein de classe, Valentine témoigne de son activisme par son implication dans la formation des enseignants.

Avant de présenter les principes retenus pour chacun des plans de comparaison, il est important ici de pointer les spécificité de notre recherche au regard du deuxième plan de comparaison et portant sur la manière dont ont été constituées les traces en Suisse et en France.

1.3. Constitution des traces en Suisse et en France

Sur quelle traces (Leutenegger, 2009) travailler ? Nous présentons ici la manière dont ont été recueillies les traces dans les différents sites, réservant pour les sections suivantes (*cf.* section 3.1) les principes généraux relatifs à ce recueil et à leur structuration sous forme de données pour conduire les trois études de cas.

1.3.1. En Suisse : des traces déjà existantes

Comme déjà évoqué, dans le cadre de la cotutelle de notre thèse, nous avons bénéficié d'un ensemble de traces déjà disponibles sur le site de Genève. Ces traces ont été recueillies au sein du Réseau de la Maison des Petits, dispositif faisant partie d'un projet de partenariat entre le Département de l'Instruction publique du canton de Genève et de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève (FAPSE). Ce dispositif associe praticiens et chercheurs dans une collaboration dont l'objectif est de mener des recherches tant pour la formation des enseignants que pour la recherche en didactique. Ce travail collaboratif s'est élargi à une collaboration avec un Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation (LéA) situé à Marseille. Nous citons Leutenegger et Quilio

(2013) qui indiquent que : « les participants du «Réseau Maison des Petits» à Genève et ceux du LéA Saint Charles (Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation) à Marseille collaborent depuis plusieurs années dans le cadre d'une convention de recherche signée par les institutions en 2011. Ces accords de collaboration sont l'occasion de tester différentes situations didactiques de part et d'autres, la séquence sur la soustraction en fait partie » (p. 161).

L'ingénierie didactique sur la soustraction a été ainsi mise en œuvre durant l'année scolaire 2011-2012, à partir d'un document de travail issu du LéA de Marseille (Quilio, 2010) par Pascale, enseignante chevronnée, faisant partie de la Maison des petits depuis une dizaine d'années. Les traces (vidéos, photos, écrits, etc.) collectées nous ont été fournies par notre co-directrice de thèse, Francia Leutenegger ; il s'agit donc au sens de Van der Maren (1996) de données invoquées (c'est-à-dire préexistantes à la recherche). Nous les avons complétées par des « entretiens rétrospectifs » durant le temps de la recherche doctorale de manière à obtenir des éclairages sur la manière dont l'enseignante Pascale avait réceptionné cette ingénierie. Il s'agit donc pour ces dernières traces et selon la terminologie de Van der Maren (1996), de « données suscitées », c'est-à-dire obtenues « dans une situation d'interaction entre le chercheur et les sujets, données dont le format dépend tant de l'un que des autres » (p. 83). Nos entretiens rétrospectifs ont été menés selon des formats variés, allant d'entretiens en présentiel, à des entretiens par skype, ou par messagerie instantanée. Van der Maren met en garde contre ce qu'il nomme la reconstruction du passée : « Toute rétrospection, qu'elle touche un passé proche ou lointain comme dans les entrevues cliniques, phénoménologiques ou les histoires de vie, fait appel au souvenir. Or, le souvenir du passé n'est pas la simple restitution du passé, c'en est une reconstruction » (Van der Maren, 1996, p. 106). La triangulation de ces données avec celles déjà disponibles a eu pour but de nous prémunir de cette « reconstruction du passé ». Nous décrivons plus précisément la collection de traces en section 3.2.1, ci-après.

1.3.2. En France : des traces recueillies en première main

Sachant que nous disposions d'un ensemble de traces à Genève, notre souci a été de récolter des traces comparables en France et dans des conditions équivalentes. Comme nous l'avons discuté plus haut, nous avons recherché dans un premier temps une enseignante en France ayant des caractéristiques semblables, puis retenu une troisième enseignante en France, contrastée du point de vue de son niveau d'expérience avec les deux autres.

Afin de construire le terrain de notre étude en France dans des conditions équivalentes à celles de la Maison des Petits, nous nous sommes appuyée, dès le début de la thèse, sur la structure de recherche institutionnelle au sein de l'ESPE, la SFR-AEF[43] afin de monter un dispositif de recherche collaborative engageant des praticiens et des chercheurs. Cinq enseignantes ont accepté de travailler dans ce cadre. Au sein de ce groupe qui était constitué d'enseignantes de niveaux d'expertise différents, deux enseignantes (Valentine et Caroline) se sont montrées volontaires pour participer à la collecte des données de thèse, ce qui m'a permis de mener mon second plan de comparaison. Nous avons donc recueilli, en première main en France, des traces de nature équivalentes à celles collectées en Suisse romande. Elles sont présentées en section 3.2.2.

Rappelons que dans notre travail de thèse, nous ne traitons pas de la recherche collaborative, ni de ses effets sur la formation des enseignantes y ayant participé. D'ailleurs et comme nous l'avons déjà pointé, les traces que nous recueillies dans ce cadre pour la thèse concernent la première mise en œuvre des l'ingénierie par Valentine et Caroline. Au fil de la recherche collaborative toujours en cours, ces enseignantes ont eu l'occasion de mettre en œuvre plusieurs fois l'ingénierie. D'autres traces, moins complètes ont été collectées ; elles n'ont été ni transcrites ni utilisées dans le cadre de cette recherche, mais seront disponibles pour un travail de recherche ultérieur.

Pour résumer, nous disposons de trois terrains de recherche :

- un site en Suisse pour lequel nous travaillons sur des données « invoquées » pour la plupart (déjà existantes selon la terminologie de Van der Maren) ainsi que sur d'autres, « suscitées » lors d'entretiens rétrospectifs ;

- deux sites en France avec des traces constituées à travers un processus de recueil, décrit en section 3.2, dans lequel nous sommes impliquée en tant que chercheure. Les données sur lesquelles porteront les interprétations ont donc été « suscitées » à l'occasion de la première mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction par deux enseignantes d'expérience contrastée. Le fait qu'il s'agisse d'une 'première mise en œuvre' est un choix méthodologique délibéré qui a pour but d'une part, de symétriser les contextes d'étude entre la Suisse et la France, et d'autre part, de limiter les effets des échanges chercheur-praticiens de la recherche collaborative sur les phénomènes observés.

[43] SFR-AEF : SFR-Apprentissage Enseignement Formation

Dans les sections qui suivent nous documentons les méthodes mises en œuvre, tout d'abord l'analyse des contenus des curriculums pour accéder aux spécificités et généricités des pré-construits institutionnels dans les deux pays ; puis les méthodes relatives à l'analyse des pratiques enseignantes lors de la mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans leur classe.

2. Choix méthodologiques pour l'analyse des curriculums (1er plan de comparaison)

Suite aux travaux de Ligozat (2008), l'ensemble des textes officiels constituent les pré-construits institutionnels qui influencent les mises en œuvre pratique. Notre premier plan de comparaison a pour objectif de faire une analyse de contenus des textes curriculaires pour accéder aux réquisits des pré-construits institutionnels qui orientent les pratiques enseignantes. Pour ce faire, nous étudions le plan d'étude romand (PER) et les Moyens d'enseignement pour la Suisse romande ainsi que les programmes et les documents d'accompagnement pour la France.

2.1. Principes retenues pour la comparaison des curriculums

Il ne s'agit pas pour nous de faire une analyse de genre de textes dans le but de comparer la structure d'un curriculum à celles d'autres genres de textes. Il ne s'agit pas non plus de mener une analyse en faisant une comparaison terme à terme des thématiques inscrites dans les curriculums. Ce qui nous importe est de repérer ce qui caractérise les sous-bassement des pré-construits en termes de choix transpositifs et des réquisits pédagogiques et didactiques retenus par la noosphère des deux pays. Pour ce faire, nous empruntons au « curriculum studies un outil méthodologique ayant statut de *tertium comparationnis* permettant de mener une analyse comparative des pré-construits institutionnels en Suisse et en France.

2.1.1. Le recours au point de vue des « curriculum studies »

Dans le champ de l'éducation comparée, il est d'usage d'analyser les textes des curriculums aux regards des finalités, des objectifs et des contenus des curriculums. La plupart des travaux s'inscrivent dans l'optique de comparaison des systèmes éducatifs et de l'évaluation de leur efficacité respective. Ce n'est pas l'objet de notre travail. C'est pourquoi, nous avons choisi de nous référer à la position de Schwab (1958, 1964), chercheur reconnu dans le monde anglo-saxon comme étant à l'origine des travaux de recherche sur les curriculums (ou « *curriculum studies* »)[44]. L'originalité de la méthode proposée par cet auteur,, par analogie aux études de texte en linguistique générale, est de repérer dans les contenus du curriculum les éléments relevant de l'ordre du sémantique, de l'ordre du syntaxique, et de l'ordre du rhétorique afin de pointer les orientations qui structurent la pensée pédagogique et didactique de leurs concepteurs. Pour comprendre l'intérêt de son approche, il est utile de situer le cadre des ses travaux. Schawb, professeur de Sciences et biologiste étatsunien, s'est intéressé aux questions curriculaires dès les années 50, à une époque où il y avait nécessité de mieux former les scientifiques (on était alors dans un contexte de guerre froide avec une course à l'exploration spatiale entre les deux blocs libéral / communiste). Les années 60 ont vu alors émerger un débat à propos des curriculums tant à propos des acteurs participant à son élaboration qu'à la structure même d'un curriculum et de son contenu (Bruner, 1996 ; Hirst & Peters, 1970 ; Schwab,1964). Schwab remet en question l'approche béhavioriste des curriculums de l'époque, approche qui construisait les curriculums par objets de connaissance, en affirmant qu'un curriculum ne peut être construit simplement par des scientifiques, comme une réduction ou un apprêt de connaissances issues de sphères savantes, mais devant tenir compte des « *common places* » qu'il identifie comme étant les apprenants, les enseignants, le savoir, le milieu. Il considère que construire un curriculum est une affaire de délibération sociale, délibération étant pris ici au sens large du débat : la société, c'est-à-dire enseignants praticiens, experts en la discipline, spécialistes du curriculum. Celle-ci délibère tant sur les objets qu'elle valorise en tenant compte des spécificités du contexte social, économique, scientifique etc. que sur ce qu'elle choisit d'inscrire dans un curriculum. Par ailleurs, l'approche qu'il préconise insiste davantage sur la compréhension des apprenants que sur la discipline universitaire. L'ensemble de ces points nous amène à considérer que la méthode d'analyse proposée par Schwab est pertinente dans le sens où elle permet d'aller au delà de la description factuelle des finalités, des objectifs, et des contenus préconisés par les textes curriculaires (sans pour autant les minorer comme nous le pointons ci-après), afin de mieux accéder à la logique du discours pédagogique et des choix didactiques qui président aux pré-construits institutionnels. C'est dans cette perspective que nous avons choisi d'analyser les textes officiels en Suisse Romande et en France afin de caractériser les orientations de ces pré-construits institutionnels dans une visée de contextualisation des

[44] Nous considérons que les « *curriculums studies* » traitent de questions dans le monde anglophone qui, dans le champ didactique francophone, sont travaillées sous le concept de transposition didactique externe au sens indiqué dans le cadre théorique.

pratiques que nous nous proposons d'observer via l'analyse ascendante de la transposition didactique (*Cf.* chapitre 2 et 3 des résultats).

2.1.2. La méthode préconisée par Schwab

Dans l'article « *Inquiry and the reading process* », Schwab (1958) fait une analogie entre l'analyse d'un texte en termes de lexique, syntaxe et rhétorique et l'analyse d'un curriculum en termes d'objets de savoir, d'organisation de ces savoirs et d'argumentation justifiant l'étude de ces savoirs :

> «When a speaker or writer asks of his discourse, "Am I communicating? " the questions is usually addressed to three levels of his systems of symbol: Are the separate words of the discourse within the reach of the audience and sufficiently unambiguous in their reference? Are sentences constructed to serve their several purposes? Is the organization of the sentences and paragraphs into a whole sufficiently clear and simple? […] The subject, which seems complete in the separate sentence, takes on a fuller meaning in the light of the related subjects of others sentences. And when several sentences are disclosed and combined by the act of interpretation, they give us not only knowledge of a larger whole but fuller knowledge of any one part of the whole. In the same way, knowledge of a context of discourses gives us, for any single discourse of that context, a fuller knowledge of the scope and meaning of its conclusions.» (Schwab, 1958, pp. 72-75)

Dans un article de 1964, Schwab développe la vision d'un curriculum en termes d'organisation des disciplines les unes par rapport aux autres, mais aussi de structuration des concepts mis à l'étude dans chaque discipline, et d'organisation de ces concepts au sein même des disciplines :

> "Three different sets of problems constitute the general problem of the structure of the disciplines. First, there is a problem of the organization of the disciplines: how many there are; what they are; and how they relate to one another. Second, there is the problem of the substantive conceptual structures used by each discipline. Third, there is the problem of the syntax of each discipline: what its cannons of evidence and proof are and how well they can be applied" (Schwab, 1964, p. 14)

En faisant une analogie entre l'analyse textuelle d'une communication et l'analyse d'un curriculum (lexique, syntaxe, rhétorique), Schwab pointe trois dimensions dans la construction d'un curriculum lorsque celui-ci est mis en texte :

- La dimension rhétorique relative à tout ce qui est de l'ordre de la persuasion du pourquoi du choix de tel ou tel objet de savoir,

- La dimension syntaxique relative à tout ce qui permet d'organiser ces objets de savoirs les uns par rapports aux autres au sein d'un curriculum ou d'une discipline,
- La dimension sémantique relative aux objets de savoirs mis à l'étude.

Ces trois dimensions nous paraissent pertinentes pour mener une analyse comparative entre le curriculum de Suisse Romande et le curriculum français.

2.1.3. Choix du *tertium comparationis*

Les trois focales indiquées dans la section précédente constituent la structure du *tertium comparationis* que nous retenons pour l'analyse des curriculums. La focale rhétorique permet faire émerger tout ce qui est de nature à persuader du bien fondé du pourquoi du choix de tel ou tel objet de savoir dans les curriculums. Elle renvoie donc à la dimension axiologique des finalités de l'éducation dans chacun des systèmes éducatifs. La focale syntaxique montre ce qui relie les objets de savoirs et les organise au sein de la discipline mathématique mais aussi au sein des autres champs des curriculums suisse et français, par exemple le statut de la résolution de problèmes en France et en Suisse. Notons que relativement à ce point, la résolution de problème ne se limite pas à l'enseignement des mathématiques, mais sous-tend les approches dans plusieurs disciplines scientifiques). Enfin la focale sémantique renvoie aux objets de savoirs désignés par la noosphère comme devant être enseignés en mathématiques, au niveau 4P en Suisse et au niveau CE1 en France.

2.2. Textes retenus pour l'analyse de contenus des curriculums

Notre intention est d'apprécier les différences entre les deux curriculums suisse romand et français. Nous menons la comparaison des curriculums en nous focalisant sur les éléments sémantiques, syntaxique ou rhétoriques du discours officiel, afin de mettre en tension les deux curriculums et d'identifier les éléments génériques et/ou spécifiques les constituant. Ce faisant, si nous montrons bien la pertinence de la comparaison inter-systèmes éducatifs pour éclairer les pratiques dans deux institutions nationales, nous cherchons aussi à apporter un éclairage sur les mises en œuvre dans les trois systèmes didactiques en conjecturant de possibles distances des pré-construits à l'ingénierie didactique broussaldienne. C'est pourquoi notre analyse a porté, outre les textes programmatiques nationaux, sur un ensemble de documents annexes (documents ressources à destination des enseignants), qui bien qu'ayant en France un statut moins « officiels » qu'en Suisse, permettent d'affiner notre comparaison à partir d'illustrations concrètes de situation préconisées en classe. Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des documents consultés.

Pays	**Suisse romande**	**France**
Curriculums	• Plan d'étude romand	• BOEN HS45 n°3 du 19 juin 2008 • Le socle commun des connaissances et de compétences du 11 juillet 2006
Documents annexes	• Moyen COROME[46] : – Livre du maitre, Méthodologie 2P, Ed. 1997 – Fichier de l'élève, Ed. 1997 – Enseignement et apprentissage des mathématiques, Ed. 1998	• Le document ressources « Le nombre au cycle 2 », Ed. 2010,

Tableau 1 : ensemble des textes officiels étudiés.

Nous avons travaillé sur les versions numériques des textes officiels suisses romands et français, ceux-ci étant accessibles sur les sites gouvernementaux :

- pour la Suisse romande https://www.plandetudes.ch/
- pour la France http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm

Afin de provoquer un *estrangement* (Ginzburg, 2001), nous avons choisi de commencer par analyser les textes suisses avant d'étudier les textes français. Nous conserverons cette disposition, en présentant dans la deuxième partie de notre manuscrit, l'analyse des textes suisses romands, puis celle des textes français, pour ensuite rendre compte des différences et similitudes au regard de notre problématique.

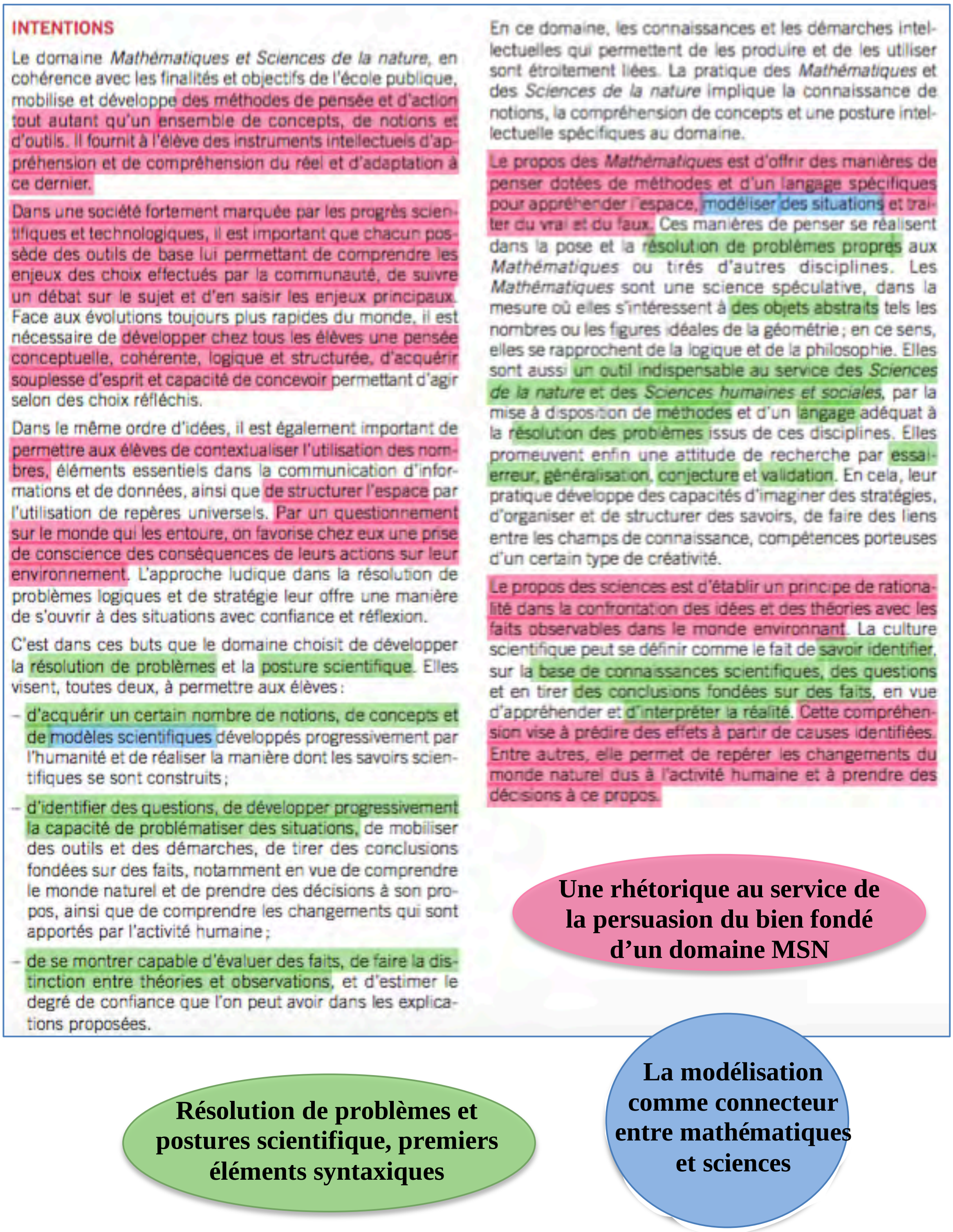
2.3. Modalités d'analyse et d'interprétation des curriculums

Comme indiqué précédemment, nous analysons ces documents à partir des propositions de Schwab (1964), c'est-à-dire en en réalisant une analyse qualitative de leurs contenus selon trois focales, rhétorique, syntaxique et sémantique. Pour chacun des pays,

[45] BOEN HS : Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale Hors Série
[46] COROME : Commission Romande pour les Moyens d'Enseignement

nous avons considéré la structure générale du programme, puis les recommandations générales relatives au domaine « mathématiques et sciences de la nature » pour la Suisse ou à la discipline « mathématiques » pour la France et enfin le programme relatif à la discipline mathématiques en Suisse et en France en nous centrant plus particulièrement sur l'enseignement de la soustraction à l'école primaire.

Pour chacun des textes étudiés, nous avons cherché à distinguer les termes propres à une argumentation rhétorique, de ceux révélant l'ossature du domaine (la syntaxe) et de ceux désignant les objets de savoir (sémantique) mis à l'étude. Nous exemplifions en page suivante, à partir des intentions déclarées dans « les commentaires généraux du domaine MSN » du PER la manière dont nous avons relevé et relié les divers éléments relevant d'une rhétorique au service de la persuasion du bien fondé d'un domaine MSN ainsi que les premiers éléments syntaxiques de ce domaine. Dans l'extrait qui suit, à titre d'exemple, sont surlignés en rouge les éléments relevant de la focale rhétorique, en vert ceux de la focale syntaxique tandis qu'en bleu nous relevons les éléments désignant les connections entre mathématiques et sciences. Les bulles accompagnant cet extrait indiquent des interprétations tirées de l'analyse du plan d'étude romand.



INTENTIONS

Le domaine *Mathématiques et Sciences de la nature*, en cohérence avec les finalités et objectifs de l'école publique, mobilise et développe des méthodes de pensée et d'action tout autant qu'un ensemble de concepts, de notions et d'outils. Il fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier.

Dans une société fortement marquée par les progrès scientifiques et technologiques, il est important que chacun possède des outils de base lui permettant de comprendre les enjeux des choix effectués par la communauté, de suivre un débat sur le sujet et d'en saisir les enjeux principaux. Face aux évolutions toujours plus rapides du monde, il est nécessaire de développer chez tous les élèves une pensée conceptuelle, cohérente, logique et structurée, d'acquérir souplesse d'esprit et capacité de concevoir permettant d'agir selon des choix réfléchis.

Dans le même ordre d'idées, il est également important de permettre aux élèves de contextualiser l'utilisation des nombres, éléments essentiels dans la communication d'informations et de données, ainsi que de structurer l'espace par l'utilisation de repères universels. Par un questionnement sur le monde qui les entoure, on favorise chez eux une prise de conscience des conséquences de leurs actions sur leur environnement. L'approche ludique dans la résolution de problèmes logiques et de stratégie leur offre une manière de s'ouvrir à des situations avec confiance et réflexion.

C'est dans ces buts que le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique. Elles visent, toutes deux, à permettre aux élèves :

- d'acquérir un certain nombre de notions, de concepts et de modèles scientifiques développés progressivement par l'humanité et de réaliser la manière dont les savoirs scientifiques se sont construits ;
- d'identifier des questions, de développer progressivement la capacité de problématiser des situations, de mobiliser des outils et des démarches, de tirer des conclusions fondées sur des faits, notamment en vue de comprendre le monde naturel et de prendre des décisions à son propos, ainsi que de comprendre les changements qui sont apportés par l'activité humaine ;
- de se montrer capable d'évaluer des faits, de faire la distinction entre théories et observations, et d'estimer le degré de confiance que l'on peut avoir dans les explications proposées.

En ce domaine, les connaissances et les démarches intellectuelles qui permettent de les produire et de les utiliser sont étroitement liées. La pratique des *Mathématiques* et des *Sciences de la nature* implique la connaissance de notions, la compréhension de concepts et une posture intellectuelle spécifiques au domaine.

Le propos des *Mathématiques* est d'offrir des manières de penser dotées de méthodes et d'un langage spécifiques pour appréhender l'espace, modéliser des situations et traiter du vrai et du faux. Ces manières de penser se réalisent dans la pose et la résolution de problèmes propres aux *Mathématiques* ou tirés d'autres disciplines. Les *Mathématiques* sont une science spéculative, dans la mesure où elles s'intéressent à des objets abstraits tels les nombres ou les figures idéales de la géométrie ; en ce sens, elles se rapprochent de la logique et de la philosophie. Elles sont aussi un outil indispensable au service des *Sciences de la nature* et des *Sciences humaines et sociales*, par la mise à disposition de méthodes et d'un langage adéquat à la résolution des problèmes issus de ces disciplines. Elles promeuvent enfin une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation. En cela, leur pratique développe des capacités d'imaginer des stratégies, d'organiser et de structurer des savoirs, de faire des liens entre les champs de connaissance, compétences porteuses d'un certain type de créativité.

Le propos des sciences est d'établir un principe de rationalité dans la confrontation des idées et des théories avec les faits observables dans le monde environnant. La culture scientifique peut se définir comme le fait de savoir identifier, sur la base de connaissances scientifiques, des questions et en tirer des conclusions fondées sur des faits, en vue d'appréhender et d'interpréter la réalité. Cette compréhension vise à prédire des effets à partir de causes identifiées. Entre autres, elle permet de repérer les changements du monde naturel dus à l'activité humaine et à prendre des décisions à ce propos.

Figure 4 : Modalité d'analyse et d'interprétation du curriculum (suisse) - illustration

Le paragraphe « Intentions », prélude à la description programmatique du domaine MSN, développe plus particulièrement les aspects rhétoriques et syntaxiques, les éléments sémantiques trouvant leur place dans chacun des modules composant le domaine MSN. Nous repérons en rouge les arguments rhétoriques relatifs à la constitution du domaine MSN : « le propos des mathématiques est de … », « le propos des sciences est de … ». La rhétorique de cet extrait porte sur le bien fondé de la présence des mathématiques et des sciences de la nature : les deux disciplines sont en capacité de s'alimenter l'une l'autre en outils et méthodes permettant à l'élève « d'appréhender, […] de comprendre […] et de s'adapter » au monde actuel. En vert, nous avons relevé ce que nous considérons comme la colonne vertébrale du domaine. Trois mots-clés sous-tendent le domaine MSN : résolution de problèmes, posture scientifique et modélisation, ce dernier assurant le lien entre mathématiques et sciences de la nature.

Précisons qu'un élément que nous considérons comme syntaxique, c'est-à-dire participant de la structure du domaine, peut aussi relever du sémantique : la résolution de problème, par exemple, si elle organise le domaine MSN, est aussi comme nous le verrons dans l'analyse du curriculum, un objet d'enseignement spécifique dans l'enseignement des mathématiques.

3. Choix méthodologiques pour l'analyse des pratiques (2ème et 3ème plans de comparaison)

3.1. Principes retenus pour la comparaison des pratiques

A la suite des travaux de Leutenegger (2009), nous pouvons dire que la méthode d'investigation retenue pour analyser les mises en œuvre de l'ingénierie broussaldienne par les trois enseignantes participant à notre recherche relève d'une démarche qualifiée de « clinique/expérimentale ». Nous en développons les deux temps ci-après.

3.1.1. Une dimension clinique

Dans « Le temps d'instruire », Leutenegger (2009) montre, en s'appuyant sur Brousseau (1978b), que « l'intérêt d'un abord clinique réside dans la possibilité de mettre en évidence des phénomènes qui, par leur complexité et le nombre de variables en jeu, ne peuvent que difficilement se décrire » (p. 398) L'approche clinique nous paraît pertinente pour l'étude et la comparaison de systèmes didactiques. Nous nous en expliquons ci-dessous.

Dans son ouvrage « la naissance de la clinique », Foucault (1963) montre qu'au XVIIIème siècle, l'approche de la maladie par la clinique a changé le rapport du médecin à celle-ci : la maladie n'est plus perçue comme une chose en soit mais comme un phénomène émergeant d'une construction à partir de symptômes, de signes faisant sens pour le médecin. Par analogie, Leutenegger montre que les phénomènes didactiques n'existent pas naturellement dans la classe, ou tout du moins, ne sont pas directement accessibles. L'intérêt d'une approche clinique en didactique est de dégager des signes faisant sens au chercheur afin de faire émerger les phénomènes didactiques. Ces signes, "choisis" parmi les faits observables dans la classe, sont fonction des préoccupations didactiques du chercheur mais aussi des cadres théoriques avec lesquels il travaille. Mis en relation, ils participent à une construction de faits permettant la description du fonctionnement des systèmes didactiques en conservant l'entité système comme unité insécable. Le chercheur n'ignore pas l'environnement extérieur aux systèmes étudiés, leur contexte institutionnel et culturel avec ce qu'il apporte de conditions et de contraintes. Par ailleurs, l'approche clinique (Leutenegger, 2009) rend possible la comparaison inter-cas et la recherche des similitudes et différences dans le fonctionnement de ces systèmes. A l'instar de la clinique médicale qui permet, en étudiant des processus d'évolution, de « dessiner les chances et les risques » (Foucault, 1963, p. 89), la clinique didactique peut alors se donner l'ambition de « pronostiquer ce qu'il advient des faits [sur le terrain des classes] » (Leutenegger, 2009, p. 406).

3.1.2. Une dimension expérimentale

Pour autant, clinique ne s'oppose pas à expérimentation. Ainsi que l'écrivent Schubauer-Leoni et Leutenegger (2002), il existe une composante expérimentale a minima, lorsque la classe, certes ordinaire, est sous conditions d'observation. Elle est due aux effets induits de la recherche. Cette composante expérimentale peut prendre plus d'ampleur lorsque l'on introduit dans le système une ingénierie. En s'appuyant sur des ingénieries, Leutenegger (2008), Amade-Escot & Léziart (1996), Nédelec-Trohel (2008), Santini (2009), Quilio & Mercier (2010), Ligozat & Leutenegger (2008) mais d'autres encore, montrent qu'il est possible de lier clinique et expérimental dans une même recherche. Allier les deux approches permet d'éclairer le système didactique différemment et par suite de le rendre plus intelligible : la composante expérimentale donne l'occasion de « perturber » le fonctionnement du système didactique, en proposant des « choses » parfois inhabituelles pour l'enseignant, tout en demeurant compatibles avec ce qui se fait d'ordinaire (programme, plan d'étude...). La perturbation devient alors révélatrice de pratiques habituelles et routinières, qui seraient restées implicites sans elle.

Les deux dimensions de la démarche clinique/expérimentale, dimensions interne (insécabilité du système didactique et accès aux phénomènes didactiques dans leur processus) et externe (prise en compte de l'environnement institutionnel et culturel, comparaison entre systèmes didactiques) permettent de construire une intelligibilité « du » didactique. C'est cette démarche que nous poursuivons : comparer le fonctionnement des systèmes didactiques contrastés, dans des environnement institutionnels et culturels différents en y introduisant un même élément « perturbateur », l'ingénierie didactique relative à l'introduction de la soustraction au CE1.

3.1.3. Le *tertium comparationis :* l'ingénierie didactique broussaldienne « la soustraction au CE1 ».

Dans une approche comparatiste, « pour décrire la particularité il est nécessaire de disposer d'un terme de comparaison, faute de quoi la particularité observée apparaît justifiée par son existence même. » (Mercier, Schubauer-Leoni & Sensevy, 2002, p. 10). L'ingénierie didactique de la soustraction en tant que composante expérimentale commune aux trois études de cas nous fournit ici un « *tertium comparationis* » rendant possible la comparaison entre des pratiques enseignantes relevant d'institutions, de cultures et d'expériences différentes. Cette ingénierie se caractérise par des choix transpositifs singuliers comme nous l'avons pointé dans le premier chapitre de cette partie. Comme toute ingénierie didactique, elle engage par ailleurs des choix épistémologiques et didactiques (Artigue, 1988) assumés par ses concepteurs. Nous nous appuyons sur deux documents les décrivant : l'un rédigé par une participante au COREM à partir « des préparations des professeurs et des chercheurs et des observations faites dans l'école » (Berté, 1996) et l'autre rédigé par Quilio (2010) et annoté par des enseignants français l'ayant mis en œuvre. Par ailleurs nous avons effectué une analyse épistémique de l'ingénierie que, pour faciliter la lecture des résultats, nous présenterons en première section du chapitre 2 des résultats relatifs à l'analyse macrodidactique des mises en œuvre par les trois enseignantes.

3.1.4. Une interprétation à l'échelle macrodidactique s'appuyant sur des analyses mésodidactiques et microdidactiques

L'ingénierie didactique broussaldienne est structurée en 6 étapes, comportant chacune une série de 15 leçons et parfois des « ateliers » et des « contrôles ». Dans son design initial l'ingénierie de la soustraction se déroule sur plusieurs mois. L'étude de son implémentation, incluant les adaptations des enseignantes dans leur mise en œuvre nous a amenée à opter pour une stratégie d'analyse en quatre temps.

- Dans un premier temps, nous adoptons une entrée par la focale mésodidactique (au sens de Leutenegger, 2003) c'est-à-dire en analysant chaque séance composant chacune des étapes de l'ingénierie. Nous nous appuyons pour ce faire sur des synopsis (voir section ci-après 3.3.1.1.). Lors de l'analyse des différentes séances, nous documentons parfois les constats effectués de quelques extraits relevant d'analyses microdidactiques de transactions permettant d'illustrer notre propos.

- Dans un deuxième temps, élargissant notre focale, nous dégageons, pour chacune des étapes, une synthèse conclusive des faits marquants sur les plans mésogénétique et chronogénétique au regard de l'ingénierie initiale. Puis nous répétons les analyses pour l'étape suivante. Il s'agit là de construire des interprétations sur la base des récurrences observées en termes de fidélité, d'idonéité, d'adaptation ou de modification des situations didactiques proposées par l'ingénierie broussaldienne. L'analyse de ces récurrences au fil des séances (échelle mésodidactique) et des étapes (regroupant plusieurs séances) nous permet en remontant à un point de vue encore plus global, de produire une interprétation macrodidactique de l'ensemble de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique et ainsi d'appréhender la dynamique de fonctionnement du système didactique observé sur les plans mésogénétique, chronogénétique et topogénétique. Ce second temps vise à caractériser dans chaque site quels sont les usages (voire les mésusages) que font les trois enseignantes de l'ingénierie en tentant de démêler, dans leur pratique didactique, ce qui relève de l'influence des déterminations institutionnelles (les pré-construits curriculaires) de ce qui relève des effets de leur propre épistémologie professionnelle.

- Le troisième temps relève de l'interprétation macrodidactique des modalités d'implémentation sur chacun des sites. Il s'appuie sur les constats établis lors des deux temps précédents qui constituent le cœur du travail empirique de cette thèse, et auquel est indexée l'analyse macrodidactique. Cette dernière combine *in fine* des allers et retours entre analyses mésodidactiques (de séances) et microdidactiques (de quelques transactions identifiées comme signes[47] des évolutions observées), selon une démarche indiciaire telle que défendue par Ginzburg (2001) pour la micro-histoire, afin de rendre compte de la manière dont - au fil du temps didactique, étape par étape - est mis en œuvre l'ingénierie broussaldienne.

- Le quatrième temps relève de la comparaison des dynamiques de fonctionnement des trois systèmes didactiques au regard du tertium comparationis que constitue l'ingénierie de la soustraction.

La figure ci-après synthétise la manière dont nous articulons au niveau macrodidactique les constats établis à l'échelle mésodidactique des séances, puis des étapes pour enfin comparer les modalités d'implémentations dans les trois sites.

[47] Au sens défendu par Michel Foucault (1963) dans son ouvrage « Naissance de la clinique »

Entrée par la focale mésodidactique

1er temps	2nd temps	3ème temps	4ème temps
Analyse des séances incluant l'analyse microdidactique de quelques transactions	Analyse de l'avancée du savoir en jeu au sein de chaque étape	Analyse de l'avancée du savoir et interprétation macrodidatique	**Analyse comparative des trois systèmes didactiques**

Documentation de l'analyse macrodidactique

Figure 5 : modalités d'analyse des pratiques didactiques

3.2. Techniques de recueil des traces pour l'analyse des pratiques enseignantes

Leutenegger (2009) met en garde contre le risque d'aller observer dans les classes en naturalisant les phénomènes didactiques et par conséquence de ne bâtir son « savoir que de son expérience de visu ». Pour « voir », il est nécessaire de créer des outils théorico-méthodologiques permettant une distanciation entre « objet du terrain » et « objet de la recherche ».

Afin de décrire la co-construction des savoirs par les différents acteurs du système didactique, nous opérons selon la méthodologie de Leutenegger (2003) : dans un premier temps, nous constituons notre « *collection de traces* », dans un deuxième temps nous effectuons le « *traitement des traces* » par l'analyse. Nous détaillons dans cette section, la constitution des traces.

3.2.1. Site d'observation pour la Suisse

Le site d'observation (site1) est une classe à double niveau 3P-H / 4P-H[48] dans une école de centre ville de Genève, d'un niveau socio-économique favorisé. Le groupe de 4P-H est composé de 11 élèves. L'enseignante, Pascale, a une vingtaine d'années d'expérience et a occupé diverses fonctions d'enseignement : enseignante dans une « école en rénovation »,

[48] Il s'agit des classes 3ème Primaire-Harmos et 4ème Primaire-Harmos. Le sigle HARMOS renvoie à la réforme des programmes intitulés : Harmonisation des études en Suisse. Les plans d'étude étaient jusqu'en 2011 réalisés canton par canton. A partir de 2011, le nouveau plan d'études romand, le PER, est la résultante d'une négociation de compromis entre les cantons romands, d'où le sigle HARMOS.

formatrice de terrain en formation initiale, formatrice en formation continue dans le domaine de l'évaluation, enfin enseignante dans le réseau Maison des petits.

Nous rappelons que certaines données à Genève étaient déjà disponibles lorsque nous avons commencé la recherche. Le Tableau 2 ci-après résume les traces dont nous avons disposé pour le site genevois.

En Suisse (site 1)
Corpus principal relatif aux activités en classe : – Les enregistrements vidéo (caméras) de 12 leçons de l'ingénierie didactique – Les traces écrites produites par les élèves pendant l'atelier de l'étape 1 – Les évaluations écrites 1 et 2 des élèves pour les deux premières étapes **Corpus connexe :** – Les enregistrements audio de réunions plénières élargies au réseau Maison des petits. – Les enregistrements audio de réunions chercheure-enseignante – Les enregistrements audio d'entretiens rétrospectifs – Les préparations écrites de classe de l'enseignante

Tableau 2 : Recueil de traces en Suisse romande

L'enseignement d'un algorithme de la soustraction n'est pas inscrit dans le programme d'étude romand en 4P, ce qui explique que les leçons 14 et 15 de l'ingénierie didactique n'aient pas été implémentées dans le site genevois. Par ailleurs, comme nous l'avons indiqué, l'implémentation de l'ingénierie didactique à Genève s'inscrivait dans le cadre d'une recherche collaborative au sein de la Maison des petits, ce qui explique que certaines des leçons n'aient pas été enregistrées ou dont les traces ne sont pas disponibles (nous le préciserons dans le chapitre des résultats y afférent. Enfin dans le cadre de ce projet, plusieurs réunions plénières ont porté sur l'expérimentation de l'ingénierie didactique. Il n'y a pas eu d'entretien ante ou post leçons avec Pascale. Ne disposant pas de ce type de traces, nous avons complété ce recueil par des « entretiens rétrospectifs » lors de la recherche doctorale.

3.2.2. Sites d'observation pour la France

Dans cette section, nous poursuivons en présentant la manière dont nous avons constitué le corpus en France.

Le deuxième site (site 2) d'observation est une classe de CE1 dans une école de centre ville, caractérisée par un niveau socio-économique aisé. La classe est composée de 27 élèves, de niveaux hétérogènes. L'enseignante, Valentine, a une vingtaine d'années d'expérience et assure des fonctions de maitre formateur.

Le troisième site (site 3) d'observation est une classe à double niveau CE1 / CE2 dans une école de banlieue d'un niveau socio-économique modeste. Le groupe des CE1 est composé de 16 élèves d'un niveau relativement faible selon les dires de l'enseignante. Si quelques élèves ont un bon niveau en lecture et numération, la plupart éprouvent des difficultés. L'enseignante, Caroline, a 7 années d'années d'expériences dont 5 dans le niveau CE1.

3.2.2.1. Déroulement du dispositif de recherche sur chacun des sites en France

Pour accompagner la sensibilisation à l'ingénierie didactique, et dans un souci de symétrie avec ce qui s'était passé à Genève, nous avons organisé des réunions d'une durée de trois heures après chacune de ces étapes de l'ingénierie afin de favoriser des moments d'échanges entre les enseignantes. Ces moments ont permis d'une part de revenir sur l'étape passée et d'autre part de travailler l'étape suivante. La figure ci-dessous schématise le dispositif de recherche.

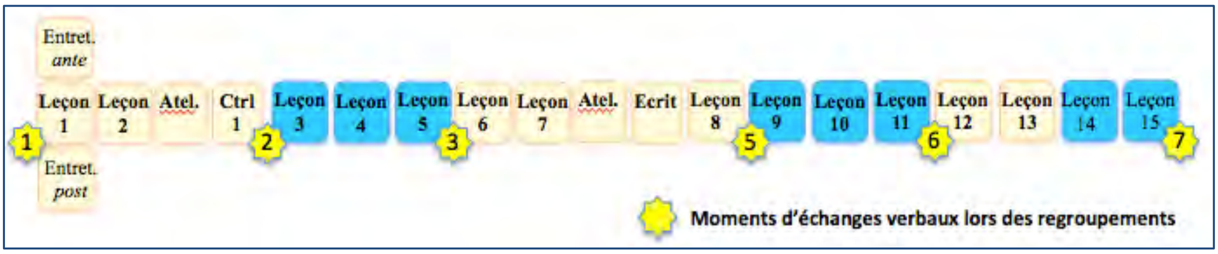


Figure 6 : dispositif de recherche en France

Lors de ces regroupements, notre objectif était double : recueillir des éclairages sur les différents questionnements relatifs à notre recherche, mais aussi nous assurer que les enjeux de savoirs des différentes étapes et séances étaient identifiés. Précisons, que notre posture était en premier lieu une posture de chercheure et non de formatrice. Si nous intervenions sans hésitation sur les aspects relatifs aux enjeux de savoir, nous avions parfois à résister à des demandes relevant du « comment dire ou comment faire » pour maintenir notre objectif d'observer les aménagements mis en place par les enseignantes pour que cette ingénierie puisse vivre et s'adapter aux conditions et contraintes de la classe.

3.2.2.2. Dispositif de recueil des données pour la France

Selon Leutenegger (2003, p. 560), « le corpus constitue un *système de traces* qui joue un rôle de « discutant » des faits observés. L'analyse relève d'une forme d'enquête qui procède par *questionnement réciproque* des différentes pièces du corpus et des différentes types de traces qu'il comporte ». Pour constituer notre corpus, nous avons recueilli trois types de traces : des traces vidéos, des traces audio et des traces écrites. Certaines sont directement issues des séances observées et constituent le corpus principal. D'autres ont été recueillies en dehors de la classe et participe à la triangulation des données pour l'analyse et l'interprétation des pratiques enseignantes. Par triangulation, nous nous citons à nouveau à Leutenegger qui, faisant référence aux entretiens *ante* et *post*, précise que la triangulation des données n'a pas pour objectif d'enrichir une interprétation. Elle répond à « la nécessité de référer les données issues de la leçon observée à un projet préalable d'enseignement et à un bilan après-coup permettant de comprendre en quoi la leçon a contribué à l'avancement des connaissances : du point de vue de l'enseignant mais aussi du point de vue des élèves. » (*Ibid*., p. 560). Der Maren (1986) justifie quant à lui la triangulation comme « le fait de recouper une forme ou une source de données par d'autres (au moins deux) afin d'évaluer la précision obtenue ou les limites de la confiance à accorder à chacune » (*Ibid*., p. 84)

Bien que n'ayant pas interviewé les élèves, nous considérons que les écrits des élèves traduisent « leurs point de vue quant à l'avancement de la connaissance ». Nous schématisons ci-dessous notre dispositif de recueil des données.

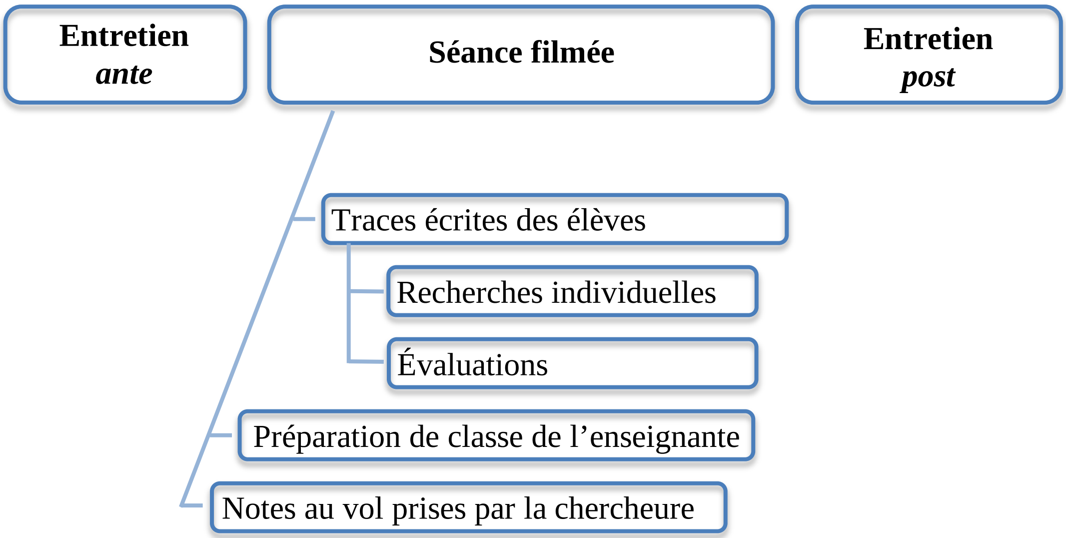


Figure 7 : Dispositif de recueil de traces

3.2.2.3. Traces alimentant le corpus principal

« Un film d'une séance de classe peut s'apprécier comme une re-présentation analogique de transactions didactiques dont les éléments de savoir constituent les objets transactionnels. Il donne à voir l'ajustement mutuel à l'autre inhérent à toute action conjointe, et l'ajustement mutuel à l'autre dans le savoir inhérent à l'action didactique conjointe. Il permet d'appréhender le processus de sémiose inhérent à cette action. » (Sensevy, 2013, p.17)

3.2.2.3.1. Enregistrements audio et vidéo des séances de classe

Nous avons observé et filmé presque toutes les séances de classe : 39 séances sur un total de 43 séances. Lors de ces enregistrements, nous avons utilisé au minimum deux caméras, très souvent trois : la première caméra liée à un micro-cravate sans fil dont l'émetteur était attaché à l'enseignante et le récepteur à la camera était fixée en fond de classe, face au tableau. Cette caméra était placée de façon à enregistrer les différentes positions de l'enseignante, ainsi que les traces écrites au tableau. Deux autres caméras placées de l'autre côté de la classe, filmaient les élèves selon deux angles, permettant ainsi d'observer leurs actions.

Trois dictaphones ont été répartis dans la classe. Ces enregistrements, d'une piètre qualité, nous ont servi comme aide ponctuelle, lorsque cela était possible, pour les transcriptions des vidéos. Les schémas ci-dessous représentent un plan de classe pour chacune des enseignantes. La figure ci-après illustre les positions des caméras et dictaphones dans un des sites.

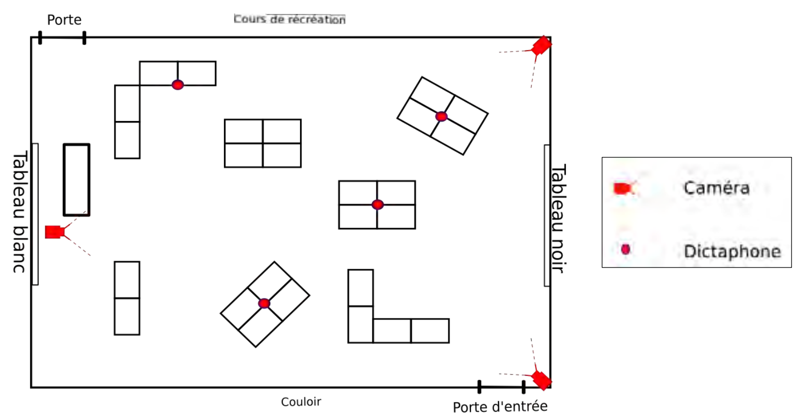


Figure 8 : exemple de prise de vues et de sons

3.2.2.3.2. Les productions écrites des élèves

Pour chacune des séances, lorsqu'il y en avait, les travaux écrits sur cahiers ou fiches des élèves ont été recueillis puis numérisés.

3.2.2.4. Traces alimentant le corpus des entretiens

3.2.2.4.1. Les enregistrements des entretiens ante et post séance, des réunions collectives

Les entretiens *ante* et *post* leçon participent de la triangulation des données. Tous les entretiens (sauf les prises de contact) ont été enregistrés. Du fait de la longueur de l'ingénierie (plus de 15 séances), il ne nous a pas semblé opportun de conduire des entretiens dirigés ou même semi-dirigés. Formatrice en mathématiques, nous avons évité les questions trop ciblées ou fermées, de façon à éviter tout risque de position surplombante qui aurait fragilisé notre relation avec les enseignantes. Nous avons alors opté pour des entretiens souples, de durées variables selon le temps que l'enseignante disposait. Les questions posées en entretien *ante* relevaient de quatre thématiques.

- L'enjeu didactique de la séance. Bien que les enjeux de savoir pour chacune des étapes aient été relevés collectivement lors des regroupements périodiques, il nous a semblé important de faire « dire » à l'enseignante l'objectif poursuivi. Rappelons que lors des regroupements périodiques, si les enjeux de savoirs étaient relevés collectivement, il ne nous appartenait pas pour autant de dire « comment faire ». Aussi, faire « dire » à l'enseignante nous a permis non seulement de cerner l'intention didactique personnelle de l'enseignante mais aussi d'accéder à la lecture qu'elle faisait de l'ingénierie didactique et en particulier de la séance.

- Les difficultés prévisibles. En posant la question de manière ouverte, c'est-à-dire ne portant sur aucun des acteurs, nous avons laissé à l'enseignante l'opportunité de signaler ses propres interrogations quant à certains points de l'ingénierie didactique. Nous entendrons par exemple Valentine évoquer la difficulté à installer l'addition comme preuve d'une différence. Nous avons pu ainsi recueillir les interrogations des enseignantes sur les difficultés des élèves mais aussi sur les leurs.

- L'organisation de la séance. Si l'ingénierie didactique précise les énoncés à proposer aux élèves, et leur ordonnancement dans la séance, elle laisse quand même à l'enseignante toute latitude quant à la mise en œuvre. Aussi, nous avons cherché à connaître les modalité de travail prévues : en groupe, individuellement ou collectivement ? les élèves auront-ils individuellement un support écrit ou pas ? (fiche, ardoise…) ?

– L’aménagement de l’ingénierie didactique. Y a t-il eu des séances de régulation entre deux séances de l’ingénierie didactique ? Certaines avancées chronogénétiques ont-elles été réutilisées à d’autres moments de la semaine ?

Les entretiens *post* ont eu lieu après la séance ou le soir même. Ces entretiens avaient pour but de recueillir les réactions à chaud de l’enseignante quant au déroulement de la séance. En conservant le même esprit qu’en entretien *ante*, nous revenions sur certaines questions posées en entretien *post*, relativement aux objectifs atteints ou non de la séance, aux difficultés rencontrées, attendues ou non, aux avancées chronogénétiques perçues par l’enseignante.

Les réunions collectives ont été enregistrées, excepté la première. Pour autant, du fait de la longueur de ces réunions, nous n’avons exploité le plus souvent que nos prises notes écrites, les enregistrements de réunions permettant de revenir sur certaines imprécisions dans la prise de note.

3.2.2.4.2. Les préparations des enseignantes

Nous avions demandé à chaque enseignante de conserver leurs préparations de classe et de noter au fur et à mesure leurs impressions, réflexions ou interrogations à propos de l’ingénierie didactique elle même ou de sa mise en œuvre.

3.2.2.5. Synthèse des traces recueillies en France

Les enregistrements audio et vidéo des séances d’enseignement, les notes prises au vol lors des séances et les documents distribués aux élèves constituent le corpus principal. Le corpus connexe est composé des enregistrements audio des entretiens *ante* et *post* pour chacune des séances d’enseignement, des enregistrements et prise de notes lors des réunions avec les enseignantes, des préparations des enseignantes constituent le corpus connexe. Le tableau suivant dresse un résumé du recueil des données pour chacun des pays.

En France (sites 2 et 3)
Corpus principal relatif aux activités en classe : – Les enregistrements vidéo (caméras) et audio (dictaphones) des séances pour chacune des deux classes (21 séances pour le site 1 et 19 séances pour le site 2) – Un carnet de notes prises au vol

– Les traces écrites produites par les élèves pendant les séances observées – Les évaluations intermédiaires et finales des élèves **Corpus connexe :** – Les enregistrements *ante* et *post* séance pour chacune des séances – Les enregistrements audio des regroupements collectifs de la recherche collaborative et les prises de notes associées – Les préparations de classes des enseignantes – Les traces écrites produites hors des séances observées

Tableau 3 : recueil de traces en France

3.3. Modalités d'analyse et d'interprétation

Dans « ViSA : Instrumentation de la recherche en éducation », Sensevy (2013) montre que « l'appréhension de l'action humaine peut se penser dans une dialectique de l'analogique et du digital, c'est-à-dire de la dépiction (le compte rendu d'une réalité par l'image) et de la description (le compte rendu d'une réalité par le texte) » (p. 29). L'auteur précise ensuite que « rendre compte de l'action, c'est la transformer en un système d'inscription hybride, fait d'images et de textes ». En ce sens, films, transcriptions, synopsis sont autant de pièces rendant compte de l'action didactiques, utiles, voire nécessaire pour l'analyse et l'interprétation des pratiques didactiques observées.

. Nous décrivons dans les sections suivantes la fabrication des pièces constituant ce système et que nous utilisons dans nos analyses.

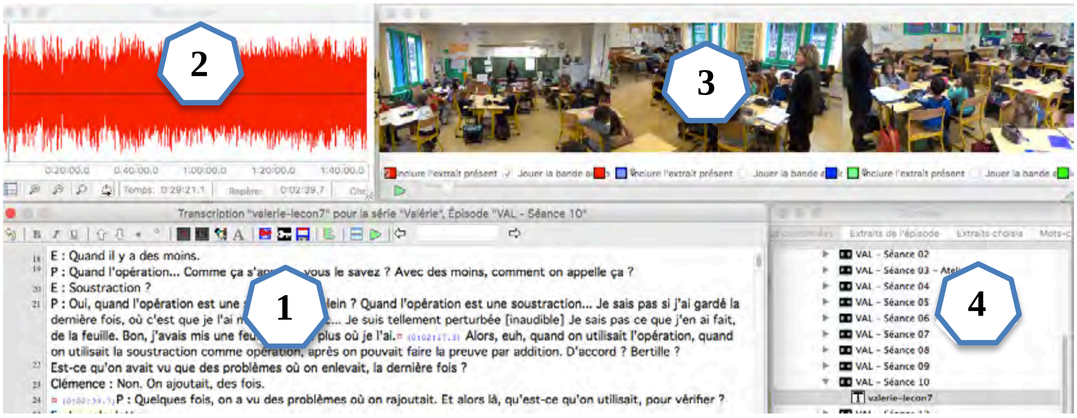
3.3.1. Méthodes pour l'analyse macrodidactique de l'implémentation de l'ingénierie didactique

3.3.1.1. La fabrication des données : des transcriptions aux synopsis

3.3.1.1.1. Les transcriptions

Sensevy (2013) soutient que « l'enquête s'établit en particulier dans la mise en relation systématique entre les unités signifiantes du film et celle du texte (originairement établi à partir du film), qu'il est illusoire de penser que la transcription, aussi précisément codée, puisse « remplacer le travail effectif de mise en lien de la transcription (ou de toute autre forme de texte) et des images auxquelles elles se réfèrent » (*Ibid*. p. 29) Nous avons choisi de transcrire tous les films avec le logiciel TRANSANA. Ce logiciel présente quatre fenêtres :

1. une fenêtre « Transcription » contenant la transcription de la vidéo
2. une fenêtre « Bande audio » visualisant le son
3. une fenêtre « Vidéo » visualisant les vidéo
4. enfin la dernière fenêtre « Données » donne accès à la base de données.



Les trois premières fenêtres citées sont liées permettant la mise en relation synchrone du film, du texte (la transcription) et du temps. TRANSANA permet ainsi ce que Sensevy décrit comme « l'aller-retour systématique entre films et textes, entre systèmes plus analogiques et systèmes plus digitaux, *entre systèmes fondés sur la spatialisation du temps et du mouvement, et systèmes fondés sur la mise en évidence du déploiement de la durée et du mouvement*. » (*Ibid*.)

De la même façon, même si l'utilité de ce logiciel était nettement moins remarquable, par commodité, nous l'avons utilisé pour transcrire les entretiens *ante* et *post*.

3.3.1.1.2. L'élaboration des synopsis de séance

La principale difficulté des analyses qualitatives sur des corpus importants (dans notre cas entre 17 et 22 séances selon les sites), impose de construire des outils de condensation de données (Huberman & Miles, 1991). Nous donnons un statut de tableau de condensation des données au synopsis des séances que nous avons construits sur la base des traces vidéographiques collectées. « Un synopsis devra pouvoir constituer, sans jeu de mots, une sorte de tableau clinique, un tableau du système didactique à l'œuvre dans une situation spécifique. Le tableau synoptique constituera ainsi lui-même un dispositif clinique, produit dans une certaine forme de suspension (provisoire) du jugement et de neutralité interprétative. » (Sensevy, 2013, p. 31)

Pour élaborer les synopsis de séance, nous nous sommes référé à Leutenegger (2003) selon un tableau à double entrée : verticalement le découpage temporel de la séance selon la tâche proposée aux élèves, horizontalement des indications d'observables, selon les rubriques présentées ci-après

- En première colonne : Repère temporel dans la séance (indiqué min xx) ; lorsque des évènements sont relevés en cours de séances ils sont notés (Pat-S3-minxxx) dans la cellule concernée ;
- Deuxième colonne : Découpage de la séance selon les modalités de travail (collectif / individuel / groupe) ;
- Troisième colonne : Découpage de la séance selon les tâches proposées aux élèves ;
- Quatrième colonne : Découpage de la séance selon les consignes données par l'enseignant ;
- Quatrième colonne : Découpages selon les attitudes ou procédures des élèves.

Une illustration est donnée ci-après. Les synopsis de séance constituent le matériau à partir desquels nous menons les analyses à l'échelle mésodidactique.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0:00			Rappel mémoire didactique : « Qu'est-ce qu'on a appris ? » Présentation de la séance : « un nouveau problème […] **aussi très peu de temps** »	Chloé : « A compter en vitesse »
	Problème 1 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse t-il à la maison ?			
02:16	Col.		P : *« Combien de billes à la maison ? », « Combien il amène de billes à l'école ? » « Et qu'est-ce qu'on cherche ? »* « Vous avez *1 ou 2 min pour répondre* »	Deux élèves lisent le problème.
3 :27	Ind.	Résoudre	P distribue feuille plastifiée.	**Dessins**, diverses **écritures** : « 58 – 45 » « 58 45 », du résultat (13), **comptage sur les doigts**
7 :23	Col.	Simuler Vérifier empiriquement	Inventaire des réponses et rappel de la fonction de la boite : *« vérifier vos réponses ».* Incitation à utiliser le système de numération (base 10) *« pour aller plus vite […] j'en mets combien ? […] j'en enlève combien ? […] combien il me reste dans la boite ? »*	En réunion autour de la maitresse qui guide : mettre 5 barres de 10 et 8 unités dans la boite, puis enlever 4 barres de 10 et 5 unités. Lara simule puis Maéva compte les cubes restants.
12:26		vérif. intellect.	P : *« Si je fais treize plus quarante-cinq ? […] On retrouve le nombre de départ. »*	Les élèves répondent quasiment tous 58.
12:48	Problème 2 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 4 à l'école. Combien de billes a-t-il laissé à la maison ?			
14:55	Col.	Résoudre	P présente le jeu comme une devinette et demande de répondre rapidement. P lit le problème	Les élèves s'esclaffent.

Figure 9: extrait du synopsis de la séance 2 du site genevois

3.3.1.2. L'analyse des données : du mésodidactique au macrodidactique

3.3.1.2.1. L'élaboration de tableaux de synthèse d'étape

Pour chaque étape de l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre dans chacun des site, nous synthétisons les résultats sous forme de deux tableaux : le premier indique les évolutions mésogénétiques observées au fil des séances constitutives de l'étape ; le second rend compte de l'évolution des savoirs mis réellement à l'étude lors de l'étape. Ces synthèses nous permettent de subsumer les observations menées à l'échelle mésodidactique pour produire un résumé de l'étape de l'ingénierie telle que mise en œuvre dans chaque site. Les interprétations s'intéressent, à ce niveau, à ce qui du point de vue des milieux didactiques ou des savoirs enseignés relèvent soit d'une implémentation compatible avec l'ingénierie didactique, soit de variations par rapport à l'ingénierie en termes d'adaptations ou encore de modifications altérant le sens de l'ingénierie.

Pour des raisons de faisabilité, et compte tenu de la densité des données recueillies et transcrites, nous avons fait le choix de ne pas traiter, dans le chapitre des résultats sur l'analyse macrodidactique, les étapes 3 et 6. L'étape 3, intitulée « Sens et vocabulaire de la soustraction, signe + et -, calcul mental » relève d'un travail de la technique, qui est fort bien maîtrisé par les enseignantes observées, toutes consentant d'ailleurs plus de temps que prévu à cette étape. L'étape 6, intitulée « Vers une technique opératoire de la soustraction » qui conclut l'ingénierie broussaldienne, n'a pas été mise en œuvre à Genève, cet enjeu de savoir ne faisant pas partie du programme. Dans un souci d'harmonisation, nous ne rendons pas compte de l'analyse de cette dernière étape dans les deux sites français, dans la mesure où elle relève, elle aussi d'un travail de la technique. D'autant qu'à la lumière de l'analyse épistémologique de l'ingénierie broussaldienne, nous considérons que les enjeux décisifs et les choix didactiques clés de cette ingénierie de la soustraction portent davantage sur les quatre autres étapes. C'est donc sur les étapes 1, 2, 4 et 5 que nous focalisons, pour produire une analyse macrodidactique des mises en œuvre observées (cf. chapitre 2 des résultats).

3.3.1.2.2. Les niveaux de conclusion macrodidactique

Dans chacun des sites, nous disposons à l'issue du travail empirique des analyses mésodidactiques des séances pour les quatre étapes décisives de l'ingénierie (voir étapes grisées dans la figure ci-dessous)

Étape 1 : **L1, L2, atelier, C1**	**Étape 2 :** **L3, L4, L5**	**Étape 3 :** **L6 & C2, L7, ateliers, L8**	**Étape 4:** **L9, L10, L11**	**Étape 5 :** **L12, L13**	**Étape 6 :** **L14, L15**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**« L'addition comme moyen de preuve d'un résultat. »**	**« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signe + et - Calcul mental »**	**« La stratégie des essais »**	**« Réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs »**	**« La soustraction »**

Du sens d'une différence au sens d'un algorithme

Calculs de plus en plus complexes

Il s’agit donc de remonter des analyses de séances, puis d’étapes, à l’interprétation macrodidactique comme nous le pointions dans la figure page 111 de la section 3.1.4 (supra). Pour ce faire nous examinons les traits récurrents identifiés au fil des mises en œuvre dans chaque site, pour tenter de démêler ce qui relève des influences des pré-construits institutionnels et ce qui relève des déterminants liés à l’épistémologie pratique des enseignantes à travers les deuxième et troisième plans de comparaison des systèmes didactiques (*cf*. section 1.2. Design de la recherche). Cette manière de procéder permet le passage d’analyses mésodidactiques (les diverses séances mises en œuvre dans les trois sites) à l’établissement de faits macrodidactiques (les résultats selon les trois systèmes didactiques observés). L’interprétation macrodidactique permet ainsi d’établir un certain nombre de constats sur chacun des sites, qui sont ensuite comparés deux à deux au regard de l’ingénierie broussaldienne. Nous pensons à l’issue de cette comparaison être en mesure de produire des connaissances génériques, de type qualitatif, sur la question des usages (et mésusages) de ressources didactiques, en lien avec la problématique générale de reproductibilité des ingénieries didactiques.

PARTIE 2 :

Résultats

Les résultats sont présentés en trois chapitres :

- **Le premier chapitre** développe le plan de comparaison relatif aux pré-construits institutionnels au regard desquels seront contextualisées les mises en œuvre de l'ingénierie de la soustraction.
- **Le second chapitre** rend compte, à partir d'une analyse mésodidactique de chaque séance effectuée, quelle est la dynamique macrodidactique d'implémentation de cette ingénierie dans chacun des trois sites.
- **Le troisième chapitre** discute les résultats produits selon le deuxième et troisième plan de comparaison (inter-système éducatif et intra-système français) en lien avec les questions de recherche.

L’objet de cette partie est de présenter les résultats de notre recherche.

Pour chacun des chapitres la composant, nous faisons le choix de présenter en premier les résultats relatifs au site genevois. En étudiant un système dans une aire culturelle différente, nous cherchons à provoquer un sentiment d’ « estrangement » (Ginzburg, 2001) de façon à maintenir une distance avec notre propre environnement. Ce faisant, nous pensons être plus efficiente dans l’analyse du fonctionnement des trois systèmes didactiques. En effet, opter pour un point de vue inhabituel permet de se « constituer un antidote efficace à un risque qui nous guette tous : celui de tenir la réalité pour sûre » (*Ibid.*) Les trois chapitres débuteront donc par la présentation des résultats en Suisse, puis en France, pour ensuite terminer par la comparaison des deux systèmes.

Le premier chapitre, rend compte de l’analyse des curriculums suisses et français, puis de leur comparaison. Il s’agit de mettre en exergue les généricités et les spécificités afin de montrer la pertinence de la comparaison entre deux systèmes didactiques appartenant à deux institutions différentes. Mais il s’agit aussi d’éclairer les mises en œuvre analysées dans le chapitre suivant en conjecturant sur les possibles distances des pré-construits à l’ingénierie didactique telle que proposée dans les différents documents remis aux enseignantes (Berté, 1996 ; Quilio, 2010).

Le deuxième chapitre porte sur une analyse macrodidactique de la mise en œuvre de l’ingénierie au sein de chacun des sites. L’objectif est de comprendre la logique d’implémentation de l’ingénierie didactique. L’analyse comparative permet de relever ce qui, sur le plan institutionnel, culturel ou épistémologique, détermine la mise en œuvre l’ingénierie didactique.

Chapitre 1. Comparaison institutionnelle Étude des pré-construits

Ce chapitre comporte trois sections : les première et seconde sections présentent successivement l'analyse des textes officiels : plan d'étude romand et programme français. La dernière section compare les curriculums pour accéder aux généricités et spécificités des pré-construits institutionnels des deux pays.

Ce premier chapitre des résultats a pour visée d'éclairer les dimensions institutionnelles qui déterminent les pratiques d'enseignement en Suisse et en France. Comme nous l'avons présenté dans le chapitre méthodologique de la première partie, nous comparons du côté français les modes d'enseignement d'une débutante et d'une chevronnée puis de faire la comparaison des modes d'enseignement de deux enseignantes chevronnées, l'une suisse, l'autre française. Il nous a semblé nécessaire de tenir compte des pré-construits institutionnels, culturels et/ou personnels (épistémologie pratique) en faisant l'hypothèse qu'ils sont des déterminants, venant contraindre les pratiques dans des classes ordinaires. Aussi, nous conduisons une étude des textes institutionnels relatifs à l'enseignement des mathématiques dans les deux systèmes éducatifs l'un en France l'autre en Suisse, en nous centrant particulièrement sur l'enseignement de la soustraction à l'école primaire.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre méthodologique l'approche de Schwab (1958, 1964) a permis de construire un *tertium comparationis* (de façon à analyser les programmes français et suisse, selon trois focales. Rappelons-en les éléments centraux.

- Une focale rhétorique en cherchant à faire émerger tout ce qui est de nature à persuader du bien-fondé du pourquoi du choix de tel ou tel objet de savoir dans les curriculums suisse et français,
- Une focale sémantique en recherchant les objets de savoirs mis à l'étude dans en mathématique, en Suisse et en France
- Une focale syntaxique en montrant ce qui relie les objets de savoirs et les organise au sein de la discipline mathématique mais aussi au sein des autres champs des curricula suisse et français.

Les programmes d'études entrelaçant dimensions rhétoriques, sémantiques, et syntaxiques nous indiquons chaque fois que cela est nécessaire la focale utilisée pour l'analyse.

Dans les sections qui suivent, nous rendons compte de l'analyse de contenu de chacun des curriculums suisse et français, avant d'en faire leur comparaison. Pour une meilleure compréhension, nous présentons ci-après le tableau des correspondances[49] entre le système scolaire en Suisse (cycles 1 et 2) et en France (cycles 1 à 3).

[49] Pour un développement voir annexe 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Suisse</th><th>Age</th><th colspan="2">France</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3 - 4 ans</td><td>Petite section (PS)</td><td rowspan="3">Cycle 1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Cycle 1</td><td>1 P-H</td><td>4 - 5 ans</td><td>Moyenne section (MS)</td></tr>
<tr><td>2 P-H</td><td>5 - 6 ans</td><td>Grande section (GS)</td></tr>
<tr><td>3 P-H</td><td>6 - 7 ans</td><td>Cours préparatoire (CP)</td><td rowspan="2">Cycle 2</td></tr>
<tr><td>4 P-H</td><td>7 - 8 ans</td><td>Cours élémentaire 1 (CE1)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Cycle 2</td><td>5 P-H</td><td>8 - 9 ans</td><td>Cours élémentaire 2 (CE2)</td><td rowspan="3">Cycle 3</td></tr>
<tr><td>6 P-H</td><td>9 - 10 ans</td><td>Cours moyen 1 (CM1)</td></tr>
<tr><td>7 P-H</td><td>10 - 11 ans</td><td>Cours moyen 2 (CM2)</td></tr>
<tr><td>8 P-H</td><td>11 - 12 ans</td><td>6ème</td><td>Collège</td></tr>
</table>

Tableau 4 : tableau de correspondance Suisse – France aux cycles 1 et 2

1. Enseignement des mathématiques à l'école primaire en Suisse

1.1. Contexte

En Suisse, la scolarité obligatoire se déroule sur 11 années, selon 3 cycles pluriannuels. Les deux premiers cycles se situent à l'école primaire, le premier cycle concernant les grades de 1P-H à 4P-H (début de primaire), et le second les grades de 5P-H à 8P-H (fin de primaire). Le troisième cycle (appelé cycle d'orientation à Genève) concerne les grades de 9CO à 11CO (3 dernières années du collège français – 12 à 15 ans). Notre objet d'étude, l'enseignement de la soustraction, se situe au niveau 4P-H, correspondant à des élèves de 7-8 ans. Le niveau correspondant en France est le CE1 (*cf.* tableau ci-dessus).

L'analyse qui suit s'inscrit dans le cadre du nouveau plan d'étude romand[50], paru en 2011. Les objectifs généraux de l'école publique en Suisse sont définis dans une déclaration de la Conférence Inter cantonale de l'Instruction Publique (CIIP) de la Suisse : « l'école publique assure une mission globale et générale de formation qui intègre des tâches d'éducation et d'instruction permettant à tous les élèves d'apprendre et d'apprendre à apprendre afin de devenir apte à poursuivre leur formation tout au long de leur vie. […] Elle assure la construction de connaissances et l'acquisition de compétences permettant à chacun et chacune de développer ses potentialités de manière optimale » (PER, Déclaration de la CIIP, page 12).

[50] Rappelons qu'à partir de 2011, le nouveau plan d'études romand, le PER, est la résultante d'une négociation de compromis entre les cantons romands.

En mathématique, il s'agit de développer une culture « impliquant la maîtrise des concepts et des démarches mathématiques de base, développant l'utilisation du langage mathématique, la capacité de modéliser des situations et de résoudre des problèmes » (*Ibid.*, page 13). Nous voyons ici apparaître les premiers mots clés qui, au travers d'une focale tantôt rhétorique, tantôt syntaxique, guideront notre lecture du Plan d'Étude Romand (PER) : « posture scientifique », « résolution de problèmes », « concepts et démarches » et « modélisation ».

1.2. Le Plan d'Étude Romand : « un projet global de formation de l'élève »

Le plan d'étude romand présente un programme global de formation de l'élève de la maternelle à la fin de la scolarité obligatoire. Dans sa déclaration, la CIIP définit les finalités et objectifs de l'école en trois paragraphes : i) « assumer des missions d'instruction et de transmission culturelle, […] assurer la construction de connaissances et l'acquisition de compétences », ii) « assumer des missions d'éducation et de transmission de valeurs sociales », iii) « assurer l'acquisition et le développement de compétences et de capacités générales ».

1.2.1. Structure du document analysé

Nous avons étudié le plan d'étude romand dans sa version numérique. L'Extrait 1 montre la page d'entrée du site internet https://www.plandetudes.ch. Celle-ci est composée de liens hypertextes menant aux documents correspondants.

Extrait 1 : Plan d'Étude Romand : page d'accueil du site https://www.plandetudes.ch visité le 24/10/2014

Notre étude a porté sur trois documents : la présentation générale du PER, les commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la nature (MSN), le programme relatif au module MSN 13

- La présentation générale du PER

Ce texte présente les orientations générales du plan d'étude Romand. Brossant un rapide descriptif de la structure du Plan, il rappelle les missions première de l'éducation en Suisse romande.

Présentation et organisation du Plan d'études romand (PER)

- Déclaration de la CIIP
- Contexte
- Structure du Plan d'études romand
- Les domaines disciplinaires
- Les Capacités transversales
- La Formation générale
- Les liens
- Formes du Plan d'études romand
- Symboles et abréviations
- Lexique Présentation générale
- Remerciements

Extrait 2 : Présentation générale du Plan d'Étude Romand

- Les commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la nature (MSN)

Les commentaires généraux du domaine MSN posent les visées et intentions du domaine. Il présente la structure du domaine et l'articulation des mathématiques et Sciences de la nature aux autres axes thématiques « Formation générale » et « capacités transversales » ;

Sommaire

- Intentions
- Structure globale du domaine
- Réseau des objectifs d'apprentissage
- Conditions cadre matérielles et organisationnelles
- Contribution au développement des Capacités transversales
- Contribution à la Formation générale
- Contribution à la langue de scolarisation
- Remarques spécifiques

Extrait 3 : Commentaires généraux du domaine MSN

- Le module MSN 13 – résoudre des problèmes additifs

Le module MSN 13 s’inscrit dans l’axe thématique « Opérations » au niveau du premier cycle. Il présente les notions et concepts mathématiques mis à l’étude durant les quatre années du premier cycle.

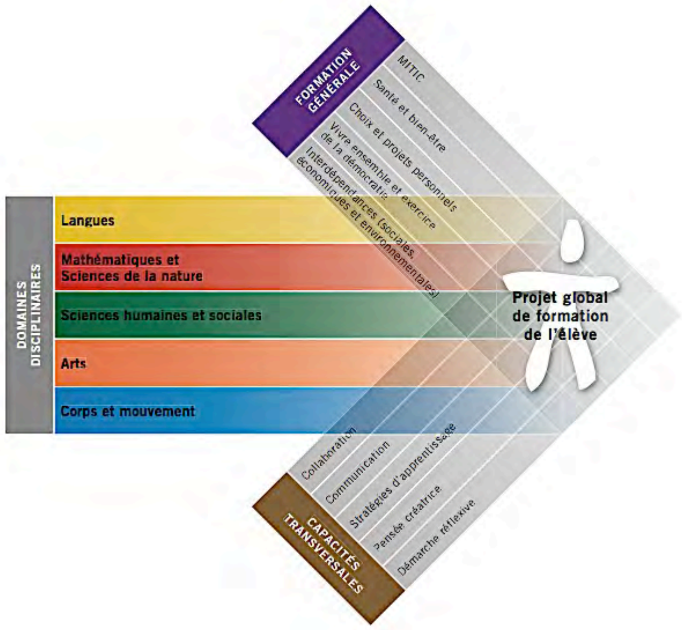
Extrait 4 : MSN 31 - Résoudre des problèmes additifs

1.2.2. Une rhétorique centrée sur l’interdisciplinarité

Nous constatons que le Plan d’Étude Romand reprend point par point les orientations de la CIIP: il est structuré selon trois entrées :

- une entrée « Domaines disciplinaires » constituée des disciplines Langues, Mathématiques et Sciences de la nature, Sciences humaines et sociales, Arts, Corps et mouvement,
- une entrée « Formation générale » comprenant MITIC, Santé et bien-être, Choix et projets personnels, Vivre ensemble et exercice de la démocratie, Interdépendances (sociales économiques et environnementales) relèvent de la formation générale,
- une entrée « Capacités transversales » composée de Collaboration, Communication, Stratégie d’apprentissage, Pensée créatrice et Démarche réflexive relèvent des capacités transversales.

Chacune de ces entrées est ainsi censée participer au « projet global de formation de l'élève ». Cette idée est très fortement suggérée par l'illustration ci-dessous, se trouvant dès la page d'entrée de la présentation web du PER :



Extrait 5 : structure du PER (extrait du texte officiel PER)

L'entrée disciplinaire rassemble cinq domaines : Langues, Mathématiques et Sciences de la nature, Sciences humaines et sociales, Arts, Corps et mouvement. Nous constatons que dans ce plan d'étude, mathématiques et science de la nature sont associées dans le domaine MSN. Notre objet d'étude appartenant aux mathématiques, nous nous centrons sur l'analyse de ce domaine, et montrons quels liens il entretient avec ces deux axes.

Dans sa présentation générale, relativement aux domaines disciplinaires, le PER exprime explicitement l'idée de pluridisciplinarité, « Chaque domaine est pluridisciplinaire » (PER, présentation générale, p. 26), puis complète son propos par « et implique des interactions concrètes entre les disciplines qui le constituent (liens à l'intérieur d'un domaine). Des liens existent aussi entre domaines et sont mentionnés de cas en cas. » (Ibid.). Dans « De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation » Blanchard-Laville (2000), rappelle les définitions de la pluridisciplinarité et de l'interdisciplinarité : « La pluridisciplinarité, c'est l'étude d'un problème ou d'un objet par des spécialistes de quelques disciplines, sans qu'il y ait de concertation» alors que l'interdisciplinarité « implique à l'inverse qu'il y ait interactions et enrichissement mutuel entre des spécialistes, tant au niveau des connaissances que des méthodes. Il y a interpénétration féconde et dynamique des savoirs entre les disciplines ». Nous appuyant sur ces deux définitions, il nous semble que si le PER présente les domaines d'étude comme pluridisciplinaires, il développe des arguments comportant des implicites relevant de l'interdisciplinarité.

> **Le domaine des Mathématiques et Sciences de la nature** associe des disciplines qui visent à acquérir des méthodes de pensée et d'action tout autant qu'un ensemble de notions et d'outils permettant de modéliser des situations et de résoudre divers problèmes; si leur approche diffère, les *Mathématiques* et les *Sciences de la nature* abordent néanmoins des procédures et des notions propres à certains aspects de la réalité et leurs démarches se complètent et s'enrichissent réciproquement.

Extrait 6 : PER, présentation générale

On trouve ici un premier objet d'interactions, la résolution de problèmes, chacune des disciplines l'éclairant de ses propres outils théoriques et de ses propres démarches. Comment le PER justifie-t-il que par la résolution de problèmes, l'enseignement des mathématiques et des sciences de la nature s'enrichissent mutuellement ? Ces deux disciplines font l'objet de commentaires généraux présentant le domaine. Nous poursuivons notre analyse, pour voir quelle place occupent Mathématiques et Sciences de la nature dans ce domaine au regard des mots clés que nous avons précédemment repérés et des analyseurs construits à partir des propositions de Schwab (1964) et selon la méthode d'analyse de contenu développé dans le chapitre précédent (*cf.* section 2 du chapitre 3 en première partie)

1.3. Le domaine Mathématiques et Sciences de la nature

Le document présentant le domaine MSN commence par un préambule énonçant les « visées prioritaires », visées exprimées pour l'ensemble du domaine et pour toute la scolarité obligatoire : « Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace. » (PER, premier cycle, MSN, p. 5). On comprend ici qu'il s'agit d'étudier des situations contextualisées, de les décontextualiser et de les modéliser pour pouvoir, en s'appuyant sur des concepts et démarches scientifiques, résoudre des problèmes. En utilisant des mots tels que « se représenter », « problématiser », « modéliser », et « résoudre », les concepteurs du PER développent des arguments que l'on peut considérer comme rhétoriques pour justifier que c'est par la résolution de problèmes que l'on peut « construire » et donner sens à ces concepts et démarches. Nous référant cette fois-ci à une focale syntaxique, nous devinons alors que « modélisation » et « résolution de problèmes » vont prendre dans la suite du discours un statut de fédérateurs du domaine MSN.

1.3.1. Rhétorique justifiant la coprésence des mathématiques et de sciences de la nature dans un même domaine

Les précédents plans d'étude cantonaux, genevois particulièrement, ne regroupaient pas les disciplines en domaines. La nouveauté du PER 2011 est d'avoir rassemblé des disciplines en domaines. Aussi, les commentaires généraux relatifs au domaine MSN développent-ils principalement une rhétorique dont l'objectif est de marquer cette rupture et de développer des arguments justifiant la coprésence des mathématiques et des sciences de la nature au sein d'un même domaine.

Les commentaires généraux de ce domaine sont structurés en sept points : dans l'ordre, (i) Intentions, (ii) Structure globale du domaine, (iii) Conditions cadre matérielles et organisationnelles, (iv) Contribution au développement des capacités transversales, (v) Contribution à la formation générale, (vi) Contribution à la langue de scolarisation, (vii) remarques spécifiques.

Toujours d'un point de vue rhétorique, pour convaincre de la cohérence du domaine, le texte du PER alterne paragraphes développant une vision politique[51] et paragraphes développant des aspects plus pratiques :

- les « intentions » relève d'*une vision politique* de la codisplinarité. L'objectif est de montrer l'organisation du domaine, le développement des deux disciplines au sein du domaine ainsi que la position qu'elles occupent l'une par rapport à l'autre.
- Les sections « Structure globale du domaine » et « Conditions cadre matérielles et organisationnelles » présentent *une vision pragmatique* en décrivant la structure du domaine et, en montrant la progressivité des objectifs d'apprentissage tout au long de la scolarité obligatoire, l'efficience du domaine MSN.
- les sections (iv) Contribution au développement des capacités transversales, (v) Contribution à la formation générale, (vi) Contribution à la langue de scolarisation cherchent à démontrer l'ouverture de ce domaine aux autres domaines par le biais de « contributions à … ». Dans *une vision politique*, ces trois sections sont destinées à mettre à jour les liens possibles entre des différentes disciplines ou domaines.

[51] Par analogie à *politikos* définissant le cadre général d'une société organisée et développée.

– Enfin, dans *une vision pragmatique*, la dernière section « remarques spécifiques » conclut sur la répartition entre mathématiques et sciences des visées du plan d'étude romand. Elle met en exergue le caractère transversal de l'axe modélisation, axe thématique commun aux deux disciplines.

Par cette alternance de points de vue, ce texte cherche à persuader (focale rhétorique) non seulement des apports mutuels des mathématiques et des sciences de la nature au sein même du domaine, de son ouverture aux autres domaines du PER, mais aussi de sa faisabilité : en précisant son organisation de manière concrète (structure du domaine, conditions cadre matérielles et organisationnelles), il persuade de son efficience. En ce sens, ce texte de présentation du domaine MSN réussit à conserver l'esprit du PER tel qu'il est annoncé dans son introduction : le domaine MSN s'inscrit bien dans « un projet global de formation de l'élève » (*cf.* Extrait 7). Poursuivons notre analyse en recherchant les arguments promouvant la structure de ce domaine.

Les Intentions des commentaires généraux avancent un premier argument (cf. extrait 3 ci-après) à la construction du domaine MSN. Il est d'ordre sociétal et développe l'idée que mathématiques et sciences de la nature fournissent aux élèves des outils leur permettant de comprendre le monde environnent pour ensuite être en capacité d'agir selon des choix réfléchis. Ainsi, nous lisons à propos du domaine MSN :

> **[...]** Il fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier.
>
> Dans une société fortement marquée par les progrès scientifiques et technologiques, il est important que chacun possède des outils de base lui permettant de comprendre les enjeux des choix effectués par la communauté, de suivre un débat sur le sujet et d'en saisir les enjeux principaux. **[...]**
>
> Par un questionnement sur le monde qui les entoure, on favorise chez eux une prise de conscience des conséquences de leurs actions sur leur environnement.

Extrait 7 : PER – premier cycle – MSN

Nous rapprochons ces propos de ceux de Chevallard (2012) qui propose un nouveau paradigme d'étude scolaire, « le paradigme dit du questionnement du monde, où l'on s'instruit en étudiant des questions auxquelles on essaie par là d'apporter des réponses, rassemblant et étudiant pour cela des œuvres idoines, mathématiques et autres, en fonction des besoins. Les 'programmes' se présentent comme des systèmes codisciplinaires de questions à étudier, qui renvoient secondairement et d'une façon ouverte, exploratoire, à des programmes-noyaux disciplinaires ». (*Ibid.*, p. 32)

Le deuxième argument fait appel aux apports de chacune des disciplines au domaine, au regard de ce questionnement du monde. Dès le premier paragraphe, nous comprenons que l'argumentaire cherchera à montrer la complémentarité entre Mathématiques et Sciences de la nature : le domaine « mobilise et développe des méthodes de pensée et d'action tout autant qu'un ensemble de concepts, de notions et d'outils. » (PER, premier cycle, MSN, p. 7). Ce « tout autant que »[52] annonce la structure de l'argumentaire, qui alterne entre les apports des sciences de la nature et ceux des mathématiques. Un premier paragraphe tend à montrer que les apports des Sciences de la nature sont plutôt du côté de la posture scientifique :

> Face aux évolutions toujours plus rapides du monde, il est nécessaire de développer chez tous les élèves une pensée conceptuelle, cohérente, logique et structurée, d'acquérir souplesse d'esprit et capacité de concevoir permettant d'agir selon des choix réfléchis.

Extrait 8 : PER – premier cycle – MSN

Un second paragraphe cherche à montrer que les mathématiques traitent plutôt des notions et concepts :

> Dans le même ordre d'idées, il est également important de permettre aux élèves de contextualiser l'utilisation des nombres, éléments essentiels dans la communication d'informations et de données, ainsi que de structurer l'espace par l'utilisation de repères universels.

Extrait 9 : PER – premier cycle – MSN

En adoptant un point de vue syntaxique, résolution de problèmes et posture scientifique agencent le domaine MSN de façon à répondre aux « intentions » du domaine : « acquérir un certain nombre de notions, de concepts et de modèles scientifiques, identifier des questions, développer progressivement la capacité de problématiser, mobiliser des outils et des démarches, de tirer des conclusions. » (*Ibid.* p. 7)

1.3.2. Deux mots clés liés à la focale syntaxique : « résolution de problèmes » et « posture scientifique »

Tout en cherchant à montrer que les deux disciplines Mathématiques et Sciences de la nature sont intrinsèquement liées, le PER dessine les champs d'action de chacune des disciplines, ce que nous avons considéré comme relevant de la focale syntaxique :

- En effet pour les mathématiques, le PER attribue « le propos des Mathématiques est de … [tandis que] le propos des sciences est de …». Il attribue aux mathématiques le caractère de « science spéculative, dans la mesure où elle s'intéresse à des objets abstraits tels les nombres ou les figures idéales de la géométrie » (PER, premier cycle, MSN, p. 7).

---

[52] souligné par nous.

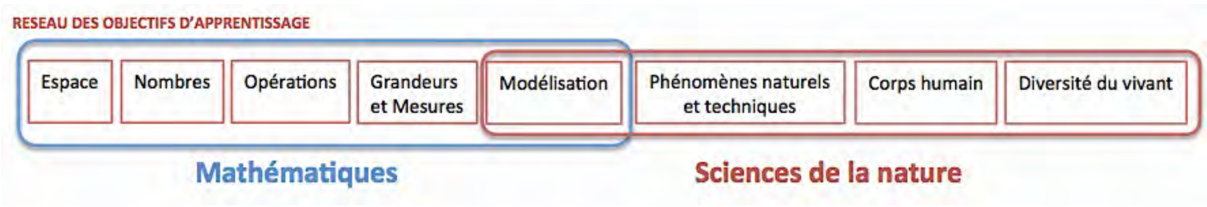
- pour Les Sciences de la nature le PER indique ont quant à elles pour objectifs « d'établir un principe de rationalité dans la confrontation des idées et des théories avec les faits observables dans le monde environnant » (*Ibid.* p7).

Néanmoins, il est clairement formulé que les mathématiques, sont « un outil indispensable au service des Sciences de la nature et des Sciences humaines et sociales, par la mise à disposition de méthodes et d'un langage adéquat à la résolution des problèmes issus de ces disciplines. Elles promeuvent enfin une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation. En cela, leur pratique développe des capacités d'imaginer des stratégies, d'organiser et de structurer des savoirs, de faire des liens entre les champs de connaissance, compétences porteuses d'un certain type de créativité » (*Ibid.*). Ainsi, tout comme nous le verrons plus tard avec l'analyse des programmes français (*cf.* section 2 de ce chapitre) nous retrouvons une volonté d'ouvrir l'enseignement des mathématiques sur les autres disciplines en la présentant comme une discipline permettant « d'offrir des manières de penser » au travers d'outils spécifiques tels que méthodes, concepts, outils. Cette volonté se manifeste dans les deux autres axes du PER, « capacités transversales » ainsi que « formation générale ». Ainsi les paragraphes « Contributions au développement des capacités transversales », « Contribution à la formation générale », « Contribution à la langue de scolarisation », font référence à la posture scientifique et à la résolution de problèmes : participations à des débats scientifiques, analyse critique s'appuyant sur des outils mathématiques, développement du raisonnement. Ces contributions renforcent une rhétorique qui veut montrer l'ouverture de ce domaine aux autres disciplines et ainsi persuader du bien-fondé de l'interdisciplinarité.

1.3.3. La modélisation : articulation du rhétorique et du syntaxique pour valoriser l'interface entre disciplines

Dans la description de la structure globale du domaine, le plan d'étude énonce explicitement que la modélisation est à l'interface des deux disciplines : « La thématique *Modélisation* est commune aux deux parties. Il s'agit de la considérer avec chaque objectif d'apprentissage » (PER, premier cycle, MSN, p. 8).

Le réseau des objectifs d'apprentissage traduit l'interface entre Mathématiques et Sciences de la nature (*cf.* extrait ci-après).



Extrait 10 : MSN – extrait du réseau des objectifs d'apprentissage dans le PER

Cette présentation des objectifs relève selon nous d'une argumentation rhétorique sur la visée de transversalité des apprentissages, tout en pointant certaines dimensions spécifiquement disciplinaires (focale syntaxique). Ainsi le thème « modélisation », commun aux deux disciplines, se déploie en objectifs d'apprentissage présentés en réseau couvrant l'ensemble de la scolarité obligatoire (*cf.* Extrait 13) ce qui soutient notre interprétation d'articulation en termes du rhétorique et du syntaxique.

D'un point de vue syntaxique, le PER souligne l'aspect organisateur de la modélisation en précisant la place et le rôle de la modélisation au sein de chaque discipline. Dans les « Remarques spécifiques », nous lisons :

> En *Mathématiques*, à la différence des *Sciences de la nature*, on se focalise plutôt sur le traitement du problème. Ce traitement a lieu après la modélisation, souvent liée au contexte, et s'organise en essais-erreurs, ajustements, généralisation, formulation d'une conjecture et validation de celle-ci par une démonstration mathématique. En revanche, en sciences, le nœud de la démarche se trouve dans la modélisation du phénomène, comprenant la problématisation de la situation, l'émission d'hypothèses, la mise en place d'une expérimentation ou d'observations répétées, l'analyse des résultats et la vérification des hypothèses par confrontation à la réalité.

Extrait 11 : Commentaires généraux du domaine MSN

Par ailleurs, les précisions apportées dans le texte quant aux contributions du domaine aux autres axes du PER (Capacités transversales , Formation générale) souligne, à propos de la modélisation, son statut interface. Nous présentons ci-dessous, à titre d'exemple, deux extraits l'un pour la Pensée créatrice et l'autre pour la Démarche réflexive.

> - la *Pensée créatrice*, notamment en amenant l'élève à imaginer des modèles, des explications, des procédés, des expérimentations, des moyens et des outils de mesure, à accepter le risque et l'inconnu, en se représentant et en projetant diverses modalités de réalisation;
> - la *Démarche réflexive*, notamment en amenant l'élève à choisir des méthodes adéquates, à vérifier hypothèses par confrontation au réel, en développant son regard critique sur ses propres choix et/ou résultats et ceux des autres, en l'amenant à renoncer aux idées toutes faites sur la compréhension de phénomènes naturels ou mathématiques, à analyser l'adéquation d'un modèle choisi, pour une représentation statistique par exemple, et les limites qu'il comporte.

Extrait 12 : Commentaires généraux du domaine MSN

La modélisation est ainsi à l'interface des deux parties Mathématiques et Sciences de la nature. Chacune y fait référence à l'intérieur même des modules composant le domaine MSN.

1.3.4. Le « réseau des objectifs d'apprentissage » ou la focale sémantique du curriculum de mathématiques.

Nous avons vu que la structure globale du domaine est schématisée par un tableau décliné pour toute la scolarité obligatoire. Ce tableau, que le PER nomme réseau des objectifs d'apprentissage schématise la structure globale du domaine (*cf.* ci-dessous, p.139) pour toute la scolarité obligatoire. Ainsi, relativement aux Mathématiques et Sciences de la nature, il présente de la maternelle à la fin du cycle d'orientation, une vision synthétique visant à montrer la cohérence du plan de formation dans sa globalité (focale rhétorique) : « Les activités menées à l'école s'inscrivent dans un projet global de formation rendu concret par le Plan d'études romand ». (Cycle_2_webCIIP.pdf).

RÉSEAU DES OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

	Espace	*Nombres*	*Opérations*	*Grandeurs et mesures*	*Modélisation*	*Phénomènes naturels et techniques*	*Corps humain*	*Diversité du vivant*	
Premier cycle	**MSN 11** Explorer l'espace… **Mathématiques**	**MSN 12** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres naturels… **Mathématiques**	**MSN 13** Résoudre des problèmes additifs… **Mathématiques**	**MSN 14** Comparer et sérier des grandeurs… **Mathématiques**	**MSN 15** Représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 16** Explorer des phénomènes naturels et des technologies… **Sciences de la nature**	**MSN 17** Construire son schéma corporel pour tenir compte de ses besoins… **Sciences de la nature**	**MSN 18** Explorer l'unité et la diversité du vivant… **Sciences de la nature**	Premier cycle
Deuxième cycle	**MSN 21** Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace… **Mathématiques**	**MSN 22** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels… **Mathématiques**	**MSN 23** Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs… **Mathématiques**	**MSN 24** Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs… **Mathématiques**	**MSN 25** Représenter des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 26** Explorer des phénomènes naturels et des technologies à l'aide de démarches caractéristiques des sciences expérimentales… **Sciences de la nature**	**MSN 27** Identifier les différentes parties de son corps, en décrire le fonctionnement et en tirer des conséquences pour sa santé… **Sciences de la nature**	**MSN 28** Déterminer des caractéristiques du monde vivant et de divers milieux et en tirer des conséquences pour la pérennité de la vie… **Sciences de la nature**	**Deuxième cycle**
Troisième cycle	**MSN 31** Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace… **Mathématiques**	**MSN 32** Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels… **Mathématiques**	**MSN 33** Résoudre des problèmes numériques et algébriques… **Mathématiques**	**MSN 34** Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs… **Mathématiques**	**MSN 35** Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques **Mathématiques / Sciences de la nature**	**MSN 36** Analyser des phénomènes naturels et des technologies à l'aide de démarches caractéristiques des sciences expérimentales… **Sciences de la nature**	**MSN 37** Analyser les mécanismes des fonctions du corps humain et en tirer des conséquences pour sa santé… **Sciences de la nature**	**MSN 38** Analyser l'organisation du vivant et en tirer des conséquences pour la pérennité de la vie… **Sciences de la nature**	Troisième cycle

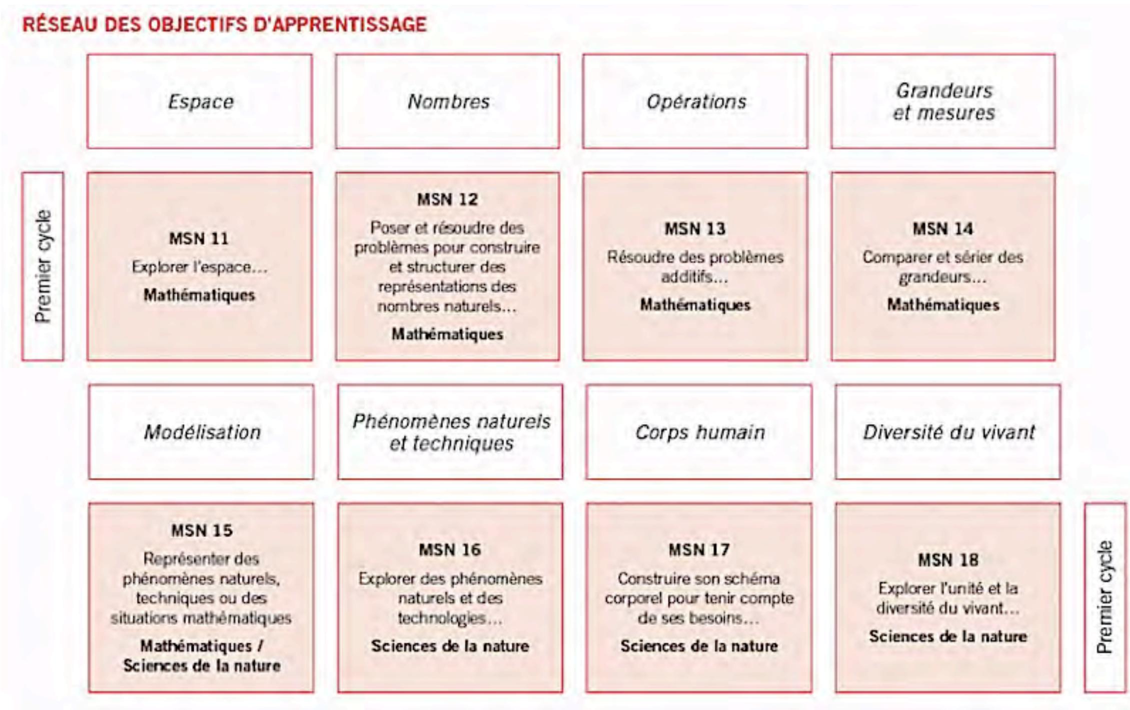
Extrait 13 : réseau des objectifs d'apprentissage

Néanmoins, ce tableau indique que le domaine MSN est découpé en huit thématiques, pouvant être rattachées à ce que Schwab appelle la dimension sémantique du curriculum c'est-à-dire sa substance conceptuelle. La partie Mathématiques pour sa part contient cinq thèmes : Espace, Nombres, Opérations, Grandeurs et mesures, Modélisation. La partie Sciences de la nature contient 4 thèmes : Modélisation, Phénomènes naturels et techniques, Corps humain, Diversité du vivant. Rappelons que le thème Modélisation articule des deux sous-domaines (M / SN).

Deux lectures de ce tableau sont possibles, l'une par cycle (cycle 1, 2 ou 3), l'autre par thèmes d'étude :

- L'entrée par cycle permet de voir les différents champs mis à l'étude à l'intérieur d'un cycle.

Au premier cycle (*cf.* tableau ci-après), par exemple, il s'agit pour les mathématiques d'explorer l'espace, de poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres naturels, de résoudre des problèmes additifs, de comparer et sérier des grandeurs, de représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques. Pour les sciences de la nature, il s'agit de représenter des phénomènes naturels, techniques ou des situations mathématiques, d'explorer des phénomènes naturels et des technologies, de construire son schéma corporel pour tenir compte de ses besoins et d'explorer l'unité et la diversité du vivant. Ces éléments syntaxiques sont ensuite déclinés d'un point de vue sémantique soit verticalement, soit horizontalement.

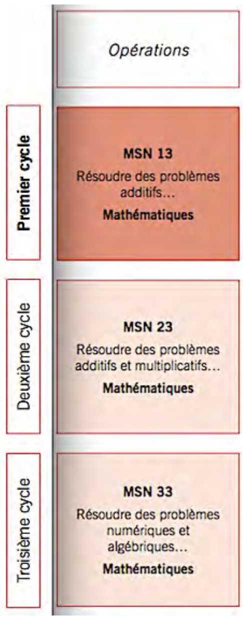


Extrait 14 : MSN-extrait du réseau des objectifs d'apprentissage au cycle 1

– L'entrée par thème permet de montrer, selon une focale sémantique, la progressivité des notions étudiées tout au long de la scolarité obligatoire.

Le thème « Opérations » par exemple évolue d'un cycle à l'autre tout au long de la scolarité (*cf.* tableau ci-contre montrant ainsi sa progression), affichant ainsi une progressivité dans les apprentissages sur l'ensemble du parcours scolaire obligatoire :

- au cycle 1 [4 - 8 ans], il s'agit de résoudre des problèmes additifs,
- au cycle 2 [8 - 12 ans], il s'agit de résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs,
- au cycle 3 [12 - 15 ans], il s'agit de résoudre des problèmes numériques et algébriques.



Extrait 15 : MSN - Progression du thème "opérations" tout au long de la scolarité obligatoire

Nous constatons cependant que chaque module est défini par un type de tâche et non pas par des objectifs notionnels : les modules MSN 12 et MSN 13 qui couvrent le champ numérique (nombre et opération) sont définis par le type de tâche « résoudre des problèmes » ce qui est l'objectif affiché dans les visées du PER : « le domaine choisit de développer la résolution de problèmes et la posture scientifique » (PER, premier cycle, MSN, p. 7).

Notre objet de recherche, la construction du sens de la soustraction, se situant au premier cycle dans l'axe thématique « opérations », (*cf.* Extrait 15) nous nous intéressons plus particulièrement au module MSN13 Résoudre des problèmes additifs dont nous faisons l'analyse de contenu dans la section qui suit.

1.4. Le module MSN 13 : entre syntaxique et sémantique

Chacun des modules du réseau d'apprentissage est structuré ainsi : un tableau indique une « progression des apprentissages », des « attentes fondamentales » ainsi que des « indications pédagogiques », désignant ainsi aux enseignants une direction pédagogique et didactique.

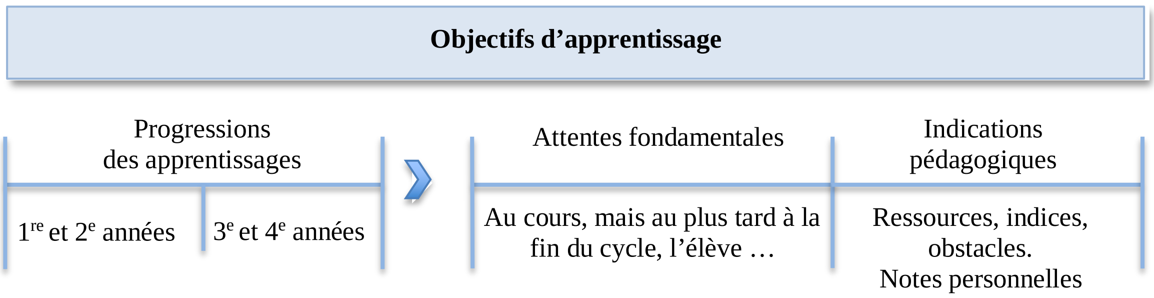
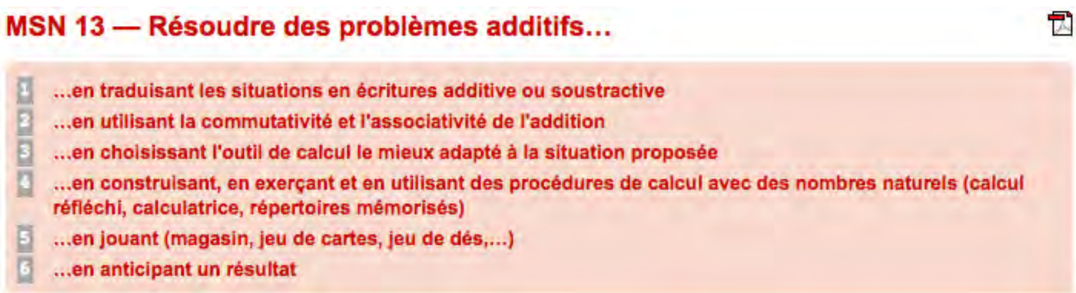


Figure 10 : structure du module MSN 13 – résoudre des problèmes additifs

1.4.1. Les objectifs d'apprentissage

Le module MSN 13 décrit les objectifs généraux pour les 4 années du cycle 1. L'intitulé même de ce module rappelle le choix énoncé dans les commentaires généraux du domaine : il s'agit de « résoudre des problèmes » pour *in fine* étudier des concepts mathématiques relevant du champ additif. D'un point de vue syntaxique, nous en déduisons que la résolution de problèmes joue un rôle d'organisateur des concepts inscrits dans le module MSN13.



MSN 13 — Résoudre des problèmes additifs…

1. …en traduisant les situations en écritures additive ou soustractive
2. …en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition
3. …en choisissant l'outil de calcul le mieux adapté à la situation proposée
4. …en construisant, en exerçant et en utilisant des procédures de calcul avec des nombres naturels (calcul réfléchi, calculatrice, répertoires mémorisés)
5. …en jouant (magasin, jeu de cartes, jeu de dés,…)
6. …en anticipant un résultat

Extrait 16 : MSN 13 : objectifs d'apprentissage

À la lecture des objectifs d'apprentissage (*cf.* Extrait 16), nous constatons que les objectifs sont exprimés en terme de type de tâches : le type de tâche « résoudre des problèmes additifs » est ici décomposé en sous-type de tâches adossées à des techniques ou propriétés mathématiques. Certains objectifs mathématiques enjeux d'étude sont indiqués aux enseignants à travers une liste de « composantes »[53] de nature sémantique en référence à Schwab : la composante 2 par exemple porte sur la résolution de problèmes additifs « en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition », tandis que la composante 5 porte sur la résolution de problèmes « en jouant ». Notons que cette incise ne relève pas de la

[53] Composante : terminologie utilisée par les moyens d'enseignements.

structure conceptuelle des mathématiques mais renvoie à une démarche d'apprentissage sur laquelle nous serons amenée à revenir.

1.4.2. « La progression des apprentissages » : le sens des opérations avant la technique.

Le texte décrivant la progression des apprentissages est en deux parties et tente d'articuler le sémantique relatif aux objectifs d'apprentissage et le syntaxique, c'est-à-dire l'organisation des objets de savoir au sein des dimensions fondamentales de la discipline.

La première partie met l'accent sur la résolution de problèmes.

Résolution de problèmes

PROGRESSION DES APPRENTISSAGES		ATTENTES FONDAMENTALES	INDICATIONS PÉDAGOGIQUES
1^{re} – 2^{e} années	3^{e} – 4^{e} années	Au cours, mais au plus tard à la fin du cycle, l'élève…	Ressources, indices, obstacles. Notes personnelles
Domaine numérique de travail: nombres naturels de 0 à 10	**Domaine numérique de travail:** nombres naturels de 0 à 20 en 3^{e} et de 0 à 200 en 4^{e}		*Précisions cantonales :*
ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES			
Résolution de problèmes numériques en lien avec les opérations étudiées, notamment : (A, B, D, E, F, G) • tri et organisation des informations *(liste, schéma,…)* • mise en œuvre d'une démarche de résolution • ajustement d'essais successifs • déduction d'une information nouvelle à partir de celles qui sont connues • vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats		▫ résout des problèmes additifs et soustractifs (de type EEE ou recherche de l'état final d'une transformation d'états ETE) avec des nombres inférieurs à 20 et faisant appel à une ou plusieurs des composantes suivantes : • choix et mise en relation des données nécessaires à la résolution • choix de l'opération : addition ou soustraction • vérification de la pertinence du résultat • communication de la démarche (oralement) et du résultat ▫ traduit un problème additif ou soustractif (de type EEE ou recherche de l'état final d'une transformation d'états ETE) en une écriture mathématique appropriée	Concernant la résolution de problèmes, cf. Remarques spécifiques sous Commentaires généraux MSN La résolution de problèmes ainsi décrite est destinée à s'appliquer aux progressions d'apprentissage du champ : • **Calculs** Problèmes additifs : • dans les problèmes de type EEE, la question peut porter sur un des états partiels ou sur l'état final • dans les problèmes de type ETE, la question peut porter sur l'état initial, la transformation ou l'état final Approche de la multiplication : il s'agit de sensibiliser les élèves au concept de multiplication et non pas de les entraîner à mémoriser le répertoire multiplicatif
	• traduction des données d'un problème en opérations arithmétiques : additions et soustractions (1)		
Résolution de problèmes additifs et soustractifs (EEE, ETE), sans formalisation, en jouant la situation, en dessinant, ou en utilisant du matériel (1, 5)	Résolution de problèmes additifs et soustractifs (EEE, ETE, ECE) (1, 5)		
	Approche de la multiplication à l'aide de situations-problèmes adaptées : situations d'itération (5+5+5) ou liées au produit cartésien (3x5)		

Extrait 17 : MSN 13 - résoudre des problèmes additifs

Un paragraphe entier, commun aux quatre années, donne des « éléments pour la résolution de problèmes ». Il s'agit de résoudre des problèmes numériques « en lien avec les opérations étudiées ».

ÉLÉMENTS POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES
Résolution de problèmes numériques en lien avec les opérations étudiées, notamment : (A, B, D, E, F, G) • tri et organisation des informations *(liste, schéma,…)* • mise en œuvre d'une démarche de résolution • ajustement d'essais successifs • déduction d'une information nouvelle à partir de celles qui sont connues • vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats

Extrait 18 : liste de tâches pour résoudre des problèmes (PER - MSN13 - p. 18)

La place importante que cette partie occupe dans la progression des apprentissages (*cf.* Extrait 18) rappelle les visées du domaine MSN : il s'agit de « résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements » (PER-MSN-Commentaires généraux – p. 5). Il est rappelée avec force dans les indications pédagogiques que « la résolution de problèmes ainsi décrite est destinée à s'appliquer aux progressions d'apprentissage du champ calcul » (PER-MSN 13 – p. 18).

Si durant tout le cycle, on résout des problèmes additifs et soustractifs en s'attachant aux composantes 1 et 5 (respectivement, en traduisant les situations en écritures additive ou soustractive, ou en jouant), la progressivité des apprentissages sur les quatre années porte sur des problèmes relevant de la typologie relative aux problèmes additifs élaborée par Vergnaud[54] (1981/1991) dans la théorie des champs conceptuels : les problèmes appartenant à la catégorie EEE (combinaison d'états) et/ou ETE (transformation d'état) sont étudiés durant les deux premières années tandis que ceux appartenant à la catégorie ECE (comparaison d'état) le sont les deux années suivantes. Cette progressivité dans la mise à l'étude des problèmes additifs laisse à penser que l'objectif visé est la compréhension des concepts opératoires avant la maitrise d'une technique soustractive.

Nous constatons par ailleurs que le PER tient compte de résultats de recherche en didactique (*cf.* section 1.4 du chapitre 1 de la première partie) : il fait explicitement référence à la théorie des champs conceptuels élaborée par Vergnaud. Les indications pédagogiques insistent sur le sens des opérations en incitant à varier les problèmes, en faisant porter les questions sur les différents états (partiels, final, initial) ou sur la transformation elle-même :

[54] Les travaux de Vergnaud aux confins de la psychologie et de la didactique ont permis d'élaborer … Cet auteur dont les travaux se situent dans le droit fil de la construction des connaissances chez Piaget, a largement influencé les pratiques d'enseignement et de formation en mathématiques à Genève.

ATTENTES FONDAMENTALES	INDICATIONS PÉDAGOGIQUES
Au cours, mais au plus tard à la fin du cycle, l'élève…	**Ressources, indices, obstacles. Notes personnelles**
▫ résout des problèmes additifs et soustractifs (de type EEE ou recherche de l'état final d'une transformation d'états ETE) avec des nombres inférieurs à 20 et faisant appel à une ou plusieurs des composantes suivantes : • choix et mise en relation des données nécessaires à la résolution • choix de l'opération : addition ou soustraction • vérification de la pertinence du résultat • communication de la démarche (oralement) et du résultat ▫ traduit un problème additif ou soustractif (de type EEE ou recherche de l'état final d'une transformation d'états ETE) en une écriture mathématique appropriée	Concernant la résolution de problèmes, cf. Remarques spécifiques sous Commentaires généraux MSN La résolution de problèmes ainsi décrite est destinée à s'appliquer aux progressions d'apprentissage du champ : • **Calculs** Problèmes additifs : • dans les problèmes de type EEE, la question peut porter sur un des états partiels ou sur l'état final • dans les problèmes de type ETE, la question peut porter sur l'état initial, la transformation ou l'état final Approche de la multiplication : il s'agit de sensibiliser les élèves au concept de multiplication et non pas de les entraîner à mémoriser le répertoire multiplicatif

Extrait 19 : attentes fondamentales et indications pédagogiques pour résoudre des problèmes (PER - MSN13 - p. 18)

La seconde partie présente les concepts mathématiques mis à l'étude relevant du champ numérique du domaine MSN 13.

Le recomptage est utilisé lors des deux premières années ; en troisième et quatrième année, les concepts mathématiques mis à l'étude font appel au système de numération : « Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ».

Calculs

PROGRESSION DES APPRENTISSAGES		ATTENTES FONDAMENTALES	INDICATIONS PÉDAGOGIQUES
1re – 2e années	**3e – 4e années**	**Au cours, mais au plus tard à la fin du cycle, l'élève…**	**Ressources, indices, obstacles. Notes personnelles**
CALCULS			
Liens FG 11 – MITIC			
Utilisation du recomptage (3)	Utilisation du surcomptage (3) Utilisation d'outils de calcul appropriés : calcul réfléchi avec possibilité d'utiliser un support *(bande numérique, tableau des nombres,…)*, répertoire mémorisé, calculatrice (3, 4)	▫ utilise des procédures de calcul réfléchi pour effectuer de manière efficace une addition de deux termes dont la somme est inférieure à 100 sans échanges unités-dizaine et une soustraction dont chaque terme est inférieur à 100 sans échanges dizaine-unités *(12+65; 24+13; 30+20; 48–6; 53–20,…)*	Dans la première partie du cycle, dès qu'un enfant a acquis la conservation du nombre, il peut utiliser le *surcomptage*
	Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace (2, 4)		
	Mémorisation du répertoire additif de 0+0 à 9+9 (4)	▫ maîtrise le répertoire mémorisé de 0+0 à 9+9	
	Mémorisation du répertoire soustractif de 0-0 à 10-10 (4)		
	Anticipation du résultat d'un calcul (5)		

Extrait 20 : progressions et indications pédagogiques pour calculer

Le calcul réfléchi est travaillé dès la troisième année « avec possibilité d'utiliser un support *(bande numérique, tableau des nombres,…)*, répertoire mémorisé, calculatrice ».

PROGRESSION DES APPRENTISSAGES	ATTENTES FONDAMENTALES
3e – 4e années	Au cours, mais au plus tard à la fin du cycle, l'élève…
CALCULS	
Utilisation du surcomptage (3) Utilisation d'outils de calcul appropriés : calcul réfléchi avec possibilité d'utiliser un support *(bande numérique, tableau des nombres,…)*, répertoire mémorisé, calculatrice (3, 4)	▫ utilise des procédures de calcul réfléchi pour effectuer de manière efficace une addition de deux termes dont la somme est inférieure à 100 sans échanges unités-dizaine et une soustraction dont chaque terme est inférieur à 100 sans échanges dizaine-unités *(12+65; 24+13; 30+20; 48–6; 53–20,…)*
Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace (2, 4)	
Mémorisation du répertoire additif de 0+0 à 9+9 (4)	▫ maîtrise le répertoire mémorisé de 0+0 à 9+9
Mémorisation du répertoire soustractif de 0-0 à 10-10 (4)	
Anticipation du résultat d'un calcul (6)	

Extrait 21 : progressions et attentes fondamentales en techniques opératoires

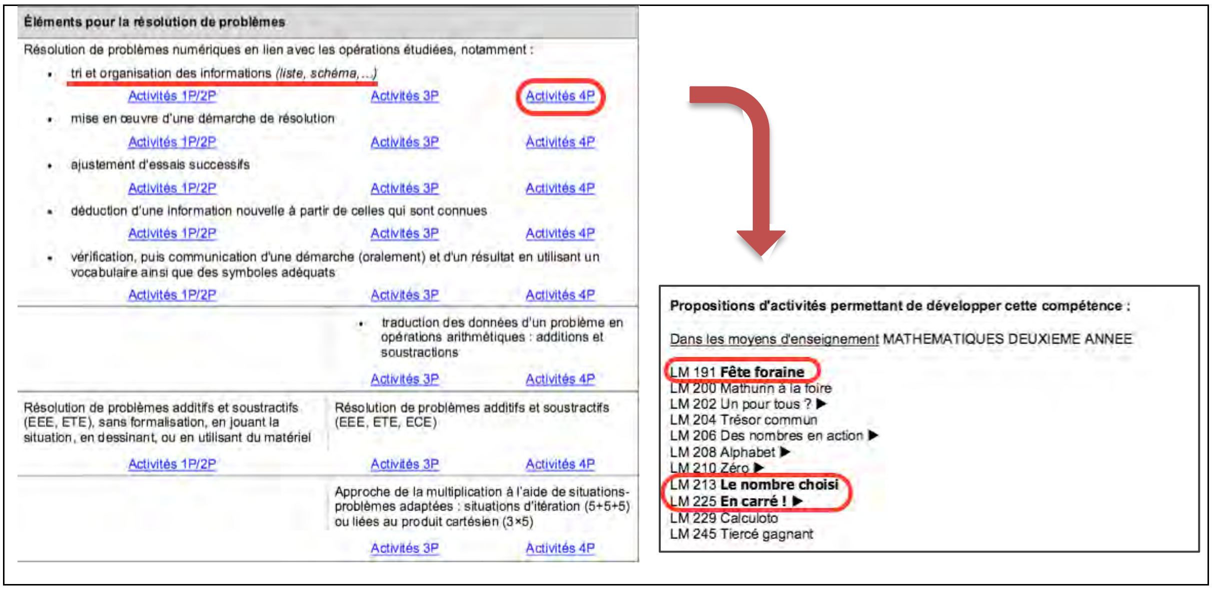
Si la traduction du problème en une opération arithmétique est un objectif d'apprentissage (composante 1 des objectifs), l'étude d'une technique opératoire, dès lors qu'elle implique des opérations avec retenues, est remise au cycle 2. Et cela, même si l'étendue du domaine numérique, qui s'étend de 0 à 200, en donnerait la possibilité. Il est donc bien clair qu'à travers la résolution de problème, ce n'est pas l'apprentissage d'une technique opératoire experte qui est visé (l'algorithme de la soustraction par exemple) mais le sens de l'opération « soustraction ».

Le PER, ne donnant aucune indication sur la manière de mettre en œuvre le plan d'étude, oriente les enseignants vers un autre document, à caractère cantonal : les Moyens d'Enseignement Romands (MER).

1.4.3. Les Moyens d'Enseignement Romands : aspect syntaxique de la résolution de problèmes conforté

Les moyens d'enseignements romands sont un ensemble de situations problèmes classées par degré et axes thématiques, mis à disposition des enseignants suisses pour construire leurs cours. Ces moyens sont conçus par la Commission Romande pour les Moyens d'Enseignement (COROME), en liaison avec la commission chargée du PER. Les moyens d'enseignement n'existant pas pour le nouveau plan d'étude, les « Précisions cantonales » indiquent les ressources du plan précédent pouvant être utilisées. À charge pour ces enseignants de les agencer en fonction des objectifs pédagogiques poursuivis. Comment les visées annoncées dans le PER se traduisent-elles dans les activités proposées par les moyens d'enseignement romand ?

Les Moyens d'enseignement (*cf.* Extrait 22) reprennent la même structure, que le PER : pour chaque item indiqué par le PER relatif à la résolution de problèmes, est associé une ou plusieurs situations-problèmes. Par exemple, pour « trier et organiser des informations », trois situations sont pointées comme des activités phare : « Fête foraine », « Le nombre choisi » et « En carré ! »



Extrait 22 : MER – ensembles de situations-problèmes compatibles avec le plan d'étude romand

Nous percevons dans cette manière de ré-agencer les anciens moyens d'enseignement une volonté de mettre en application les préconisations du plan d'étude romand : montrer que, par la résolution de problèmes, l'on accède au sens des concepts mathématiques.

1.5. Brève conclusion sur le Plan d'Étude Romand

L'analyse du plan d'étude romand permet, au travers de catégories empruntées à Schwab, de mettre en évidence la structure ainsi que les visées du plan d'étude.

D'un point de vue rhétorique, le PER s'appuie sur le projet d'un « plan global de formation de l'élève » en rappelant les missions premières de l'école publique : « assurer la construction de connaissances et l'acquisition de compétences », « assumer des missions d'éducation et de transmission de valeurs sociales », « assurer l'acquisition et le développement de compétences et de capacités générales ». Pour atteindre ces objectifs, le

PER présente un programme d'étude qui regroupent les disciplines en « Domaines disciplinaires » et alimentent par le biais de « Contributions à… » les deux axes « Formation générale » et « Capacités transversales ». Afin de justifier la présence des Mathématiques et des Sciences de la nature dans un même domaine, le PER s'appuie sur plusieurs arguments : (i) posture scientifique et résolution de problèmes caractérisent les deux disciplines, (ii) la modélisation est une activité commune aux deux disciplines. Si la résolution de problèmes est un élément d'ordre syntaxique du domaine MSN, elle a aussi un statut particulier au sein même de la discipline Mathématiques. Selon une double focale sémantique/syntaxique, elle est objet d'apprentissage (le plan d'étude et les moyens d'enseignement indiquent les différentes phases à mettre en œuvre lors de la résolution de problèmes) mais aussi organisatrice de l'enseignement-apprentissage des concepts mathématiques : en se situant en début du processus d'apprentissage des concepts mathématiques, elle initie la construction des concepts et influe donc sur les problèmes proposés aux élèves. Le PER montre ainsi la primauté qu'il porte à la compréhension du sens des concepts avant de centrer les apprentissages sur des techniques de résolutions expertes, par exemple les techniques opératoires. En faisant implicitement référence aux travaux de recherche de Vergnaud relativement à la catégorisation des problèmes dans le champ additif, le PER attire l'attention sur la structure même des problèmes : « dans les problèmes de type EEE, la question peut porter sur un des états partiels ou sur l'état final ; dans les problèmes de type ETE, la question peut porter sur l'état initial, la transformation ou l'état final ».

Cette analyse nous conforte dans l'idée que l'ingénierie didactique sur l'introduction de la soustraction élaborée par Brousseau est tout à fait compatible avec les préconisations institutionnelles en Suisse romande. En effet, d'une part cette ingénierie donne à la résolution de problème une place centrale, privilégiant l'accès au sens de la soustraction plutôt que la technique opératoire, d'autre part la structure même des problèmes mis en jeu dans l'ingénierie relève des catégories mentionnées dans le PER. Aussi, nous considérons comme pertinent d'observer l'implémentation de cette ingénierie dans un cadre institutionnel suisse et d'en faire la comparaison avec son implémentation dans un système didactique français.

2. Enseignement des mathématiques à l’école primaire en France

En France, même si les enfants peuvent être accueillis à l’école maternelle dès 2 ans, la scolarité n’est obligatoire qu’à partir de 6 ans et ce, jusqu’à l’âge de 16 ans révolus.

L’enseignement du premier degré se situe à l’école primaire qui comprend l’école maternelle (enfants de 2 ans à 6 ans) et l’école élémentaire (enfants de 6 à 11 ans). L’enseignement du second degré se situe au collège (enfants de 11 à 16 ans). La scolarité se déroule selon quatre cycles :

- le premier cycle, cycle des apprentissages premiers correspond aux trois premiers niveaux : petite section, moyenne section et grande section de l’école maternelle ;
- le deuxième cycle, cycle des apprentissages fondamentaux regroupe le cours préparatoire, cours élémentaire 1 et cours élémentaire 2 ;
- le troisième cycle, cycle de consolidation regroupe les deux dernières années de l’école primaire des approfondissements, le cours moyen1 et le cours moyen 2, ainsi que la première année du collège (6e)
- le quatrième cycle, cycle des approfondissements, correspond aux trois dernières années du collège (5e, 4e et 3e)

Les objectifs généraux de l’école sont régis par le code de l’Éducation, ensemble de lois régissant l’enseignement primaire, secondaire et supérieur. L’article L111 (*cf.* ci-dessous) définit les missions de l’école :

> Outre la transmission des connaissances, la Nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves les valeurs de la République. Le service public de l'éducation fait acquérir à tous les élèves le respect de l'égale dignité des êtres humains, de la liberté de conscience et de la laïcité.
>
> [...]
>
> Tout enfant a droit à une formation scolaire qui, complétant l'action de sa famille, concourt à son éducation.
>
> La formation scolaire favorise l'épanouissement de l'enfant, lui permet d'acquérir une culture, le prépare à la vie professionnelle et à l'exercice de ses responsabilités d'homme et de citoyen. Elle prépare à l'éducation et à la formation tout au long de la vie. Elle développe les connaissances, les compétences et la culture nécessaires à l'exercice de la citoyenneté dans la société contemporaine de l'information et de la communication. Elle favorise l'esprit d'initiative. Les familles sont associées à l'accomplissement de ces missions.

Extrait 23 : extrait de l’article L111 du code de l’Éducation

Si l'on assiste actuellement à une rénovation des programmes, notre analyse s'inscrit dans le cadre des programmes de 2008, en vigueur au moment de cette recherche. Ces programmes sont initiés par la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École du 23 avril 2005. Nous brossons ici rapidement le contexte qui a conduit à l'écriture de ces programmes.

2.1. Contexte d'apparition des nouveaux programmes 2008

Deux rapports, l'un écrit par le Haut Conseil de l'Éducation et l'autre par l'OCDE vont questionner l'enseignement en France, en particulier au niveau de l'école primaire.

Le Haut Conseil de l'Éducation (HCE) publie en août 2007 le rapport « L'école primaire ». Ce rapport, écrit à partir des avis de chercheurs et d'acteurs du terrain, dénonce les résultats des élèves à la sortie de l'école primaire.

> Chaque année, quatre écoliers sur dix, soit environ 300 000 élèves, sortent du CM2 avec de graves lacunes : près de 200 000 d'entre eux ont des acquis fragiles et insuffisants en lecture, écriture et calcul ; plus de 100 000 n'ont pas la maîtrise des compétences de base dans ces domaines. Comme la fin du CM2 n'est plus la fin de l'école obligatoire, leurs lacunes empêcheront ces élèves de poursuivre une scolarité normale au collège. De tels résultats

Extrait 24 : rapport 2007 « L'école primaire » p.7

Il dénonce de plus un manque d'équité dans le système scolaire, pointant ainsi une faille dans un système scolaire qui se veut égalitaire :

> Les enfants qui bénéficient à la maison d'un environnement favorable aux premiers apprentissages réussissent nettement mieux que les autres. La scolarité préélémentaire ne compense pas ces disparités sociales : l'institution scolaire semble ainsi valider des acquis préalablement transmis au lieu de rendre possible la réussite de tous.

Extrait 25 : rapport 2007 « L'école primaire » p.8

Constatant que « l'école élémentaire ne permet pas en général de réduire les difficultés repérées au début de la scolarité obligatoire » (*Ibid*. p.10), le rapport, conformément à la tradition française, se garde de discuter sur les méthodes d'enseignement apprentissage, mais pose la question des outils et dispositifs pédagogiques : redoublements, cycles d'apprentissage, liaisons inter cycles, incidence des apprentissages premiers sur le déroulement de la scolarité obligatoire, formation des enseignants du premier degré. S'appuyant sur des comparaisons avec d'autres systèmes éducatifs européens, notamment la Suède, ainsi que sur la concordance entre les résultats d'évaluations internationales (PIRLS[55])

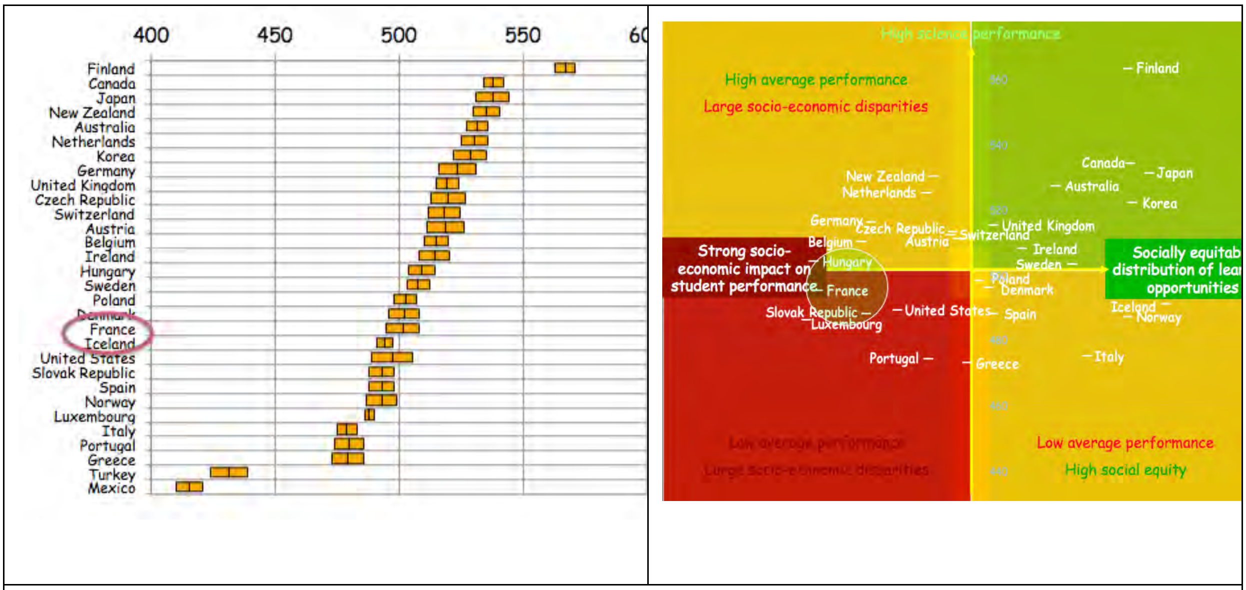
[55] PIRLS : Progress in International Reading Literacy Study

et ceux des recherches menées en France, le HCE conclut son rapport sur « l'urgence de vaincre la difficulté scolaire » :

> La réussite future de tous les enfants que l'école primaire accueille dès l'âge de trois ans repose sur la solidité de leurs premiers acquis. La Nation s'est engagée à leur donner les moyens de maîtriser le socle commun au terme de la scolarité obligatoire : l'école primaire a un rôle essentiel à jouer dans cette mission.
>
> [...]
>
> Vaincre la difficulté scolaire est plus que jamais une urgence, et les apprentissages fondamentaux constituent une priorité dès le début de l'école.

Extrait 26 : rapport 2007 « L'école primaire », p. 35

En décembre 2007 les résultats de l'enquête PISA[56] menée par l'OCDE en 2006 sont publiés : ils montrent que la France qui jusque là présent se situait dans le haut du classement des pays du monde a reculé pour se situer dans la moyenne des résultats des pays de l'OCDE : en compréhension de l'écrit, elle passe de la 14e place en 2000 à la 17e place en 2006, en sciences de la 10e place en 2003 à la 19e place en 2006, et en mathématique de la 13e place en 2003 à la 17e place en 2006. L'enquête PISA pointe de plus une faible équité dans le système scolaire : l'origine socio-économique ou géographique (autochtones et issus de l'immigration) des élèves influent sur leurs performances en sciences.



Performance moyenne sur l'échelle de culture scientifique (pays OCDE) OECD (2007), PISA 2006 – Science Competencies for Tomorrow's World

Extrait 27 : OCDE / PISA 2006 - Les compétences en sciences pour le monde de demain (Résultats de PISA 2006)

[56] PISA : Programme International pour le Suivi des Acquis

En réaction à ces mauvais résultats, le ministre de l'éducation nationale Xavier Darcos, déclare vouloir « remettre de l'école dans l'école » et recentrer les missions de l'école primaire sur l'acquisition des savoirs fondamentaux. En novembre 2007, il soumet alors à la discussion, un ensemble de propositions définissant « un nouvel horizon pour l'école primaire » (Darcos, 2007), propositions qui aboutiront à l'écriture d'un nouveau programme scolaire pour l'école primaire en 2008. Ce programme est accompagné de deux autres documents, le socle commun de connaissances, de compétences et de culture et un document ressources par discipline. En ce qui concerne les mathématiques, nous avons étudié le document « Le nombre au cycle 2 ». L'ensemble des trois documents fait partie des textes de référence que les enseignants utilisent habituellement. Aussi, notre analyse porte sur :

- le programme de 2008, publié dans le Bulletin Officiel hors série de l'éducation nationale (B.O.) n°3 du 19 juin 2008,
- le texte de référence du socle commun de connaissances, de compétences et de culture publié initialement le 11 juillet 2006, texte qui définit les connaissances et compétences minimales qu'un élève doit avoir en fin de scolarité obligatoire et qui est remanié régulièrement au fil des changements de programme,
- le document ressources « Le nombre au cycle 2 », publié en 2010, ensemble de textes à caractère didactique se voulant une aide didactique dans la pratique et la réflexion des enseignants.

2.2. Les programmes français de l'école primaire de 2008 : un projet centré sur l'acquisition de savoirs disciplinaires dits fondamentaux

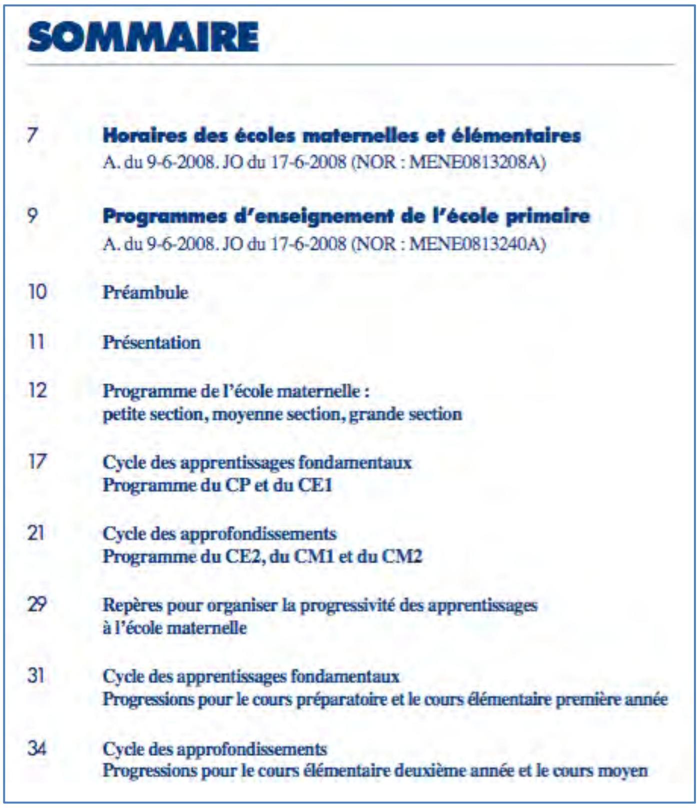
2.2.1. Structure des documents analysés

Contrairement au plan d'étude romand qui offre une vision pour l'ensemble de la scolarité obligatoire, le système éducatif français est présenté par « niveaux et établissements d'enseignement ». Nous montrons ci-dessous pour exemple la page d'accueil du site education.gouv.fr permettant l'accès aux différents programmes d'étude. Les Bulletins Officiels de l'Éducation Nationale (BOEN), versions papier du site web, respectent la même architecture que celle du site internet : un BOEN est spécifique aux programmes de l'école primaire, d'autres BOEN sont spécifiques à ceux du collège (par disciplines), à ceux du lycée (par niveaux).

Extrait 28 : système éducatif en France – page d'accueil du site www.education.gouv.fr

- Le programme 2008 de l'école primaire

Le Bulletin Officiel Hors-Série de l'éducation nationale (BOHS) n° 3 du 19 juin 2008 est entièrement consacré aux programmes d'enseignement de l'école primaire. Ainsi que le montre le sommaire (*cf.* Extrait 29 ci-dessous), il présente dans un premier temps les programmes par cycles (maternelle, cycle des apprentissages fondamentaux, cycle des approfondissements), puis dans un second temps une progression des enseignements en français et en mathématiques.



SOMMAIRE

Extrait 29 : BO hors série n° 3 du 19 juin 2008

- Le socle commun de connaissances, de compétences et de culture

Le texte du socle commun de connaissances, de compétences et de culture couvre l'ensemble de la scolarité obligatoire et indique l'ensemble des connaissances et compétences qu'un élève en fin de collège doit maitriser. Il est réactualisé régulièrement, en particulier lors de la parution de nouveau programme. Ainsi que nous le montrons ci-dessous, le socle est organisé en 5 compétences auxquelles toutes les disciplines contribuent.

> La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. Ce socle comprend :
>
> - la maîtrise de la langue française ;
> - la maîtrise des principaux éléments de mathématiques ;
> - une culture humaniste et scientifique permettant le libre exercice de la citoyenneté ;
> - la pratique d'au moins une langue vivante étrangère ;
> - la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication.

Extrait 30 : Article L. 122-1-1 du code de l'éducation.

Texte de référence du socle commun en vigueur en 2013-2014

- Le document ressources « Le nombre au cycle 2 »,

Le document ressources « Le nombre au cycle 2 », ensemble de textes à caractère didactique, paru en 2010, soit deux ans après le programme officiel de 2008, est présenté comme un apport didactique pour faciliter la mise en œuvre du programme. Nous nous intéresserons en particulier aux parties 1et 3 (*cf.* Extrait 31), relatives au calcul et aux opérations.

Sommaire

Extrait 31 : document ressources « Le nombre au cycle 2 »

2.2.2. Une rhétorique entre tradition républicaine et exigences européennes.

La loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École de 2005 précise la « mission première » de l'école : « Outre la transmission des connaissances, la Nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves les valeurs de la République. » (Article 2, p. 1). La rhétorique justifiant les programmes 2008 repose essentiellement sur cet article : en continuité avec la loi d'orientation, le programme 2008 fait appel dès son préambule à l'idée de République pour définir les objectifs de l'école : « Donner à chaque enfant les clés du savoir et les repères de la société dans laquelle il grandit est la première exigence de la République et l'unique ambition de l'école primaire. » (BOEN hors série n° 3 du 19 juin 2008, p. 10).

Le socle commun, dans la même inspiration républicaine, se définit comme étant le « ciment de la Nation, ensemble de valeurs, de savoirs, de langages et de pratiques dont l'acquisition repose sur la mobilisation de l'École » (décret du 11 juillet 2006, p.3). Par une référence aux lois scolaires de la troisième république, il se présente comme une avancée s'inscrivant dans le droit fil de l'histoire de la république :

> Cinq générations après les lois scolaires fondatrices de la IIIe République, une génération après l'instauration du collège unique, le socle constitue une référence commune, pour tous ceux qui confient leurs enfants à l'école, mais aussi pour tous les enseignants.

Extrait 32 : Socle commun (décret du 26 juillet 2006, p. 3)

Dans ces propos, l'état développe ici une rhétorique s'appuyant sur les principes de la République : il se veut garant de l'éducation de tous les élèves afin d'offrir à tous les mêmes chances de réussite et d'insertion dans la société. Nous lisons ainsi en page 10 (*cf.* ci-dessous) qu'il convient de « tracer un nouvel horizon pour l'école primaire, tout en restant fidèle à la grande inspiration de l'école républicaine » :

> C'est à la lumière de ce constat qu'il convient de tracer un nouvel horizon pour l'école primaire, tout en restant fidèle à la grande inspiration de l'école républicaine : offrir à tous les enfants des chances égales de réussite et préparer, pour tous, une intégration réussie dans la société. L'école primaire doit transmettre et faire acquérir à chaque élève les connaissances et compétences fondamentales qui seront nécessaires à la poursuite de sa scolarité au collège et, au-delà, dans les voies de formation choisies par l'élève.

Extrait 33 : programme 2008 (BO hors série n° 3 du 19 juin 2008, p. 10)

Ni les recommandations européennes ni les évaluations internationales ne sont évoquées dans le programme de l'école primaire. Elles le sont dans le socle commun des connaissances, des compétences et de culture :

> La définition du socle commun prend également appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie ».
>
> Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie.

Extrait 34 : Socle commun (décret du 26 juillet 2006, p. 3)

Cette rhétorique, mêlant préconisations européennes et idées républicaines, trouve sa conclusion dans le Programme de 2008 pour l'école primaire : la « Nation » s'engage d'une part à réduire le nombre d'élèves en échec scolaire en fin de scolarité et d'autre part à rétablir une équité permettant à « chaque élève d'aller plus loin dans sa scolarité ».

> **L'objectif de ces nouveaux programmes est de permettre de réduire significativement, à partir de la rentrée scolaire 2008, le niveau préoccupant du nombre d'élèves qui sortent de l'école primaire en situation d'échec scolaire avéré.**
>
> **[...]**
>
> **L'engagement de la Nation sur l'acquisition de l'ensemble des connaissances et des compétences fondamentales qui permettront à chaque élève d'aller plus loin dans sa scolarité et de réussir, plus tard, son insertion dans la vie professionnelle, repose sur votre action.**

Extrait 35 : Programme 2008 (BO hors série n° 3 du 19 juin 2008, p. 3)

Dans ces propos, nous percevons une réponse aux préconisations européennes mais aussi un début d'indications sur les orientations du nouveau programme : l'utilisation d'expressions telles que « connaissances et compétences fondamentales », « acquisition de savoirs de base», « contenu des savoirs fondamentaux » (BOEN hors série n° 3, 2008, p. 10) laissent prévoir un repli sur un enseignement orienté vers le « lire-écrire-compter ». Sur quels éléments syntaxiques, selon la terminologie empruntée à Schwab, le programme 2008 de l'école primaire est-il alors construit ?

2.2.3. Du rhétorique au syntaxique : un programme organisé en disciplines.

Distillée dans deux documents de référence (le socle commun des connaissances, des compétences et de culture et le document programmes de l'école primaire), l'école primaire promeut l'ambition de délivrer « un enseignement structuré et explicite, orienté vers l'acquisition des savoirs de base, et en offrant des entraînements systématiques à la lecture, à l'écriture, à la maîtrise de la langue française et des mathématiques, ainsi que de solides repères culturels » (BOEN hors série n° 3, 2008, p. 10).

Si, comme nous l'avons vu pour le plan d'étude romand est présenté par domaines d'enseignement (Domaines disciplinaires, Formation générale, Capacités transversales) pointant sur un « projet global de formation de l'élève », les programmes français sont présentés pour leur part, par disciplines et/ou par groupes de disciplines. Leur objectif est de « faire partager aux élèves les valeurs de la République » (Code de l'Éducation - L111). Pour le cycle des apprentissages fondamentaux (programmes du CP et du CE1), il s'agit de sept disciplines ou domaines : le français, les mathématiques, l'éducation physique et sportive, une langue vivante, la découverte du monde (regroupant « se repérer dans l'espace et le temps »), les pratiques artistiques et histoire des arts (regroupant les arts visuels et l'éducation musicale), l'instruction civique et morale. Pointons que le français et les mathématiques apparaissent en premier dans cette liste de disciplines ce qui marque leur prépondérance pour le législateur. Elles sont qualifiées de « fondamentales » par le ministre de l'éducation nationale : « Les programmes mettent fortement l'accent sur les apprentissages fondamentaux : le français et les mathématiques» (Darcos, 2008).

Les termes « d'interdisciplinarité » et « d'activités transversales », ainsi que leurs mots dérivés, n'apparaissent dans l'ensemble des programmes de l'école primaire que respectivement une et deux fois. Par contre, les mots « discipline » et « disciplinaires » apparaissent respectivement 10 et 7 fois. Pour autant, le programme précise dans la présentation générale que celle-ci ne doit pas empêcher la mise en œuvre d'activités interdisciplinaires ou transversales :

> La présentation des programmes par discipline à l'école élémentaire ne constitue pas un obstacle à l'organisation d'activités interdisciplinaires ou transversales. Par exemple, les activités d'expression orale, de lecture ou de rédaction de textes en français ont évidemment toute leur place en sciences, en histoire et géographie, en histoire des arts et elles interviennent en mathématiques. Cependant, si l'élève s'exprime, lit et écrit en français dans toutes les disciplines, il n'en est pas moins nécessaire de réserver un horaire spécifique à l'apprentissage structuré et explicite du vocabulaire, de la grammaire et de l'orthographe.

Extrait 36 : BO hors série n° 3 du 19 juin 2008, p. 11

Nous constatons que les mots « interdisciplinaire » et « transversal » sont utilisés pour qualifier des « activités ». L'exemple qui est donné dans l'extrait ci-dessus nous paraît révélateur du statut qu'interdisciplinarité et transdisciplinarité tiennent dans ce programme : les activités interdisciplinaires et transversales ne sont pas envisagées pour un apprentissage ou pour donner sens à un concept, mais pour un réinvestissement des notions apprises auparavant, au sein des disciplines. Dans cet exemple, il est clair que l'apprentissage « structuré et explicite du vocabulaire, de la grammaire et de l'orthographe » est réservé à un enseignement disciplinaire, ici le français, pour être ensuite réutilisées dans d'autres disciplines telles que les sciences, histoire ou géographie. Il en est de même pour les mathématiques où les concepts sont étudiés dans la discipline puis réinvestis dans les activités interdisciplinaires ou transversales.

Nous concluons cette analyse en suggérant que, si au plan rhétorique les instructions officielles valorisent l'interdisciplinaire et le transversal, l'étude syntaxique des documents incite plutôt à proposer l'apprentissage des concepts au sein même d'une discipline, ceux-ci étant ensuite réinvestis, réutilisés dans des activités appelant d'autres disciplines. Aussi, dans ce programme nous ne retrouvons pas d'éléments syntaxiques transversaux ou interdisciplinaires, organisateurs du « contrat social éducatif » (Darcos, 2008) comme nous avons pu les relever dans le plan d'étude romand. Ce sont les disciplines elles-mêmes, organisatrices du curriculum, qui relèvent du syntaxique. Deux disciplines, le français et les mathématiques, sont mises en exergue dans ce programme : elles font toutes deux l'objet d'une description détaillée en termes de concepts à enseigner, d'un horaire hebdomadaire d'enseignement précis, et d'une progression annuelle sur chacun des cycles. Xavier Darcos, alors ministre de l'Éducation Nationale, justifie cette prééminence lors de la présentation des programmes : « J'assume […] le choix d'un recentrage sur les enseignements essentiels, qui est indispensable pour permettre aux élèves d'accéder aux autres champs du savoir : c'est le choix qu'ont fait avant nous la plupart des grands pays européens. Le choix de progressions annuelles annexées aux programmes et qui permettent aux enseignants comme aux familles de prendre la mesure des progrès réalisés et du chemin qui reste à parcourir. » (Darcos, 2008). Nous poursuivons notre recherche d'éléments d'ordre syntaxique et sémantique au sein même du programme de mathématiques à l'école élémentaire.

2.3. Les programmes de mathématiques à l'école élémentaire

Chaque cycle de l'école élémentaire possède son propre programme.

À l'école maternelle, les mathématiques font partie de la thématique « découvrir le monde ». Il s'agit d'approcher le concept de nombre : « Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. » (BOEN hors série n° 3, p. 15).

À l'école primaire, les mathématiques sont une discipline à part entière, organisées autour de cinq axes thématiques, que l'on peut considérer comme relevant de la dimension sémantique du programme de mathématiques : (i) nombres et calcul, (ii) géométrie, (iii) grandeurs et mesure, (iv) organisation et gestion de données. Ces axes se pérennisent tout au long de la scolarité obligatoire montrant ainsi une volonté de continuité et de progressivité des apprentissages dans la scolarité obligatoire, même si l'on peut s'interroger sur cette volonté puisque dans l'affichage, les programmes sont présentés indépendamment pour le primaire et le secondaire. L'adjonction pour chacun des cycles d'une progression dite annuelle n'est pas en réalité une progression des apprentissages par année, mais une progression au sein de chaque cycle. Elle permet de situer l'enseignement d'un concept par rapport à l'année précédente et/ou l'année suivante sans pour autant donner une vision synoptique de l'enseignement des mathématiques à l'échelle de la scolarité obligatoire. Nous montrons ci-dessous un extrait de la progression au cycle 2, relative à l'axe « Nombres et calcul ».

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition"). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération.	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

Extrait 37 : progression relative à l'axe thématique « Nombres et calcul » au cycle 2

Dans l'analyse du programme de mathématiques, nous cherchons à savoir si l'enseignement des mathématiques relève de la même logique cumulative de connaissances que pour l'élaboration du curriculum de l'école primaire ou si celui-ci est porté par des éléments syntaxiques, organisant et mettant en cohérence les contenus d'enseignement.

2.3.1. Deux traits d'ordre syntaxique : résolution de problèmes et automatisme

Un premier élément à focale syntaxique que nous repérons dans le programme de l'école primaire est relatif à la résolution de problèmes. Celle-ci est mentionnée dans chacun des cycles d'enseignement :

- au cycle 1, « les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul » (BOEN hors série n° 3, p. 15)
- au cycle 2, « La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. » (*Ibid.*, p. 11)
- au cycle 3, « La résolution de problèmes liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du

> sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement. » (*Ibid.*, p. 23)

Nous observons par ailleurs que l'idée de sens, associé à l'acquisition d'automatismes est aussi évoquée dès la présentation générale du programme de l'école primaire : « chacun s'accorde aujourd'hui sur l'utilité d'un apprentissage structuré des automatismes et des savoir-faire instrumentaux comme sur celle du recours à des situations d'exploration, de découverte, ou de réflexion sur des problèmes à résoudre. L'accès au sens et l'acquisition des automatismes ne sont pas antinomiques » (*Ibid.*, p. 11). Pour les cycles 2 et 3, le programme précise que « L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification ». (*Ibid.*, p. 18 et 22). Nous tenons ici un second éléments syntaxiques, éléments structurants l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Pour autant résolution de problèmes et techniques / automatismes ne jouent pas les mêmes rôles selon qu'ils se situent au premier, deuxième ou troisième cycle.

À la maternelle, « dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. […] À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul » (*Ibid.*, p. 15). Plus loin, il est écrit que « l'enfant doit être capable de résoudre des problèmes portant sur des quantités » (*Ibid.*, p. 16). On comprend ici que la résolution de problème a pour visée d'introduire et de donner du sens au concept de nombre. L'élève accède ainsi au sens du concept en le faisant fonctionner lors de la résolution d'un problème : « Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets » (*Ibid.*, p. 16).
Si la « résolution de problèmes » est l'entrée privilégiée pour la construction des concepts mathématiques au cycle 1, cela ne nous semble pas aller de soi pour les cycles suivants.

Le programme de l'école primaire (cycles 2 et 3) confirme bien l'aspect syntaxique de la résolution de problèmes en précisant que celle-ci « joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique, est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages » (BOEN hors série n° 3, 2008, p. 33 et 38). Pour autant, la place qui lui est dévolue ne semble pas être la même que dans le programme de maternelle.

Pour le cycle 2, nous lisons dans le préambule que la résolution de problèmes « fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations » (*Ibid.*,

p. 18), alors que celle-ci figure dans tous les axes thématiques *après* l'énonciation de savoirs et de techniques, donnant ainsi l'impression d'être une mise en application de savoirs et techniques auparavant apprises. Par exemple, dans la thématique « Nombres et calcul » (*cf.* Extrait 38), la résolution de problèmes apparaît *après* l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication et des techniques opératoires. Les problèmes interviennent ici pour réinvestir des savoirs appris en techniques opératoires ou pour installer une reconnaissance des opérations en jeu dans les problèmes.

> **1 - Nombres et calcul**
>
> **[...]**
>
> Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations.

Extrait 38 : Programme du CE1, p.

Dans la thématique « Grandeurs et mesure » (*cf.* Extrait 39), elle apparaît aussi *après* l'apprentissage des unités de mesure, suggérant par là que cette activité a lieu après l'étude des unités de mesure : les élèves apprennent des notions mathématiques puis les mettent en application dans la résolution de problèmes.

> **3 - Grandeurs et mesures**
>
> Les élèves apprennent et comparent les unités usuelles de longueur (m et cm ; km et m), de masse (kg et g), de contenance (le litre), et de temps (heure, demi heure), la monnaie (euro, centime d'euro). Ils commencent à résoudre des problèmes portant sur des longueurs, des masses, des durées ou des prix.

Extrait 39 : Programme du CE1 – p.

De la même façon au cycle 3, le préambule énonce que « du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes » (*Ibid.*, p. 22). Le programme formule clairement que la résolution de problèmes « permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement » (BOEN hors série n° 3, 2008, p. 23). Les termes « approfondir » et « renforcer » corroborent notre impression que, dans l'organisation didactique de la séquence d'enseignement, la résolution de problèmes vient bien après l'apprentissage premier des concepts et de techniques mathématiques. Enfin, le Socle commun des compétences relègue en fin de liste la compétence « Résoudre des problèmes », compétence qu'un élève doit connaître en mathématiques en fin de cycle 2 (*cf.* Extrait 40) ou de cycle 3 (*cf.* Extrait 41), suggérant peut-être une place temporelle de la résolution de problèmes dans le projet d'enseignement : en consolidation, en réinvestissement voire en application de concepts mathématiques étudiés auparavant.

Compétence 3 :
Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
L'élève est capable de :
- écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 ;
- calculer : addition, soustraction, multiplication ;
- diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ;
- restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;
- calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples ;
- situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, donner sa position et décrire son déplacement ;
- reconnaître, nommer et décrire les figures planes et les solides usuels ;
- utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle ;
- utiliser les unités usuelles de mesure ; estimer une mesure ;
- être précis et soigneux dans les tracés, les mesures et les calculs ;
- résoudre des problèmes très simples ;
- observer et décrire pour mener des investigations ;
- appliquer des règles élémentaires de sécurité pour prévenir les risques d'accidents domestiques.

Extrait 40 : Socle commun – compétences attendues à la fin du cycle 2

Compétence 3 :
Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
A) Les principaux éléments de mathématiques
L'élève est capable de :
- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples ;
- restituer les tables d'addition et de multiplication de 2 à 9 ;
- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ;
- calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ;
- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat ;
- utiliser une calculatrice ;
- reconnaître, décrire et nommer les figures et solides usuels ;
- utiliser la règle, l'équerre et le compas pour vérifier la nature de figures planes usuelles et les construire avec soin et précision ;
- utiliser les unités de mesure usuelles ; utiliser des instruments de mesure ; effectuer des conversions ;
- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas ;
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

Extrait 41 : Socle commun – compétences attendues à la fin du cycle 3

À la lecture seule du texte de programme, il apparaît donc que la résolution de problème n'a pas pour visée de faire émerger ou construire des savoirs mathématiques ni de questionner les élèves sur de nouveaux concepts, mais de mettre en application des savoirs et techniques étudiés auparavant dans le cours de mathématiques. Nous reviendrons sur ce point décisif dans la section relative à la comparaison des deux programmes.

2.3.2. L'automatisation, connecteur entre technique et résolution de problèmes

Le document ressources « Le nombre au cycle 2 » à destination des enseignants, infléchit cette position en apportant des éléments de réponse issus de la recherche en didactique des mathématiques. Rappelons que ce document a une visée à la fois didactique et

formatrice : les cinq parties qui le constituent apportent des éclairages issus de la recherche et de communautés de praticiens.
La partie 5 de ce document est entièrement rédigée par deux didacticiens des mathématiques, Butlen et Masselot (2010). On peut y voir ainsi une volonté de promouvoir des résultats de recherches dans les pratiques ordinaires de classes. Cette partie, consacrée aux relations entre techniques, connaissances et résolution de problèmes, développe une dialectique entre sens et technique. L'objectif est de montrer que le calcul mental est une entrée pour la construction des concepts mathématiques : « le calcul mental apparaît comme un champ d'expérience particulièrement riche pour la construction de connaissances relatives aux nombres et aux opérations. » (Document ressource, p. 11). Ces auteurs s'appuient ensuite sur des résultats de recherches[57] (Butlen & Pézard, 2003, 2007 ; Julo, 1995), qu'ils détaillent abondamment, pour montrer le lien étroit qu'entretiennent maitrise des techniques opératoires, calcul réfléchi et résolution de problèmes : « un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise une prise de sens lors de la résolution de problèmes et contribue à accélérer l'automatisation de la reconnaissance du modèle (opération(s) en jeu). » (Document ressource, p. 15). En concluant leur propos par « La technique n'est pas première par rapport au sens et inversement le sens ne peut pas se construire sans technique. » (*Ibid.*, p15), nous percevons ici un repositionnement de la résolution de problèmes dans le déroulement didactique : si elle n'est pas la seule entrée pour la construction des concepts mathématiques, elle n'est pas non plus reléguée à un statut d'application de connaissance et de techniques.

Nous avons utilisé le verbe « infléchir » pour rendre compte du discours tenu dans le document ressources parce que les propos des deux chercheurs sont modérés dans la partie suivante « Apprendre le nombre ; débuter la numération» (Document ressource, p. 39). Cette partie, écrite par Gabriel Le Poche, précise les objectifs aux cycles 1 et 2 relativement à la numération décimale et au calcul mental ou posé. En écrivant « l'enseignement de techniques opératoires […] se fait toujours en leur donnant du sens » (*Ibid.* p.45) et en illustrant les différentes techniques opératoires de la soustraction (*cf.* Extrait 42) Le Poche concède que c'est la compréhension de la technique opératoire et non le sens de l'opération qui est visée.

[57] Recherches conduites dans le cadre d'une double approche didactique et ergonomique.

Soustraction

Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul	Paquets de dix	Tout seul
~~7~~ 6	1 4	7	4	7	4	7	1 4
− 3	6	1		− 1		− 3	6
		+ 3	6	3	6	1	
3	8	3	8	3	8	3	8
Technique anglo-saxonne de droite à gauche (transformation du premier terme)		Disposition intermédiaire de l'addition à trous (issue de la technique traditionnelle de l'addition)		Technique de l'addition à trous		Technique traditionnelle française avec retenue (différences égales)	

Choix d'une technique à fixer
Il est essentiel de fixer une technique de calcul et de s'y tenir durablement.

Extrait 42 : Le nombre au cycle 2 : donner du sens aux techniques de la soustraction

La résolution de problème est, quant à elle, explicitement placée après l'automatisation de la technique (*cf.* Extrait 43).

> Il est de la responsabilité de l'enseignant de choisir la technique qui leur semble la plus appropriée. La technique choisie gagnerait à être identique en CP et CE1. Il n'y a pas lieu d'enseigner plusieurs techniques car la technique devra être automatisée pour être disponible dans la résolution des problèmes.

Extrait 43 : Document ressources « Le nombre au cycle 2 » – le calcul posé p. 45

Nous référant à une focale syntaxique, nous concluons que techniques opératoires et résolution de problèmes organisent la discipline mathématique dans un lien de dépendance. Ce lien, se manifestant sous la forme d'automatisation de techniques opératoires, influe sur la place dévolue à la résolution de problème dans la chaine d'apprentissage. Nous montrons dans la section qui suit comment l'automatisation articule le syntaxique et le sémantique dans les textes officiels relatifs à l'enseignement de la soustraction au cycle 2.

2.4. Nombres et calcul au cycle 2 : entre syntaxique et sémantique

C'est dans sa dimension sémantique que se révèle le programme de mathématique au cours élémentaire première année (CE1) : les objets de savoirs étudiés au CE1 sont définis dans trois textes (programme et progressions, socle commun et document-ressource), chacun apportant à cette dimension un éclairage particulier.

Nous constatons que le programme relatif au domaine Nombres et calcul fait référence aux tâches des élèves : « les élèves apprennent […], dénombrent […], mémorisent […], utilisent […] … »

1 - Nombres et calcul

Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.
Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.
L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.

Extrait 44 : Programme du CE1 – domaine Nombres et calcul

La progression des apprentissages présente quant à elle une liste de savoirs et de techniques mathématiques. Il est remarquable que sur les 13 items du cours élémentaire première année, tous commencent par des verbes, et 12 pointent sur des connaissances ou des techniques mathématiques à acquérir, l'utilisation de verbes d'action renforçant cette focalisation sur les techniques à acquérir.

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition"). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération.	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

Extrait 45 : Programme du CE1 – progression annuelle

Enfin, le socle de compétences recentre le discours sur l'élève en terme de compétences à acquérir : « l'élève est capable de … »

Compétence 3 :
Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
L'élève est capable de :
- écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 ;
- calculer : addition, soustraction, multiplication ;
- diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier) ;
- restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ;
- calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples ;
- situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, donner sa position et décrire son déplacement ;
- reconnaître, nommer et décrire les figures planes et les solides usuels ;
- utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle ;
- utiliser les unités usuelles de mesure ; estimer une mesure ;
- être précis et soigneux dans les tracés, les mesures et les calculs ;
- résoudre des problèmes très simples ;
- observer et décrire pour mener des investigations ;
- appliquer des règles élémentaires de sécurité pour prévenir les risques d'accidents domestiques.

Extrait 46 : Socle commun de connaissances, de compétences et culture.

Tout comme pour la progression des apprentissages, le socle commun développe une liste de savoirs et de techniques mathématiques que tout élève doit maitriser en fin de cycle 2. Nous retrouvons ainsi les propos introductifs du programme : « ils [les programmes] sont centrés sur les contenus (connaissances et compétences) que les maitres enseignent aux élèves et que ceux-ci doivent maitriser. »

Le document ressources « Le nombre au cycle 2 » fait écho aux propos introductifs du programme en intitulant une de ses parties : « CP/CE1 : Développer des compétences pour résoudre des problèmes additifs et soustractifs » (Le nombre au cycle 2, p. 57). Ce document, à caractère formatif, affiche explicitement l'objectif de la résolution de problèmes en y décrivant une « Progression » (cf. *Ibid.*, p57) faisant référence aux travaux de Vergnaud, et donnant un exemple de mise en œuvre au cycle 2. Cependant, si comme dans le plan d'étude suisse, la progression indiquée n'est pas une réelle progression en termes d'ordonnancement de concepts mathématiques à étudier ou de tâches à mettre en œuvre dans la classe, il reste que le programme français focalise sur « l'automatisation du processus de reconnaissance de l'opération en jeu dans la résolution de problèmes » alors que le programme suisse se centre sur la résolution de problèmes.

L'automatisation du processus de reconnaissance de l'opération n'est réellement effective que si l'élève parvient à associer une opération (la soustraction par exemple) à n'importe quelle situation nécessitant cette opération. Choisir parmi plusieurs opérations nécessite de construire simultanément une automatisation (elle sera progressive) du processus de reconnaissance de l'opération.

Extrait 47 : le nombre au cycle 2 – Développer des compétences pour résoudre des problèmes additifs et soustractifs.

L'automatisation, terme utilisé à 58 reprises dans le document-ressources et que nous interprétons comme un troisième élément syntaxique, lie les éléments sémantiques relevés dans le programme et le socle commun : il s'agit d'automatiser la reconnaissance et l'utilisation des concepts mathématiques pour résoudre des problèmes. Le Poche s'appuie sur les travaux de Vergnaud relatifs à la typologie des structures additives pour la mise en œuvre de l'automatisation de la reconnaissance de l'opération en jeu dans un problème.

À la différence des enseignants genevois qui ont eu, dès leur formation initiale (Brun, 1990), une formation s'appuyant sur les résultats de recherche de Vergnaud (1991), les enseignants français connaissent assez peu ces travaux. Le document ressources cherche à combler ce déficit de formation en illustrant la typologie des structures additives sur quatorze exemples de problèmes, puis en déroulant une situation d'apprentissage en plusieurs séances. L'extrait suivant montre comment ce texte guide l'enseignant dans le choix des problèmes à proposer aux élèves.

> Voici une catégorisation[3] de problèmes additifs et soustractifs à traiter au cycle 2. Pour chaque catégorie, l'enseignant conservera un exemple d'énoncé.
> […]
> Cette catégorisation peut également servir de grille de lecture pour l'analyse des manuels que l'on voudrait utiliser dans la classe pour travailler le champ des problèmes additifs et soustractifs.

Extrait 48 : le nombre au cycle 2 – préconisation pour les enseignants – p. 57

Ce caractère incitatif est accentué par la présentation détaillée d'une situation d'apprentissage, présentée comme un « exemple de mise en œuvre » (*Ibid.*, p. 59) relatif à une des catégories de problèmes (il s'agit dans cet exemple de la recherche de l'état initial à partir d'une transformation positive de l'état d'une collection de jetons). L'objectif de la situation proposée est explicite : il s'agit d'« automatiser l'utilisation de la soustraction pour la résolution de problèmes relevant de cette structure » (*Ibid.*, p. 59). Cette situation a pour vocation d'exemplifier une mise en œuvre des autres structures additives : « [Pour les autres catégories,] la mise en œuvre et la progressivité des apprentissages sont identiques pour la catégorie présentée. » (*Ibid.*, p. 62).

2.5. Brève conclusion sur le programme français

D'un point de vue rhétorique, le ministère de l'éducation nationale s'appuie sur les résultats d'évaluations internationales (PISA) pour justifier un programme orienté vers l'apprentissage de savoirs fondamentaux. En réaction au programme précédent de 2002 qui mettait fortement l'accent sur l'interdisciplinarité, le programme 2008 est un programme structuré par niveaux et par disciplines, centré sur les apprentissages fondamentaux. Aussi, même si le transversal est encouragé au travers d'activités mettant en œuvre plusieurs disciplines, ce sont les disciplines elles-mêmes qui sont les éléments syntaxiques du programme 2008. Dans la discipline mathématique, résolution de problèmes et automatisme se révèlent être deux mots-clés, à focale syntaxique du domaine « nombres et opérations ». Néanmoins, si le programme annonce que « la résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique, […] est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages », la place de la résolution de problèmes participe peu à la construction des connaissances. En annonçant la résolution de problèmes systématiquement après l'énonciation des concepts mathématiques, le programme suggère une place temporelle dans l'organisation didactique en fin de chaine d'apprentissage, donnant ainsi à la résolution de problèmes une fonction de réinvestissement, d'entrainement et d'automatisation de connaissances travaillées en amont. Le document ressources infléchit cette position en développant une dialectique entre résolution de problèmes et automatisme : il s'agit d'accéder au sens des opérations par le calcul mental et d'automatiser la reconnaissance des types de problèmes. Si dans le premier cas, c'est la compréhension des techniques opératoires et propriétés arithmétiques qui est visée, dans le second cas, c'est l'identification du type de problème selon les catégories de Vergnaud : il s'agit d'« automatiser l'utilisation de la soustraction pour la résolution de problèmes relevant de cette structure » (Le nombre au cycle 2, p.94).

Rappelons que le programme de 2008 a succédé à un programme de 2002 qui donnait à la résolution de problèmes une autre place : « Les problèmes proposés doivent alors permettre aux élèves de prendre conscience des limites ou de l'insuffisance des connaissances dont ils disposent déjà et d'en élaborer de nouvelles dont le sens sera ensuite progressivement enrichi » (Document d'application des programmes 2002, p. 7). Aussi, si l'ingénierie didactique paraît moins compatible avec le programme 2008, il nous paraît pertinent d'en comparer son implémentation en France par une enseignante chevronnée ayant l'expérience des programmes précédents avec celle opérée par une enseignante débutante qui les aura peu pratiqués (deux années scolaires consécutives). Cette comparaison permettra de nous distancier pour une meilleure appréhension des pratiques enseignantes et des ressorts de l'action conjointe au sein des systèmes didactiques.

3. Analyse comparative des curriculums suisse et français.

Les pratiques enseignantes ayant lieu en référence aux préconisations et pré-construits institutionnels, nous considérons que ceux-ci font partie des déterminants de l'action du professeur. Aussi, nous présentons dans cette section la comparaison des curriculums suisse et français en recherchant les éléments de généricité et de spécificité qui, potentiellement, permettent d'éclairer d'éventuelles différences de mises en œuvre de l'ingénierie didactique par les enseignantes. Rappelons que le but de l'ingénierie didactique est de faire émerger le sens de la soustraction par la résolution de problèmes pour ensuite s'attacher à la technique opératoire.

L'analyse des curriculums montre que si ceux-ci diffèrent dans leur présentation, les enjeux poursuivis demeurent semblables : en Suisse romande comme en France, le premier enjeu de l'École vise la transmission de connaissances, de compétences et de valeurs sociales. Pour autant, les curriculums ne prennent pas appui sur une même rhétorique, présentant ainsi des conceptions différentes de l'enseignement/apprentissage à l'école primaire. Celles-ci se traduisent par des différences sur les plans syntaxique et sémantique, ces derniers plans relevant plus spécifiquement de l'enseignement de la soustraction. Le tableau suivant présente les points communs et les différences sur ces trois plans : les première et troisième colonnes présentent respectivement les éléments caractéristiques du plan d'étude romand et du programme français, la colonne centrale présente les éléments de généricités entre les deux programmes d'étude.

	Suisse : Plan d'Étude Romand (2012)	Éléments de généricité	France : Programme (2008)
D'un point de vue rhétorique	– Un projet centré sur l'élève : **« projet global de formation de l'élève »** ; – Des savoirs construits en co ou interdisciplinarité ; – La résolution de problèmes pour **accéder au sens** des concepts en mathématiques et en sciences ; → Mathématiques et Sciences de la nature associées au sein d'un même domaine (MSN).	Transmission de connaissances, de compétences, de valeurs sociales, formation à la citoyenneté, sont des objectifs communs aux deux curriculums	– Un rappel des valeurs républicaines : équité, liberté de conscience, laïcité ; – Une centration sur les **savoirs fondamentaux** ; – Un ensemble de savoirs et de compétences communs à tous les élèves en fin de scolarité. – La résolution de problèmes pour **réinvestir** les savoirs acquis → Une logique « cumulative » des objets de savoirs → Les Mathématiques comme discipline singulière
	Conclusion de l'analyse : des finalités de l'école primaire communes, mais se déclinant différemment		
D'un point de vue syntaxique	– Une présentation globale du plan de formation – Domaines disciplinaires, Formation générale, Capacités transversales charpentent le curriculum – Posture scientifique et résolution de problèmes agencent le domaine MSN → La résolution de problèmes est à l'initiative de la construction des concepts mathématiques : pour introduire, faire émerger de nouvelles connaissances. Référence implicite (naturalisée) à Piaget. approche constructiviste, piagétienne pour la Suisse : l'enfant construit ses connaissances par confrontation à des activités problématiques (résolution de problèmes)	______________________ La résolution de problèmes est un maillon dans le processus d'apprentissage Les deux curriculums se réfèrent implicitement à des arrières plans épistémologiques différents en didactique des mathématiques	– Une présentation morcelée du curriculum en programmes par cycles et disciplines – Disciplines et Socle commun de connaissances et de compétences structurent le curriculum – Techniques/automatisation et résolution de problèmes organisent la discipline → La résolution de problèmes prend place en fin de construction des concepts mathématiques : pour appliquer, s'exercer, réinvestir des notions apprises auparavant. Référence implicite eux travaux de Butlen et Masselot
	Conclusion de l'analyse : des structures différentes qui influent sur l'organisation même des champs disciplinaires		
D'un point de vue sémantique	5 axes thématiques : espace / nombres / opérations / grandeurs et mesure / modélisation Amplitude de nombres utilisés : de 0 à 200 Les objets de savoirs numériques se situent dans deux axes « Nombres » et « Opérations », présentés sous la forme de tâches de résolution de problèmes nécessitant des connaissances mathématiques. Résolution de problèmes additifs et soustractifs (EEE, ETE, ECE). • Dans les problèmes de type EEE, la question peut porter sur un des états partiels ou sur l'état final • Dans les problèmes de type ETE, la question peut porter sur l'état initial, la transformation ou l'état final • ECE ? Référence à Vergnaud (naturalisée dans le PER mais explicite dans les moyens d'enseignement COROME)	Enseignement des mathématiques organisé en axes thématiques pérennes tout au long de la scolarité obligatoire. Dans les deux curriculums, les problèmes proposés s'appuient sur la typologie de Vergnaud : Il s'agit de ne pas proposer aux élèves des problèmes prototypiques mais de varier les catégories de problèmes, dans l'objectif de privilégier la compréhension des concepts aux techniques de résolution.	4 axes thématiques : nombres et calcul / géométrie / grandeurs et mesure / organisation et gestion de données Amplitude de nombres utilisés : de 0 à 1000 Les objets de savoirs numériques se situent dans une seule thématiques, « Nombres et calcul », sous forme d'une liste de notions, propriétés, techniques mathématiques. Les catégories de problèmes additifs EEE ETE et ECE sont mobilisées, les questions pouvant porter sur un des états ou sur la transformation. Référence à Vergnaud (absente dans le programme mais explicite dans le document-ressource)
	Conclusion : une organisation des savoirs en axes thématiques (Suisse) ou en domaines (France) **La résolution de problèmes au centre des apprentissages en Suisse et France**		

Tableau 5 : spécificités et généricités des curriculums suisse et français

Nous poursuivons l'analyse comparative en nous appuyant sur le schéma ci-contre qui rend compte de la dynamique entre rhétorique, syntaxique et sémantique selon deux boucles : l'une liant le rhétorique au syntaxique et l'autre le rhétorique au sémantique.

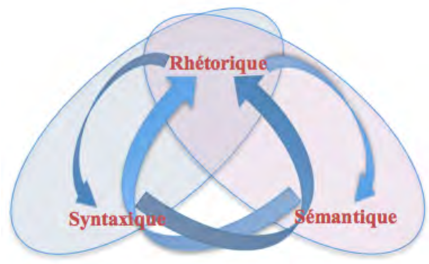


Figure 11 : dynamique entre rhétorique, syntaxique et sémantique

3.1. Comparaison des deux curriculums sur la boucle rhétorique/syntaxique

Les conceptions de l'enseignement/apprentissage à l'école primaire se traduisent en premier lieu par une architecture des curriculums différente selon les systèmes éducatifs. Le plan d'étude romand (PER) s'appuie sur une rhétorique visant à promouvoir un projet global de formation de l'élève sur l'ensemble de la scolarité obligatoire, avec une prévision sur sa formation hors temps obligatoire : « l'école publique assure une mission globale et générale de formation qui intègre des tâches d'éducation et d'instruction permettant à tous les élèves d'apprendre et d'apprendre à apprendre afin de devenir apte à poursuivre leur formation tout au long de leur vie » (CIIP, 2009). Ainsi le PER présente une architecture structurée selon trois axes, axes répondant aux missions fixées par la CIIP. L'instruction relève principalement des « Domaines disciplinaires » tandis que l'éducation trouve sa place au niveau des deux autres axes « Formation générale » et « Capacités générales ». Nous considérons ces trois axes comme l'ossature du Plan d'Étude ou, en conservant la terminologie de Schwab, comme la syntaxe du curriculum. Ces axes ne sont pas disjoints mais trouvent des intersections dans des thématiques telles que « la Pensée créatrice », « la Démarche réflexive » ou « MITIC[58] », qui bien qu'inscrites en « Formation générale » ou en « Capacités transversales », font appel aux « Domaines disciplinaires ». L'objectif du PER est de ne pas cloisonner ou de morceler l'enseignement, mais de faire collaborer toutes les disciplines : les deux axes « Formation générale » et « Capacités transversales » induisent l'interdisciplinarité et la transdisciplinarité afin de renforcer les sens des savoirs étudiés au sein des disciplines tout en participant au processus d'éducation. La rhétorique du plan d'étude romand est donc résolument tournée vers une vision globale de la formation, trans et interdisciplinaire.

---

[58] MITIC : acronyme pour désigner Médias, Images, Technologies de la Communication et de l'Information

Le curriculum français quant à lui développe une autre rhétorique en s'inscrivant dans la tradition de l'école républicaine. Il y est fait explicitement référence aux valeurs de la République Française « la Nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves les valeurs de la République. » Si l'école se doit de transmettre ses valeurs, elle se présente comme le garant de l'équité en matière d'éducation, d'apprentissage, de formation. L'ensemble des élèves reçoit les mêmes enseignements durant toute la scolarité obligatoire. Néanmoins, nous ne retrouvons pas, à l'instar du plan d'étude romand, une vision globale de la formation sur l'ensemble de la scolarité obligatoire : centré sur les savoirs fondamentaux, le curriculum est découpé en programmes d'étude disciplinaires pour chacun des cycles de la scolarité obligatoire. Le Socle commun de connaissances et de compétences, qualifié de « ciment de la Nation », est le seul document donnant un aperçu de l'ensemble de la scolarité obligatoire. Défini comme la référence commune, il liste en termes de savoirs et de techniques les minima que tout élève doit avoir acquis au cours de sa scolarité. Ceci traduit une logique cumulative des enseignements, montrant peu de collaboration entre les disciplines : à la différence du plan d'étude romand, ce sont les disciplines elles-mêmes qui structurent le curriculum français et en définissent la syntaxe au sens de Schwab car elles en sont la charpente. La rhétorique du programme français relève d'une logique disciplinaire, prônant en premier lieu l'apprentissage de savoirs fondamentaux.

3.2. Comparaison des deux curriculums sur la boucle sémantique/rhétorique

Nous focalisant maintenant sur l'enseignement proprement dit des mathématiques, il ressort que dans le plan d'étude romand, cet enseignement est associé aux Sciences de la nature confortant l'idée qu'un savoir disciplinaire ne se construit pas seul mais en connexions avec les autres disciplines : « les Mathématiques et Sciences de la nature abordent des procédures et des notions propres à certains aspects de la réalité et leurs démarches se complètent et s'enrichissent réciproquement » (PER, p. 6). Dans le PER, la résolution de problèmes est un objet à focale à la fois syntaxique et sémantique. D'un point de vue syntaxique, elle structure l'enseignement des mathématiques en se positionnant comme point de départ de la construction des savoirs. D'un point de vue sémantique, elle est elle-même objet d'étude : les différentes étapes de résolution d'un problème sont rappelées dans chacun des axes thématiques du plan d'étude. Le PER privilégie ainsi la réflexion, la recherche, la confrontation de l'élève au milieu didactique pour faire émerger les savoirs à acquérir. Cette vision est en continuité avec le plan d'étude précédent (1998) qui faisait référence aux travaux de Piaget de manière explicite : « le savoir est le fruit d'une adaptation provoquée par le déséquilibre, les contradictions, les interactions vécus par les élèves engagés dans une situation didactique » (COROME, 1998). La rhétorique sous-jacente au choix d'associer mathématiques et sciences de la nature dans un même domaine s'appuie sur le fait que toutes deux permettent de mettre en œuvre une posture scientifique et de modéliser des situations. La modélisation, à l'interface des deux disciplines, donne accès à des traitements pouvant être différents selon la discipline : aspect expérimental prédominant en sciences de la nature ou aspect numérique en mathématiques.

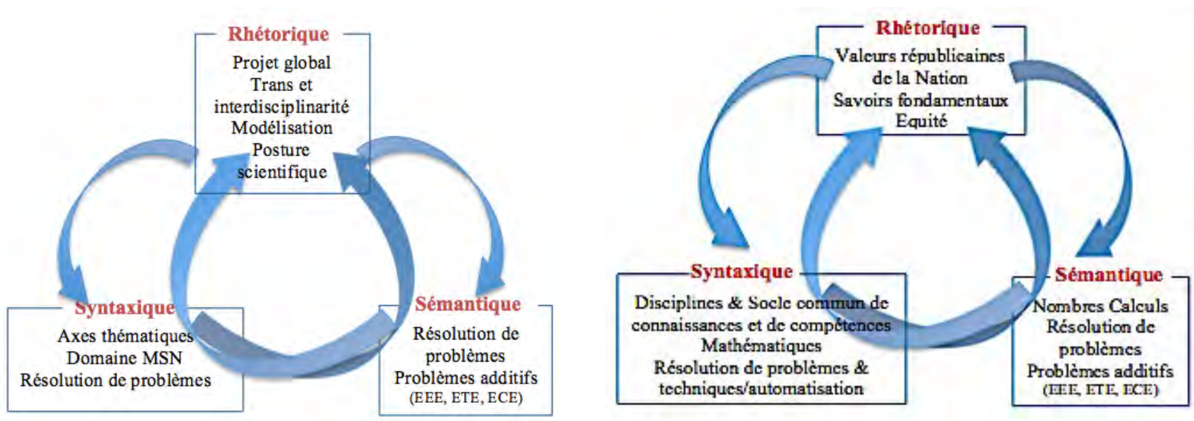
Le programme français de mathématiques à l'école primaire est structuré autour de deux éléments d'ordre syntaxique : « automatismes » et « résolution de problèmes ». Prenant appui sur les récents travaux de Butlen (2007, 2008), de Butlen et Pézard (2003, 2007) et de Butlen, Masselot et Pézard (2003), le document-ressources d'accompagnement du programme « Le nombre au cycle 2 » (Butlen & Masselot ;2010), développe une dialectique entre techniques opératoires et résolution de problèmes, montrant qu'une plus grande habileté calculatoire favorise le processus de reconnaissance des opérations en jeu dans la résolution d'un problème. Dans « Le calcul mental entre sens et technique », Butlen (2007) écrit « la connaissance des opérations et de leurs propriétés permet de résoudre plus facilement les problèmes dans lesquels elles interviennent. Un travail du concept comme objet est nécessaire à l'automatisation du processus de reconnaissance ; en retour la résolution de problème familiarise l'élève avec l'opération et favorise ainsi la reconnaissance de celle-ci ». On peut trouver dans la présentation du programme, un écho à cette dialectique : au cycle 2 comme au cycle 3, « Résoudre des problèmes » est présenté systématiquement après l'énonciation de concepts ou techniques mathématiques, laissant penser que celle-ci trouve sa place en cours voire en fin d'apprentissage, dans des phases d'approfondissement, de réinvestissement de notions mathématiques apprises auparavant. La dimension rhétorique « transmettre les valeurs de la République » garde un lien assez distant avec les objectifs sémantiques du programme français.

D'un point de vue sémantique en nous centrant sur les niveaux CE1 pour la France et 4P pour la Suisse, un premier constat concerne le domaine numérique de travail : il couvre l'ensemble des nombres entiers de 0 à 200 en Suisse alors qu'il est étendu à 1000 en France. Ce qui nous amène à un second constat : l'algorithme de la soustraction n'est pas au programme de 4P, alors qu'il est au programme en CE1. Néanmoins, les deux curriculums se rapprochent sur l'importance qu'ils accordent à la construction du sens de l'opération : en Suisse comme en France, il s'agit de construire les sens des opérations en s'appuyant sur les propriétés du système de numération ainsi que sur le calcul (calcul réfléchi, répertoire, calculatrice etc.). Par ailleurs, les deux curriculums se réfèrent à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud : varier les problèmes de façon à ne pas ancrer les élèves dans une seule représentation de l'opération, mais au contraire d'en construire plusieurs. Ainsi, comme nous l'avons vu précédemment, les deux curriculums insistent sur la nécessité de proposer des problèmes relevant des catégories eee, ete ou ee|c [59] selon la Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud.

En conclusion, les deux curriculums affichent une volonté de donner du sens aux opérations et non de s'attacher en premier à la technique opératoire. Pour autant les manières de construire le sens de la soustraction diffèrent : en Suisse romande, le sens de la soustraction est appréhendé au travers de la résolution de problème, en parallèle de la construction du nombre et de ses propriétés. En France, le sens de la soustraction se construit d'abord sur la connaissance de propriétés du nombre et de techniques de calcul pour ensuite être consolidé lors de la résolution de problèmes. Ces deux approches sont compatibles avec l'ingénierie de Brousseau dans la mesure où celle-ci engage résolution de problèmes, techniques opératoires et construction du concept de nombre.

3.3. Conclusion

Les deux schémas ci-dessous soulignent ce qui, dans la comparaison que nous venons de faire des deux curriculums, marque les spécificités et les généricités de chacun aux plans rhétoriques, syntaxiques et sémantiques ainsi que les liens qui les relient.



Suisse romande **France**

Figure 12 : dynamique entre les différentes focales des curriculums suisse et français

59 eee: composition de deux états pour obtenir un troisième état
ete : transformation d'un état initial pour donner un état final
ee|c : comparaison de deux états

Qu’en est-il alors des possibles mises en œuvre de l’ingénierie didactique dans les différents sites au regard de leur institution d’appartenance ? Les deux curriculums convergent sur la résolution de problèmes comme objet d’étude central, ce qui nous autorise à penser que cette ingénierie didactique est implémentable sous ces deux institutions. Pour autant, nous pouvons supposer que les traditions d’enseignement en France et en Suisse induisent des appréciations différentes de l’ingénierie didactique, appréciations qui, nous le verrons plus loin, sont observables dans son implémentation.

Une des premières hypothèses réside dans la manière dont les enseignantes appréhendent l’ingénierie didactique. En effet, si les programmes officiels français sont précis quant aux notions à étudier pour chaque cycle et chaque niveau, ils restent « ouverts en termes de méthode afin de respecter strictement le principe de la liberté pédagogique inscrit dans la Loi d’orientation et de programme pour l’avenir de l’École. Il appartient aux enseignants et aux équipes d’école de s’emparer résolument de cette liberté nouvelle. » (BOEN hors série n° 3, p. 11). Le principal argument soutenant cette liberté pédagogique réside dans « la possibilité d’adapter la progressivité des apprentissages aux besoins des élèves » et de « concilier l’égal accès à l’instruction avec la prise en compte de la diversité des enfants et des contextes. » (*Ibid.,* p.11) Ainsi en France, les enseignants utilisent diverses ressources qu’ils peuvent utiliser et transformer à leur guise. On peut alors supposer que le texte de l’ingénierie didactique sera appréhendé de la même manière que les autres ressources, suivi pas à pas sans modification structurelle, ou tout au contraire, adaptée aux contraintes de la classe et/ou modifiée selon la vision que les enseignantes ont de l’enseignement de la soustraction.

En Suisse romande, les enseignants suisses n’ont pas une telle diversité de ressources, mais ont à disposition une ressource unique, les moyens d’enseignement COROME qui, rappelons-le, sont des ressources officielles préconisées par l’institution. Ils regroupent un ensemble d’activités classées par modules[60], chacun des modules étant organisé autour de différentes activités dont une ou plusieurs activités dites « phare ». À titre d’exemple, en 4P-Harmos, le module 3 correspondant au champ additif est constitué de l’activité phare « Fête foraine » autour de laquelle sont adjointes d’autres situations à caractère plus ludiques : « Le sens des activités est donné ici par des jeux *(Toujours 12, Bataille...*), «courses aux nombres» *(Le nombre visé, L'aigre et la litue...*), par des défis, *(Toujours plus haut !, Les pirates !...)*,

[60] Rappelons que les moyens d’enseignements correspondant au PER actuel sont toujours en cours d’écriture (à la date de l’écriture de notre thèse) et que les enseignants utilisent les moyens d’enseignements du plan d’étude précédent.

par des inventaires systématiques *(En carrés ! ...*), etc. » (Moyens COROME, livre du maitre, p.184). L'enseignant a pour charge d'organiser ces activités dans une progression qu'il détermine lui même. Pour chacune des activités, l'enseignant a à disposition un protocole de mise en œuvre : description de l'activité (« Nombre d'élèves » ; « Matériel » ; « Consigne et règles »), gestion de l'activité (« Mise en œuvre » ; « Déroulement » ; « Mise en commun » ; « Démarches possibles de l'élève »). Il est à noter que les activités présentées se déroulent sur une, deux voire trois séances. On observe donc sur ce plan une différence importante avec les usages en France. Nous pouvons alors penser que le texte de l'ingénierie qui n'a pas un caractère de « texte injonctif », qui ne décrit pas de manière aussi détaillée la mise en œuvre en classe, et qui est prévue sur une longue durée (15 leçons et plusieurs ateliers) soit un élément perturbateur et puisse provoquer des ruptures dans les manières de faire de l'enseignante en Suisse.

Chapitre 2. Étude des modalités de mise en œuvre de l'ingénierie didactique par des enseignantes suisse et française

Ce chapitre est composé de quatre titres : le premier propose une analyse épistémique de l'ingénierie didactique et de ses principales étapes. Les titres 2, 3 et 4 examinent les modalités de mise en œuvre de l'ingénierie didactique dans chacun des sites. L'enquête est menée à partir de l'étude des séances mises en œuvre combinant des niveaux d'analyse mésodidactique et microdidactique. L'interprétation des constats effectués permet ensuite de produire une interprétation macrodidactique de la dynamique d'implémentation dans chaque site.

L'objectif de ce chapitre est de comprendre la logique d'implémentation de l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre dans chaque site. Nous poursuivons ainsi le travail de comparaison initié, au plan curriculaire, dans le premier chapitre des résultats, en investiguant les manières de faire de trois enseignantes (deux chevronnées et une débutante) afin de tenter de démêler dans leurs mises en œuvre ce qui relève des influences des pré-construits institutionnels que nous venons d'analyser, et ce qui relève des déterminants liés à l'épistémologie pratique de ces enseignantes. Conformément aux principes des analyses didactiques, nous démarrons ce chapitre par une réflexion sur les savoirs visés par les différentes étapes de l'ingénierie broussaldienne afin de mieux en comprendre les usages qu'en font les enseignantes. Dans ce chapitre, ce sont donc les caractéristiques épistémiques de l'ingénierie didactique de la soustraction qui serviront de *tertium comparationis* à l'analyse des pratiques observées dans les trois sites.

L'ingénierie didactique ayant été élaborée dans les années 80, et l'analyse *a priori* ayant été menée au COREM par l'équipe de Brousseau (*Cf.* Berté, 1996), nous mettons l'accent, dans une première section, sur la structure de l'ingénierie didactique ainsi que les enjeux de savoirs des différentes étapes la composant. L'objectif ici est d'accéder à une intelligibilité des mises en œuvre de l'ingénierie dans les différents sites observés.

Les trois sections suivantes présentent l'analyse macrodidactique de la mise en œuvre de l'ingénierie pour chacun des trois sites. La structure de l'ingénierie didactique, les adaptations des enseignantes dans leur mise en œuvre nous ont amenée à opter pour une stratégie d'analyse en deux temps. Dans un premier temps, nous adoptons une focale mésoscopique[61] celle de l'analyse de chacune des séances composant les différentes étapes de l'ingénierie initialement pensées par l'équipe de Brousseau. Pour documenter notre analyse, nous faisons le choix de l'exemplifier par de courts extraits d'interactions. Dans un deuxième temps, élargissant notre focale, nous dégageons pour chaque étape de l'ingénierie (c'est-à-dire un ensemble de séances), une analyse macrodidactique. Cette dernière mettra prioritairement l'accent sur les dimensions mésogénétiques et chronogénétiques des mises en œuvre. Ces allers retours entre focales mésoscopique et macroscopique nous permettent, en remontant à

[61] Rappelons que lorsque le radical d'un terme est « scopie », celui-ci renvoie à une échelle temporelle d'observation d'un système. Lorsque le radical est « didactique », alors le terme renvoie à une analyse d'un phénomène didactique.

un point de vue encore plus global, celui de l'ingénierie didactique, d'accéder à une analyse macrodidactique et ainsi d'appréhender la dynamique évolutive du système didactique, sur les plans mésogénétique, chronogénétique et topogénétique. Pour chacun des sites observés, nous présentons donc (1) le contexte, (2) une analyse de l'implémentation de l'ingénierie didactique selon sa structuration initiale, c'est-à-dire par étape par étape, (3) une conclusion macrodidactique visant à interpréter les constats établis à la lumière des déterminants institutionnels (pré-construits curriculaires) et personnels (épistémologie du professeur) sur les pratiques didactiques observées. (*cf.* Figure 5) Analyse épistémique des étapes de l'ingénierie didactique : *tertium comparationis*

L'approche comparatiste pour analyser la manière dont trois enseignantes mettent en œuvre l'ingénierie didactique broussaldienne impose, comme nous l'avons discuté dans la section méthodologie, de mener à partir du document rédigé par Berté (1996) une analyse portant sur les enjeux de savoir mis à l'étude pour enseigner « la soustraction à l'école élémentaire » (titre éponyme de l'ingénierie).

Titre 1. ANALYSE EPISTEMIQUE DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

1. Brève description de l'ingénierie didactique

Nous présentons ici une brève description de l'ingénierie didactique telle qu'élaborée par Brousseau et rapportée dans un document du COREM[62] (Berté, 1996). Rappelons que l'objectif de cette ingénierie est de d'une part construire le sens de l'opération et d'autre part de construire un algorithme opératoire.

Pour ce faire, l'ingénierie s'appuie sur une situation fondamentale, produite par la modélisation du premier problème proposé aux élèves (*cf.* infra). Brousseau définit deux finalités de la modélisation : (i) au regard de la connaissance visée, celle-ci apparait « comme la solution ou le moyen d'établir la stratégie optimale » de résolution. (Brousseau, 2004, p.80) ; (ii) au regard de l'activité d'enseignement, elle permet simuler « toutes les situations observées dans les classes – (sinon les déroulements particuliers) – mêmes les moins satisfaisantes » (*Ibid.*). Dans cette ingénierie, la situation fondamentale de l'ingénierie observe ces deux finalités : la soustraction est la stratégie optimale de résolution des problèmes soustractifs et la modélisation des problèmes avec une boite et des cubes permet aux élèves de simuler leurs propres procédures. En modifiant les valeurs des variables didactiques (valeurs numériques dans les problèmes, structure des problèmes) ou en jouant sur la sémantique des problèmes, la situation fondamentale produit un ensemble de situations particulières donnant accès aux différents sens d'une différence[63] : (i) un écart entre deux nombres ; (ii) un complément ; (iii) le reste après un retrait.

Une autre caractéristique de cette ingénierie réside dans le fait que la dévolution des situations d'apprentissage de la soustraction n'est possible que si celles-ci reposent sur les connaissances connues des élèves. L'ingénierie s'appuie sur un savoir connu des élèves, l'addition : la différence de deux nombres est d'abord définie comme « le nombre que l'on doit ajouter au petit pour obtenir le grand » et la technique opératoire est construite par la recherche d'un complément.

[62] COREM : Le Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques

[63] Nous nous écartons du langage courant qui accepte que la différence entre a et b soit la même que celle entre b et a. Chaque fois que nous écrivons le mot différence, nous nous plaçons dans le cadre numérique de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire l'ensemble des nombres entiers positifs. La différence entre a et b est le nombre d égal à a – b

Aussi, dans cette section, une attention particulière est portée à la structure de l'ingénierie, à la structure des problèmes proposés ainsi qu'aux valeurs numériques en jeu. C'est ce qui guide le plan de cette section.

1.1. Structure de l'ingénierie didactique

L'ingénierie se déroule en six étapes, chacune d'elles étant composée d'un ensemble de leçons et ayant une visée particulière que nous avons reprise dans le Tableau 6 ci-dessous :

Étape 1 : **L1, L2, atelier, C1**	**Étape 2 :** **L3, L4, L5**	**Étape 3 :** **L6 & C2, L7, ateliers, L8**	**Étape 4 :** **L9, L10, L11**	**Étape 5 :** **L12, L13**	**Étape 6 :** **L14, L15**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**« L'addition comme moyen de preuve d'un résultat. »**	**« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signe + et – Calcul mental »**	**« La stratégie des essais »**	**« Réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs »**	**« La soustraction »**

Du sens d'une différence au sens d'un algorithme

Calculs de plus en plus complexes

Tableau 6 : synthèse des étapes de l'ingénierie didactique

Les trois premières étapes construisent le sens de l'opération tandis que les trois suivantes portent sur la construction d'une technique opératoire.

Première étape : « dévolution de l'apprentissage de la soustraction »

Cette étape est composée de deux leçons et d'un atelier. L'objectif principal est de dévoluer aux élèves « l'apprentissage de la soustraction » (Berté, 1996). Les élèves doivent prendre à leur charge la résolution des problèmes qui leur sont proposés, en mobilisant leurs propres stratégies : dessin, comptage sur les doigts, utilisation du système numération etc.

Le premier problème proposé aux élèves est le suivant :

> « Dans le parking du garage, il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ? »

Après une recherche individuelle, les élèves simulent le problème avec une boite et des cubes, la boite représentant le parking, et les cubes les voitures. Le milieu matériel est rétroactif : le comptage des cubes dans la boite valide ou invalide les réponses proposées par les élèves. La boîte modélise la situation et remplit deux fonctions : une fonction de simulation et une fonction de vérification empirique. La modélisation de ce problème génère la situation fondamentale : une boite et des cubes mettant en exergue les relations entre les nombres intervenant dans la soustraction. Dans cette étape, les problèmes mettent en jeu deux sens de la différence de deux nombres : le reste quand on enlève une quantité et le nombre que l'on rajoute au plus petit pour trouver le plus grand.

Cette étape est ici une phase d'action durant laquelle les élèves résolvent des problèmes selon leurs propres procédures, les simulent avec le matériel et vérifient leurs résultats par comptage des cubes restant dans la boite. Les rétroactions du milieu matériel indiquent la validité des réponses des élèves.

Deuxième étape : « L'addition comme moyen de preuve »

Cette étape, composée dans l'ingénierie didactique de trois leçons, a pour objectif de faire émerger un moyen intellectuel permettant de valider une réponse. Ce moyen s'appuie sur la définition de la différence entre deux nombres quelconques :

soient a et b positifs tels que $a \geq b$;

la différence d = a – b est le nombre tel que $d + b = a$.

Cette définition permet de construire « l'addition comme un moyen de preuve » d'une différence (Berté, 1996, p.13). La preuve est basée sur la propriété :

$\mathrm{a, b}$ et d quelconques tels que $\mathrm{a} \geq \mathrm{b}$, si $\mathrm{d} + \mathrm{b} = \mathrm{a}$ alors $\mathrm{d} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$.

La preuve d'un résultat s'établit dans les deux premières leçons par surcomptage des cubes enlevés aux cubes supposés restants dans la boite. Dans la troisième leçon, le matériel disparaît au profit de l'addition.

Pour établir l'addition comme moyen de preuve d'une différence, Brousseau introduit un objet qui, s'il est pour l'élève de nature ludique, est en réalité un « apprêt didactique » (1986), sorte de sous-couche préparant la preuve intellectuelle. Précisons : Un élève résout un problème et parie sur sa réponse. Après avoir sur-compté ou effectué l'addition, l'enseignant retarde la vérification empirique (l'ouverture de la boite) et lui demande de confirmer sa volonté de parier. Ce laps de temps est utile à l'élève pour lui permettre de prendre en compte le résultat du sur-comptage ou de l'addition et pour formuler un raisonnement afin de confirmer ou non son pari. Le pari comme mode fonctionnement de la situation a pour but de dévoluer aux élèves la preuve d'un résultat. Les rétroactions du milieu matériel, si elles valident toujours les réponses des élèves, ont surtout pour objet de renvoyer à l'élève une réponse quant à la pertinence du maintien du pari.

Cette étape intègre donc une phase de formulation durant laquelle les élèves ont eu à formuler et à débattre d'une procédure de validation d'un résultat et une phase de validation consistant à mettre en place un moyen intellectuel de validation d'une réponse à un problème soustractif que l'on validait auparavant empiriquement. En fin d'étape, les élèves disposent *en commun* d'un outil de vérification intellectuel.

Nous portons à l'attention du lecteur la place de cette étape dans la construction de l'ingénierie didactique : alors même que les élèves ne connaissent ni le sens d'une différence, ni une technique opératoire, il est demandé aux élèves de prouver leur résultat. Ceci n'est pas l'usage dans les classes ordinaires en France où un apprentissage technique précède souvent la résolution de problèmes. Par ailleurs, revenir sur un résultat et le prouver n'est pas non plus une activité familière au cycle 2. Dans cette ingénierie, la connaissance de l'addition comme élément de preuve d'un résultat obtenu par une procédure de leur choix est cruciale : elle en est le soubassement qui va permettre la poursuite vers la construction d'un algorithme de la soustraction.

Troisième étape : « Sens et vocabulaire de la soustraction. Signes + et – . Calcul mental pour soustractions techniquement faciles »

Cette étape est composée de 3 leçons, d'un atelier « jeu de la boite » et d'une séquence d' « exercices sur les écritures ». Elle vise plusieurs objectifs :

- l'identification par les élèves des problèmes se rapportant à une différence en confrontant les élèves à des problèmes de type additifs ou soustractifs. Le codage des deux opérations est introduit.

- l'explicitation des procédures pour des calculs techniquement faciles, pouvant s'effectuer mentalement. Par exemple, comment effectuer l'opération lorsque les deux nombres sont petits (8 – 5), ou bien lorsque le second nombre est petit (25 – 3 ou 33 – 5), ou bien lorsque l'on enlève des dizaines ou des centaines (181 – 40, 341 – 100) ou encore lorsque les deux nombres sont grands (28 – 26, 41 – 39).

- l'écriture d'un nombre sous plusieurs formes et en particulier du « nombre solution » sous la forme a – b ou a + b.

D'un point de vue épistémique, ces trois premières étapes constituent les soubassements de l'ingénierie didactique : à ce stade, les élèves sont capables de discriminer les problèmes soustractifs des autres problèmes, de traduire la solution sous la forme d'une écriture additive ou soustractive, de les résoudre selon des procédures personnelles et de vérifier leur réponse par un moyen intellectuel. Les trois étapes suivantes ont pour visée de construire et donner sens à l'algorithme de la soustraction.

Quatrième étape : « la stratégie des essais »

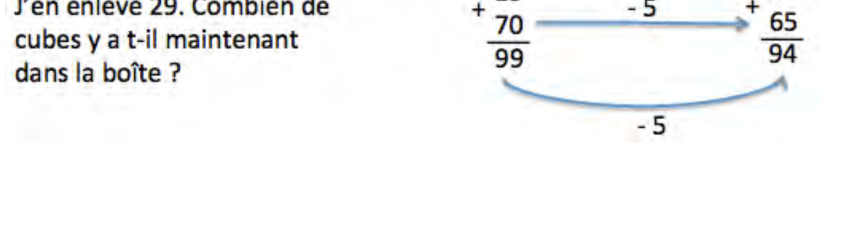
Cette étape est composée de trois leçons. Dans ces leçons, les problèmes proposés aux élèves engagent un calcul difficile car la différence a – b est telle que le chiffre des unités de a est inférieur au chiffre des unités de b. L'objectif de l'étape est de faire émerger une stratégie pour effectuer cette opération : « la stratégie des essais ».

Le moyen intellectuel de preuve élaboré lors de la deuxième étape devient un outil au service de la résolution des problèmes soustractifs. Par exemple, pour le calcul de 92 – 34 (premier problème de la leçon 9), plusieurs stratégies d'élèves sont envisageables. Nous en listons quelques-unes ci-dessous.

- Le hasard
- Le dessin : en dessinant 92 signes puis en gommant ou barrant 34 signes
- Les retraits successifs : par exemple, enlever 30 puis 4
- La mise à l'épreuve d'un premier nombre, puis un second, puis un troisième … et ce, jusqu'à obtention de la solution

Contrairement aux deux premières étapes où seul le résultat importait, le travail porte sur les procédures des élèves : « il s'agit de faire formuler, reconnaître, identifier par tous ces stratégies pour trouver la réponse » (Berté, 1996, p.36). La preuve permet d'écarter des procédures calquées sur l'algorithme de l'addition, c'est-à-dire les procédures pour lesquelles les élèves commutent les chiffres des unités de façon à rendre la soustraction à l'ordre des unités possible. De ce fait, la non-commutativité de la soustraction trouve sa justification dans la preuve. Pour contourner une opération difficile à effectuer, une stratégie est donc nécessaire. L'addition comme moyen de preuve devient un outil au service de la recherche d'une solution. La solution est alors obtenue par essais successifs.

L'objectif est, au fil de l'étape, de diminuer le nombre d'essais. La méthode de la fausse position apparaît en fin d'étape. La solution est obtenue par mise à l'épreuve d'un premier essai, puis par translation de l'écart entre le résultat issu de la preuve par addition et le résultat attendu. Nous illustrons ci-après cette technique :



Signalons que le premier essai peut être réfléchi selon une procédure personnelle de l’élève : ici, l’élève aura pu obtenir 70 en effectuant un calcul sur les ordres de grandeur à la dizaine des deux nombres 94 et 29.

Cette étape est ici une phase d’action mais aussi de formulation :

- une phase d’action dans la mesure où les élèves effectuent des essais. Les rétroactions du milieu didactique, ici dues à la preuve, valident ou invalident les essais ;

- une phase de formulation dans la mesure où les élèves sont amenés à débattre collectivement de leur procédure et à améliorer la méthode de résolution par essais.

Cinquième étape : « réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »

La cinquième étape est composée de deux leçons, proposant chacune un problème à résoudre. Il s’agit de poursuivre le travail entamé à l’étape précédente, c’est-à-dire de diminuer le nombre d’essais pour « converger vers celles donnant la réponse en un seul coup » (Berté, 1996, p.38). Cette étape fait appel à des personnages fictifs (les Schtroumpfs) qui proposent chacun une procédure de résolution. Nous détaillons ci-dessous ces procédures.

La première leçon de cette étape propose le problème suivant :

Ce matin le facteur avait 93 lettres à distribuer. Il les a mises dans sa sacoche et il est parti. Il a déjà distribué 56 lettres. Combien en a-t-il dans sa sacoche maintenant ?

- Schtroumpf Bricoleur teste quatre essais (10, 20, 30 puis 40) qui l’amènent à conclure que la solution est entre 30 et 40 ; il bricole …
- Schtroumpf Musicien fait un premier essai en testant directement 30, puis ajuste en chantant la comptine 86, 87, 88, 89, 90, 91, 91, 93.
- Azraël effectue 56 + 93, montrant qu’il ne reconnaît pas la nature du problème.

Au terme de cette leçon, les élèves ont analysé une procédure menant à la solution en deux coups. Le choix du premier nombre étant crucial, cette procédure nécessite un « entrainement à l’ordre de grandeur » (*Ibid.*, p.40).

La deuxième leçon de l'étape s'appuie sur le problème suivant :

Dans les classes de CP et de CE1, il y a 84 enfants. Nous avons compté 39 filles. Combien y a-t-il de garçons ?

Quatre Schtroumpfs présentent leurs procédures :

- Schtroumpfette procède en deux coups par la méthode de la fausse position en éprouvant d'abord 50 puis 45. (Schtroumpfette opère d'abord sur les dizaines, puis ajuste par les unités)
- Schtroumpfissime procède aussi en deux coups par la méthode de la fausse position, mais en commence par tester 5 puis 45. (À l'inverse de Schtroumpfette, Schtroumpfissime règle d'abord le problème des unités, puis en ajuste par les dizaines)
- Super Schtroumpf procède en un seul coup : il effectue l'addition lacunaire.
- Enfin, Grand Schtroumpf procède lui aussi en un seul coup : la soustraction 84 – 39 est posée en colonne, mais aucune indication ne permet de savoir comment il a fait.

Si les procédures du Schtroumpf musicien et de la Schtroumpfette et de Schtroumpfissime s'appuient sur la méthode de la fausse position, elles initient la technique de l'opération lacunaire effectuée par Super Schtroumpf.

Cette étape est ici une phase de formulation : il s'agit dans un premier temps d'analyser des procédures et de les expliciter. Nous interprétons l'introduction de la procédure du Grand Schtroumpf à la fin de cette étape comme justifiant la poursuite d'un apprentissage dans une nouvelle étape.

Sixième étape : « La soustraction »

Cette dernière étape est composée de deux leçons.

La première fait écho à la troisième étape. Il s'agit de revoir les techniques de calcul mental puis distinguer dans une liste de calculs, les soustractions pouvant être effectuées mentalement de celles nécessitant une technique opératoire.

La seconde leçon de l'étape, s'appuyant sur un problème, revient sur l'ensemble des techniques opératoires étudiées dans les leçons précédentes : la méthode par essais successifs, la méthode de la fausse position, les méthodes des Schtroumpfs. Cette dernière leçon clôt la séquence en présentant deux techniques expertes de la soustraction, l'une par conservation des écarts, l'autre par posée en colonne, technique s'appuyant sur le système de numération décimal (technique d'échange d'une dizaine pour dix unités).

1.2. Les variables didactiques retenues

Conformément aux principes de la TSD, les différentes situations (a-didactique d'action, de formulation et de validation) proposées par l'ingénierie ont été élaborées pour que le choix des variables didactiques puisse être l'occasion pour les élèves de rencontrer les savoirs visés par chacune des étapes. Elles constituent des éléments-clés du processus transpositif interne à l'enseignement de la soustraction (construction du sens de l'algorithme) au niveau de classe considérée. Nous en précisons certaines dimensions ci-après.

1.2.1. Le matériel « boite et cubes »

Aux différentes étapes de l'ingénierie, l'autorisation ou l'interdiction d'utiliser un matériel ou un dessin modifie les stratégies de résolution des problèmes des élèves. Par exemple, à l'étape 2, laisser perdurer une schématisation de la situation utilisant les propriétés du système décimal maintient l'élève dans le comptage. De la même façon, si écarter le matériel n'était pas explicitement formulé à l'étape 4, un élève pourrait s'enfermer dans une résolution empirique. L'ingénierie didactique introduit une boite et des cubes durant les deux premières étapes pour ensuite l'écarter ensuite progressivement au profit du calcul numérique.

1.2.2. Les nombres en jeu dans les problèmes de l'ingénierie didactique

Pour discuter le choix des valeurs des variables didactiques numériques retenues, nous nous référons à Katembera (1986) qui étudie « le rôle de la grandeur[64] des nombres et des différentes représentations de la soustraction en vue de l'élaboration des situations didactiques ». Constatant que la taille des nombres provoque chez les élèves des changements de procédure dans la résolution des problèmes soustractifs, cette chercheure construit une carte « des domaines de meilleure efficacité des procédures » (Katembera, 1986, p.32). Pour chacun des domaines définis (*cf.* tableau ci-après), elle met en regard les « modèles d'actions »[65] des élèves et les « modèles efficaces »[66] (*Ibid., p.87*). Une procédure est alors considérée comme « modèle adéquat sur un domaine » si elle y est à la fois un modèle d'action et un modèle efficace. (*Ibid.*, p. 86). Nous extrayons ci-après le tableau « des

[64] Par « grandeur » des nombres, Katembéra désigne la taille des nombres.

[65] Une procédure d'élèves devient un modèle d'action dès lors que sa fréquence minimum didactique d'emploi est supérieure ou égale à 0,23 (Katembera, 1986, p.63)

[66] Une procédure d'élèves devient un modèle efficace dès lors que sa fréquence minimum didactique de succès est supérieure ou égale à 0,75 (Katembera, 1986, p.75)

modèles adéquats » en fonction des domaines. Les domaines sont définis par le triplet (a, b, d) où a et b sont les deux termes de la soustraction ($a > b$) et d leur différence.

Domaines	Modèle adéquat
D_1 : a petit	Représentation mentale
D_2 : $10 \leq a \leq 30$ avec $b \geq 5$ et $a - b > 5$	indéterminé
D_3 : $10 \leq a \leq 30$ avec b très petit par rapport à a	Comptage sur les doigts à rebours
D_4 : $a - b$ très petit	Recherche du complément
D_5 : a très grand b et d assez grands	Algorithme

Tableau 7 : tableau des procédures pertinentes selon Katembera (1986)

Dans ce qui suit, nous reprenons la carte de Katembera (1986) sur laquelle nous avons placé chacun des problèmes proposés par l'ingénierie didactique. Par exemple, dans le schéma ci-après, il faut lire : P_{65} est le 65$^{\text{ème}}$ problème de l'ingénierie didactique proposé lors de l'étape 6. Sa position sur la carte dans le domaine D5 indique que « la procédure de meilleure efficacité » relève d'un algorithme.

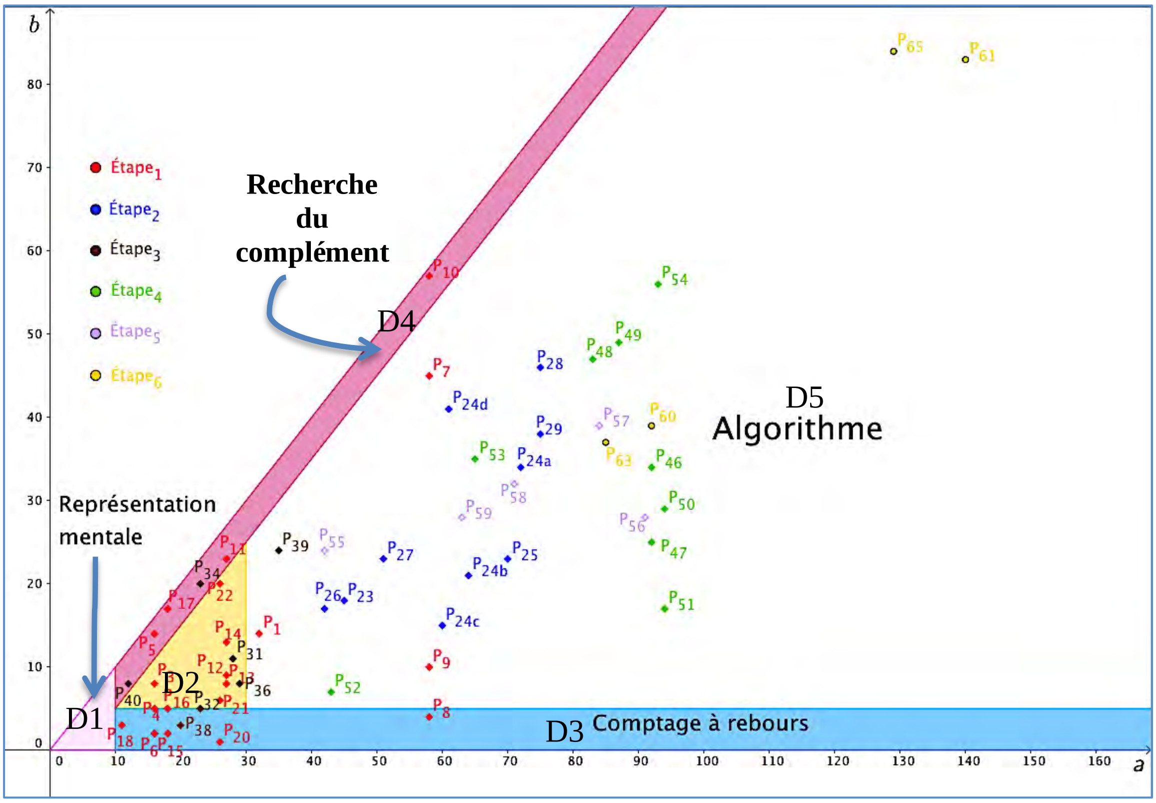


Figure 13 : Répartition des problèmes proposés aux élèves dans l'ingénierie au regard de « carte du domaine de meilleure efficacité des procédures » de Katembera (1986)

Katembera (1986) indique plusieurs utilisations de la carte ainsi élaborée :

Une première où l'enseignant « cherche à provoquer la mise en œuvre d'une procédure » :

> « Si le maitre désire provoquer la mise en œuvre d'une procédure Pi dont le domaine de meilleure efficacité est D_j, sa démarche peut consister :
> - à proposer des situations dans D_j (de préférence au centre de D_j)
> - à montrer les inconvénients d'utiliser d'autres procédures du point de vue de l'économie à l'emploi, de la facilité d'exécution, de la fiabilité
> - à faire apparaître des difficultés en commandant l'usage de la procédure P_i visée pour résoudre des situations prises en dehors de D_j » *(Ibid.,* p.118*)*

Une seconde où l'enseignant « désire laisser aux enfants le soin de choisir les outils et les démarches de solution qu'ils jugent adaptés »

Par contre, elle désigne le domaine D2 comme celui ne privilégiant aucune procédure, et donc particulièrement intéressant d'un point de vue didactique :

> « Dans ce domaine D2, les élèves prennent eux-mêmes des décisions au niveau des procédures, peuvent en voir les conséquences et les modifier par la correction de la procédure mise en œuvre précédemment ou par anticipation de nouvelles procédures, entamant ainsi un véritable processus d'adaptation » *(Ibid.,* p.119)

Sur la carte de répartition des problèmes de l'ingénierie didactique (Figure 13, p.189) la majorité des problèmes des étapes 1 et 3 appartiennent au domaine 2, ce nous considérons comme en adéquation avec la deuxième utilisation de la carte « laisser les élèves libres dans leurs procédures » : l'étape 1 a pour objectif de dévoluer la résolution de problèmes soustractifs tandis que l'étape 3, plus technique, a pour objectif de faire émerger différentes techniques de calcul mental.

Par contre, les problèmes de l'étape 2 s'inscrivent tous dans le domaine 5, ce que peut paraître surprenant. Rappelons que l'objectif de cette étape est de travailler non pas les procédures de résolution, mais la validation d'un résultat, quelle que soit la procédure l'y ayant conduit. Aussi, le choix des variables numériques dans ce domaine est-il justifié par une volonté de compliquer la résolution afin d'obtenir des résultats erronés et de donner sens à la nécessité de prouver un résultat.

Remarquons que les problèmes des étapes 4, 5 et 6 se situent *au centre* du domaine D5, comme le conseille Katembera (supra). Les variables numériques ainsi choisies montrent explicitement que l'enjeu didactique porte sur la mise en œuvre d'un algorithme de la soustraction. Les variables numériques sont choisies de façon à ce que le calcul de la différence par l'opération soustraction nécessite la gestion d'une retenue. Aussi, différentes stratégies de mise en œuvre sont sollicitées auprès des élèves pour contourner cette difficulté.

1.2.3. Le niveau de complexité des problèmes proposés

Pour compléter l'analyse relative aux variables didactiques retenues, nous mettons en relation dans cette section les problèmes proposés aux élèves et la classification de Vergnaud (1990) relative au champ additif, classification que nous avons présentée en première partie (*cf.* section 2.2.1.1 du chapitre 1 de la première partie). Le graphique ci-dessous permet de visualiser les niveaux de complexité des structures additives présents dans chaque étape de l'ingénierie.

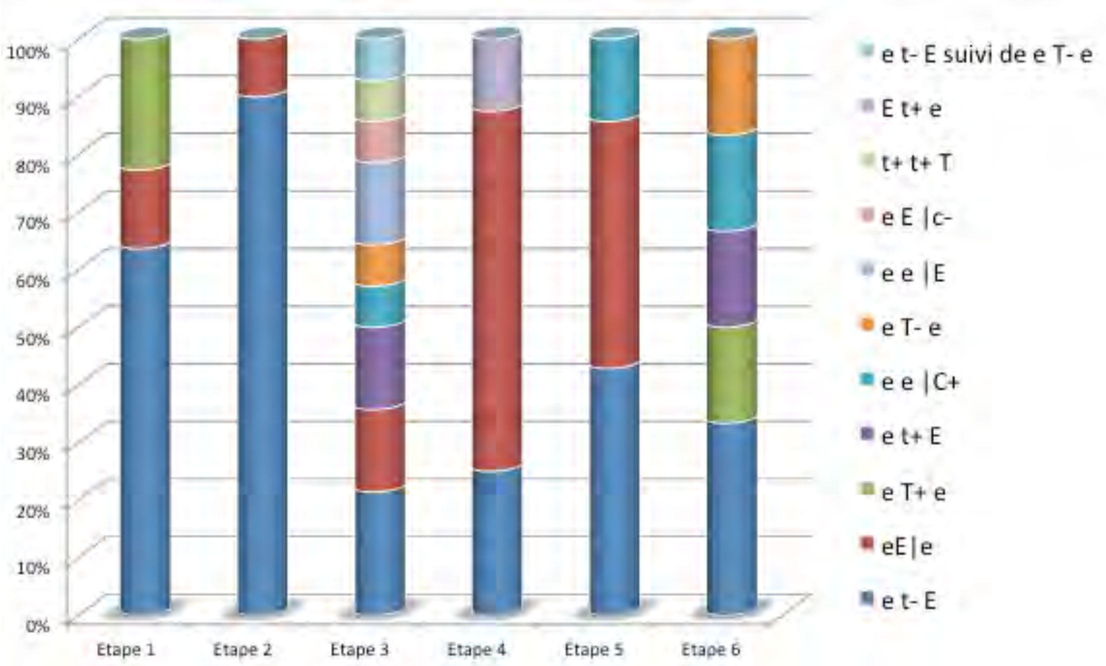


Figure 14 : Répartition des problèmes proposés aux élèves dans l'ingénierie au regard de la classification des problèmes dans le champ additif selon Vergnaud (1990)

Deux structures dominent par leur présence : les transformations d'état ainsi que les combinaisons d'état. Les deux premières étapes sont principalement composées de problèmes de transformation d'état avec recherche de l'état final (e t- E). Or, ces problèmes sont les mieux reconnus des élèves (*cf.* section 2.2.1.1.2 du chapitre 1 de la première partie). Nous avançons l'hypothèse que pour la première étape, il s'agit pour les élèves de la première rencontre avec des problèmes soustractifs. Ainsi qu'il est écrit dans l'ingénierie, l'objectif est de « transmettre le projet d'apprendre à résoudre des problèmes de soustractions ». La deuxième étape est principalement focalisée sur la preuve. Aussi, pour cette étape, ce sont les variables numériques qui prédominent et affectent la hiérarchie des procédures des élèves. Par contre, les étapes suivantes 4 et 5 donnent le prima aux combinaisons d'états. Dans ces étapes, c'est la sémantique (*cf.* infra) et non la structure des problèmes qui affecte la hiérarchie des stratégies de résolution. Nous constatons que pour chacune des étapes est adjointe une troisième catégorie, la recherche d'une transformation connaissant les états initial et final (e T+ e) et la comparaison connaissant les deux états (e e |C+), ce qui a pour visée d'augmenter le champ de reconnaissance de problèmes soustractifs.

Les étapes 3 et 5 diversifient les problèmes additifs : il s'agit de différencier les problèmes additifs des problèmes soustractifs et de présenter différents sens de la soustraction, ce qui se laisse à voir graphiquement par le nombre de catégories de structures représentée dans cette étape.

1.2.4. L'aspect sémantique des énoncés

Nous considérons que les termes choisis dans les problèmes de l'ingénierie sont pensés en termes de variables didactiques. Une majorité d'élèves repère les problèmes soustractifs selon les mots utilisés dans l'énoncé. Or, un mot peut induire chez l'élève une opération contraire au sens du problème. Par exemple, le problème « je mets 5 cubes dans la boite. Combien faut fait-il que j'en mette encore pour qu'il y en ait 16 en tout ? » contient le mot « encore » qui peut induire certains élèves à faire une addition. Alors que le problème « J'ai 16 cubes. J'en enlève 8, combien en reste-t-il ? » est sans ambiguïté.

Nous avons recensé les mots inducteurs contenus dans les énoncés de l'ingénierie et représenté la répartition des problèmes soustractifs de l'ingénierie selon qu'ils contiennent des mots inducteurs de l'addition, de la soustraction, ou qu'ils sont neutres.

Mots inducteurs de la soustraction	Mots inducteurs de l'addition
Reste / enlever / reste / perdre / laisser / manque	Mettre / encore / plus

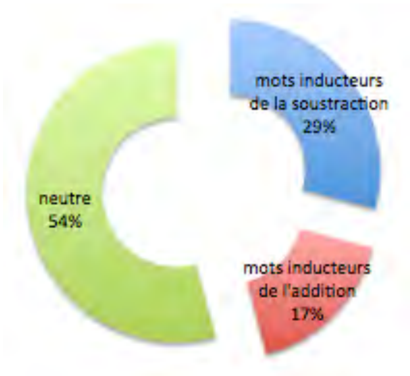


Figure 15 : registre sémantique des énoncés de l'ingénierie didactique

Nous relevons que l'ingénierie utilise en majorité des énoncés neutres. Un examen des l'ingénierie nous révèle que les énoncés présentant des mots induisant l'addition se trouvent pour la plupart en début d'ingénierie, ce qui nous paraît cohérent puisque celle-ci vise la reconnaissance des problèmes soustractifs avant de travailler les algorithmes opératoires.

Pour conclure cette section, nous avons relevé les principales variables didactiques déterminantes pour atteindre les objectifs annoncés : reconnaître un problème soustractif puis donner sens à des algorithmes opératoires. D'autres que nous indiquerons au fil de l'analyse de la mise en œuvre par les enseignantes influent aussi sur l'avancée chronogénétique du savoir. Par exemple, l'autorisation ou non de l'emploi du matériel (boite et cubes, mais aussi le dessin), la durée de recherche individuelle accordée aux élèves.

2. Les enjeux de savoir au cœur de l'ingénierie

2.1. Un premier enjeu de savoir central au cœur de l'ingénierie : donner du sens à la soustraction

Un des enjeux de savoir visés par l'ingénierie relève selon nous de la distinction princeps entre différence et soustraction. Rappelons que les trois premières étapes donnent sens à la notion de différence, celle-ci pouvant être déterminée par des procédures intellectuelles comme empiriques. Les trois suivantes construisent des techniques opératoires pour calculer cette différence.

Poursuivant l'analyse épistémique des éléments-clés de l'ingénierie broussaldienne, nous pointons ci-après deux traits saillants des enjeux de savoirs liés à la construction par les élèves du sens de cette distinction : la construction de la preuve d'une différence selon deux points de vue, l'un s'appuyant sur la définition mathématique d'une différence, l'autre sur la somme des cardinaux des deux parties pour obtenir le cardinal du tout.

L'étape 2 de l'ingénierie didactique est dévolue à l'installation de l'addition comme « moyen de prouver un résultat » (Berté, p. 13), élément du milieu didactique nécessaire à la poursuite de l'ingénierie didactique. (*cf.* section 1.1 du titre 1 de ce chapitre)

a. La preuve d'un résultat comme le corollaire de la définition d'une différence

Nous observons que tous les problèmes proposés dans cette étape sauf un relèvent de la catégorie e t – E. Nous en extrayons un, ci-dessous :

Dans la boite, j'ai 45 cubes, j'en sors 18. Combien en reste-t-il ?

La formulation de ce problème permet de rendre plus aisée la simulation de la preuve d'un résultat : « il s'agit, à partir du nombre supposé de cubes restant dans la boite que l'élève ajoute en comptant un à un les cubes sortis pour voir si le nombre de cubes obtenus correspond au nombre de cubes qu'il y avait au départ » (Berté, 1996, p.13). Cette manipulation de cubes simule implicitement la définition mathématique de la différence de deux nombres : « c'est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand » (*ibid*., p.49).

Il n'est parfois pas nécessaire d'aller au bout de la procédure de preuve pour montrer qu'un résultat n'est pas solution : supérieur à la quantité initiale de cubes, ou tel que le chiffre des unités de la somme diffère du celui de la quantité initiale. Nous considérons ces déductions comme des niveaux de preuve d'un résultat. Le tableau ci-après pointe les différents niveaux de preuve susceptibles d'émerger. Nous les avons indexés NP0, NP1, NP2 …NP6 de façon à pouvoir nous y référer plus facilement lors de l'analyse didactique des séances.

NP0	Vérification empirique : simulation avec la boite et les cubes
NP1	La différence doit être inférieure au 1er terme de la soustraction (si le résultat est supérieur au premier terme de la soustraction, alors la réponse proposée ne peut être solution)
NP2	a et b étant deux nombres entiers tels que $a > b$, $a - b = d \Leftrightarrow d + b = a$
NP3	Vérification par estimation d'un ordre de grandeur de la différence
NP4	Vérification par détermination d'un ordre de grandeur à la dizaine près de la différence.
NP5	Vérification du chiffre des unités du résultat à partir des chiffres des unités des deux termes de la soustraction (si le chiffre des unités de la réponse ajouté à celui du nombre retranché est différent de celui du tout, alors la réponse proposée ne peut être solution et il est inutile de poursuivre la vérification)

Tableau 8 : niveaux de preuve d'un résultat à un problème soustractif

b. La réversibilité des deux opérations pour prouver un résultat

Le dernier problème de l'étape 2 propose un problème de la catégorie des combinaisons e E e.

Dans une boite, il y a 75 cubes, des bleus et des rouges. 38 sont bleus. Combien y a t-il de cubes rouges ?

Ce problème peut être lu en terme de « parties-tout » : une partie des cubes sont rouges et l'autre bleus et schématisée comme ci-après :

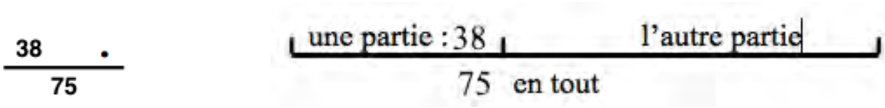


Figure 16 : exemple de schématisation d'un problème (Leçon 5, problème 2)

La schématisation permet ainsi d'approcher la notion de preuve, en s'appuyant sur l'équivalence des égalités d = 75 – 38, 75 = 38 + d et 75 – d = 38. La preuve peut ainsi être exprimée comme vérifier « que le résultat ajouté au plus petit est égal au grand » mais aussi comme vérifier que « la somme des deux plus petits nombres est égale au plus grand ». La construction de la différence comme « le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand » permet d'outiller les élèves d'une première technique opératoire pour déterminer : l'addition lacunaire. Nous poursuivons en développant une brève revue des principales techniques opératoires enseignées à l'école élémentaire.

2.2. Deuxième enjeu de savoir : un algorithme de la soustraction

L'ingénierie didactique a pour objectif de donner sens à un algorithme de la soustraction. Pour autant, elle ne vise pas un algorithme en particulier : la leçon 13 initie la technique de l'addition lacunaire tandis que la leçon 15 laisse le choix à l'enseignant de se diriger vers l'addition par conservation des écarts ou par échange (appelée aussi technique anglo-saxonne).

Nous reprenons ci-dessous les techniques opératoires de la soustraction, en faisant directement référence à un ouvrage auquel nous avons collaboré (Bergeaut *et al.*, 2017).

- **la technique par recherche du complément : l'addition lacunaire**

La technique par « recherche du complément » repose sur l'équivalence entre soustraction et addition lacunaire. Le calcul de 84 – 39 = ••• est équivalent au calcul de 39 + ••• = 84, c'est donc le calcul de cette addition à trou qui va être réalisé.

Le seul nombre à un chiffre qui ajouté à 9 donne un chiffre des unités égal à 4 est 5 car 9 + 5 = 14. On obtient donc 5 pour chiffre des unités du nombre recherché, il nous faut écrire 1 comme retenue au rang des dizaines et poursuivre le calcul en se posant la question : quel nombre à un chiffre ajouté à 4 donne 8 ? La réponse est 4. Le nombre recherché est bien alors 45.

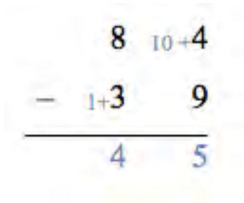
$$\begin{array}{rcc} & ^{①} & \\ & 3 & 9 \\ + & 4 & 5 \\ \hline & 8 & 4 \end{array}$$

Cette technique présente l'avantage de n'être qu'une disposition particulière de la technique de l'addition, elle suppose donc la maîtrise de celle-ci mais aussi la compréhension de l'équivalence de résultats entre un calcul de différence et un calcul de complément, de façon à pouvoir poser une soustraction tout en « pensant » une addition à trou.

- La technique appelée par « conservation des écarts »

Cette technique dite classique (car très souvent enseignée en France à l'école et au collège) repose sur une propriété de la soustraction, c'est-à-dire l'invariance d'une différence : la différence entre deux nombres ne change pas si on ajoute ou soustrait le même nombre aux deux termes de la différence.

Ici pour notre exemple, le savoir en jeu est illustré par l'égalité : 84 – 39 = (84 + 10) – (39 + 10). Le 10 ajouté à 84 est ajouté au chiffre des unités, alors que le 10 ajouté à 39 est transformé en une dizaine ajoutée au chiffre des dizaines.



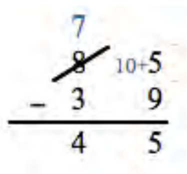
De 5 unités on ne peut soustraire 8 unités, on ajoute donc 10 unités au premier terme et une dizaine au second ce qui permet successivement de calculer 14 - 9 puis 8 – 4 et d'obtenir au final le résultat 45. Les retenues n'ont donc pas le même statut en haut et en bas de l'opération, le « 1 » à côté du 5 représente une dizaine et non une unité simple tandis que le « 1 » à côté du 6 est ajouté à 6, il faudra donc retrancher 7 dizaines.

Plus complexe à comprendre, cette technique sollicite des connaissances théoriques que les élèves n'ont pas à l'école primaire (l'invariance d'une différence). Elle demeure pourtant en usage au primaire, sa justification étant d'ordre sociétal.

- La technique « anglo-saxonne »

Cette technique, appelée aussi « par échange » ou encore « par cassage » repose sur les propriétés du système de numération décimal.

Ainsi, pour calculer 84 – 45, on casse une dizaine en unités, ce qui revient à soustraire 45 au nombre composé de 7 dizaines et 14 unités.



Cette technique s'appuie sur les seules connaissances des élèves à propos de la numération.

2.3. Pour conclure sur les enjeux de savoir et leurs modalités de mise en œuvre telle que par l'ingénierie broussaldienne.

Nous résumons dans le tableau ci-après la manière dont les concepteurs de l'ingénierie de la soustraction proposent sa mise en œuvre didactique (Berté, 1996) : la thématique « Reconnaitre et résoudre des problèmes soustractifs » se déploie, comme nous l'avons dans les sections précédentes, sur un long temps didactique de 17 leçons et 6 étapes. Tout au long de ces étapes, nous identifions (colonne de gauche), les phases didactiques qui président à chacune des étapes. La visée est de caractériser pour chacune des étapes :

- la fonction principale en terme de phase didactique (sachant que bien évidemment : action, formulation, validation, institutionnalisation, sont souvent articulées dans les mises en œuvre).
- les enjeux didactiques liés à l'étape
- les catégories de problèmes au sens de Vergnaud
- le matériel mis à disposition des élèves
- le statut de la preuve qui est visée.

Ce tableau nous permettra dans le dernier chapitre des résultats sur la comparaison du fonctionnement des trois systèmes didactiques observés de situer quels sont les écarts à l'ingénierie broussaldienne et de pointer d'éventuelles dimensions génériques ou spécifiques entre les pratiques observées.

<table>
<tr><th colspan="7">Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">Identifier et déterminer une différence</th><th>Écrire une différence sous la forme a – b</th><th colspan="3">Calculer une différence</th></tr>
<tr><th>Étapes</th><th>Étape 1 : 2 leçons, 1 atelier, 1 contrôle</th><th>Étape 2 : 3 leçons</th><th>Étape 3 : 3 leçons, 1 atelier, 1 séance d'exercices</th><th>Étape 4 : 3 leçons</th><th>Étape 5 : 2 leçons</th><th>Étape 6 : 2 leçons</th></tr>
<tr><td>Phases didactiques[67]</td><td>action</td><td>formulation / validation</td><td>formulation / institutionnalisation</td><td>action / formulation</td><td>formulation</td><td>formulation institutionnalisation</td></tr>
<tr><td>Enjeux</td><td>• Dévolution du projet d'apprentissage relatif à la soustraction
• Résoudre des problèmes appartenant au champ additif</td><td>• Mettre en place l'addition comme moyen de preuve

Le pari, apprêt didactique, pour faire émerger la preuve d'un résultat d'un problème soustractif.</td><td>• Distinguer les problèmes soustractifs des problèmes additifs
• Coder l'addition et la soustraction : « + » et « - », « = ».
• Développer des techniques de calcul mental pour soustractions simples (sans retenue)
• Écrire un nombre sous formes additives a + b ou a – b</td><td>• Identifier et formuler les stratégies pour résoudre des problèmes soustractifs
• effectuer par essais successifs des soustractions complexes (avec retenue)
• réduire le nombre d'essais</td><td>• déterminer un ordre de grandeur de la solution à la dizaine près
• déterminer la solution par la méthode fausse position (obtenir la solution en 2 coups)
• Addition lacunaire (obtenir la solution en 1 coup)</td><td>• Distinguer les calculs pouvant être faits mentalement des autres
• Choisir la méthode de calcul la plus facile
• Effectuer une soustraction à retenue.</td></tr>
<tr><td>Catégories de problèmes</td><td>e T+ e   e t- E
e E e</td><td>e t- E
e E e</td><td>e t- E   E t+ e
e E e   e e E
e e | C+   t t T</td><td>e t- E   E t+ e
e E e</td><td>e t- E
e E e
e e | C+</td><td>e t- E   e t+ E   e T e
e e | C+</td></tr>
<tr><td>matériel</td><td>• Boite et multicubes agencés en unités et dizaines
• Problèmes photocopiés
• Ardoises</td><td>• Boite (avec couvercle) et multicubes agencés en dizaine et cubes-unité
• Grande feuille de papier
• Problèmes photocopiés
• Ardoises</td><td>• Boite et multicubes
• agencés en centaines, dizaines, unités
• Calculatrice
• Problèmes photocopiés,
• Ardoise
• ¼ de feuille blanche</td><td>• Boite et multicubes si nécessaires
• Ardoise</td><td>• Affiches des procédures des Schtroumpfs
• Problèmes photocopiés
• ardoises,</td><td>• Fiches photocopiées de soustractions en ligne
• Problèmes photocopiés
• Ardoise
• ¼ de feuille blanche</td></tr>
<tr><td>Vérification / preuve</td><td>• Vérification empirique par ouverture de la boite puis comptage des cubes restants</td><td>• Vérification par surcomptage des cubes un à un
• Vérification sans manipulation de cubes
• preuve par addition</td><td colspan="4">• preuve par addition</td></tr>
</table>

Tableau de synthèse 1 : ingénierie didactique telle que prévue initialement par ses concepteurs

[67] Nous indiquons ici la ou les phases déterminantes de l'étape (au sens de la TSD), bien que les autres phases y soient aussi entrelacées.

3. Ressources et contraintes induites pour les acteurs dans la mise en œuvre de l'ingénierie

Comme tout dispositif didactique expérimental, l'ingénierie « la soustraction à l'école élémentaire » dès lors qu'elle est mise en œuvre en classe produit en même temps qu'elle offre des ressources aux acteurs, un certain nombre de contraintes vis-à-vis desquelles élèves et professeurs auront à faire face. Nous en anticipons ici quelques-unes en nous appuyant sur les travaux de didactique des mathématiques cités en première partie de ce manuscrit (*cf.* section 2.2.2 du chapitre 1 de la partie 1).

3.1. Du côté des élèves

La littérature didactique et la littérature professionnelle pointent un ensemble de repères permettant de donner du sens à l'activité des élèves et à certaines actions qu'ils produisent habituellement. Nous en rapportons ici les principales sous l'angle des procédures de résolution observables et des conceptions naïves des élèves relativement à deux concepts, celui de la soustraction et celui de l'égalité.

- Les procédures observables des élèves

Il ressort de l'analyse de la littérature un ensemble de procédures classiquement opérées par les élèves confrontés aux problèmes soustractifs. Nous retenons, à la suite de notre revue de questions sur l'enseignement de la soustraction au cycle élémentaire les suivantes (cf. section 2.2.2.1 du chapitre 1 de la partie 1) :

Procédure par…	
décomposition des termes en unités, dizaines, centaines	35 – 24, l'élève effectue 30 – 20 = 10 et 5 – 4 = 1. La réponse est ensuite recomposée 10 + 1 = 11
décomposition du second terme en unités, dizaines, centaines	35 – 24, l'élève effectue 35 – 20 = 10 et 15 – 4 = 11.
compensation	35 – 24, l'élève effectue 35 – 25 = 10 et 10 + 1 = 11.
addition	24 + 10 = 34 et 34 + 1 = 35. La réponse est 10 + 1 = 11

Tableau 9 : procédures correctes observables des élèves

Les travaux de Resnick (1982), Brown et Van Lehn (« repair theory », 1980) nous laissent envisager certaines erreurs :

« Smaller-From-Larger » : L’élève soustrait la plus petite unité à la plus grande.	$\begin{array}{rr} & 4\ \ 1 \\ - & 2\ \ 3 \\ \hline & 2\ \ 2 \end{array}$
« Zero-Instead-Of-Borrow » : L’élève écrit zéro dès lors qu’à un rang donné (ici c’est au rang des unités), le chiffre du second terme est supérieur au chiffre du premier terme	$\begin{array}{rr} & 4\ \ 1 \\ - & 2\ \ 3 \\ \hline & 2\ \ 0 \end{array}$
« 0 – N = N or N – 0 = 0 » L’élève ne convertit pas une dizaine en unités.	$\begin{array}{rr} & 7\ \ 0 \\ - & 2\ \ 3 \\ \hline & 5\ \ 3 \end{array}$ $\begin{array}{rr} & 7\ \ 0 \\ - & 2\ \ 3 \\ \hline & 5\ \ 0 \end{array}$

Tableau 10 : procédures erronées observables des élèves

- Les conceptions naïves des élèves

La plupart des auteurs considèrent que les premières conceptions des élèves relèvent de ces assertions :

- Soustraire, c’est perdre, enlever. La question porte alors sur la partie qui reste (Brown & Van Lehn, 1980 ; De Corte & Verschaffel, 1985 ; Sander, 2008)
- L’égalité est le résultat d’un processus. (Sander, 2008 ; Theis, 2003, 2005)

3.2. Du côté du professeur

Rappelons que dans la perspective broussaldienne, toute ingénierie didactique constitue de prime abord un artefact phénoménotechnique conçu par le chercheur didacticien pour produire des connaissances sur le fonctionnement des systèmes didactiques (Artigue, 1988 ; Brousseau, 1986). Mais au-delà de cette visée de recherche en intelligibilité des pratiques didactiques sous couvert de la TSD, les ingénieries produites et expérimentées au COREM ont aussi pour ambition de proposer des ressources possibles pour l’enseignement des mathématiques à l’école primaire (Bessot, 2011). Cette « ambivalence » de l’artefact phénoménotechnique que constituent les ingénieries didactiques est d’ailleurs bien théorisée par Brousseau (1988, 1989b). Notre recherche de thèse ayant pour ambition de comparer les pratiques didactiques d’enseignantes d’expériences contrastées, confrontées à la mise en œuvre d’une ingénierie didactique dans deux systèmes éducatifs différents (suisse et français), il est important, voire décisif, dans cette section de pointer aussi les contraintes, identifiées par notre analyse épistémique, qui sont susceptibles de peser sur l’action du professeur. Notre problématique de recherche conjecture que relativement aux ressources didactiques que fournit l'ingénierie de la soustraction pour l'école élémentaire, deux niveaux de contraintes peuvent être anticipés :

- celui des attentes et des usages professionnels sédimentés dans les pré-construits institutionnels, tels que mis en évidence dans l'analyse comparative des curriculums officiels (suisse et français) menée dans le chapitre précédent.
- celui de déterminants plus individuels, déjà identifiés par Brousseau (1986) à propos de l'épistémologie professorale, et aujourd'hui discutés, en référence à Sensevy (2007), sous couvert du concept « d'épistémologie pratique du professeur » au sein de notre unité de recherche (Amade-Escot, 2014).

Les propositions de renouvellement des modes d'enseignement de la soustraction proposées par Brousseau nous amènent à considérer que certaines dimensions de l'ingénierie - notamment lors de certains moments-clés supposant de la part des élèves la mise en œuvre de sauts informationnels – pourront entrer en conflit, dans le temps de l'action en classe, avec un « certain nombre d'idées plus ou moins explicites qu'il [le professeur] entretient à propos du savoir lui-même, de la nature foncière de l'apprentissage et de la signification de l'enseignement » (Sensevy, 2007, p. 37). Repérer en quoi l'épistémologie pratique du professeur influence sa mise en œuvre de l'ingénierie didactique, constitue une des visées de notre travail empirique, que nous présentons dans les sections suivantes : c'est-à-dire l'analyse des mises en œuvre observées dans les trois sites.

Titre 2. Analyse des pratiques d'une enseignante chevronnee en Suisse

1. Contexte de l'observation

1.1. Caractéristiques de l'enseignante et de la classe observée

L'enseignante, Pascale, a une vingtaine d'années d'expérience. Durant les dix premières années, elle a occupé un poste au sein d'une équipe pédagogique dans une « école en rénovation ». Enseigner dans cette école nécessitait de travailler en équipe, en collaboration avec les autres enseignants : « *Ce qui était formidable, c'était que tout le monde… il y avait une culture commune. Tout le monde était d'accord à la base sur ce partage de pratiques, et puis quel que soit le nombre d'années d'expérience.* » (Pas-Entr-2014/12/11). Durant cette période, elle a complété sa formation initiale par des apports théoriques : « *On était tous branchés sur le même mode et on faisait venir des gens qui venaient nous parler de la production écrite libre, la production écrite guidée… on lisait des textes en commun. Voilà… On complétait notre savoir-faire par des théories, par des conférences, on allait au GFEN*[68] *en France.* » (*Ibid.*) Aussi déduit-elle de ces premières années d'enseignement une forte influence dans sa pratique enseignante : « *J'ai tellement appris dans cette interaction, que je suis convaincue que c'est dans l'interaction que tu construis.* » (*Ibid.*). Après avoir été formatrice en formation initiale et continue dans le domaine de l'évaluation durant deux ans, elle a intégré le « Réseau maison de petits » et collaboré avec les chercheurs de la FPSE[69] sur plusieurs projets scientifiques. Reconnue par les deux institutions (FPSE et Département de l'Instruction Publique du canton de Genève), elle participe depuis plusieurs années, en tant que formatrice de terrain, à la formation des enseignants du premier degré en accueillant dans sa classe des étudiants se destinant à l'enseignement. Ces éléments nous amènent à considérer Pascale comme une enseignante chevronnée[70].

La classe de Pascale appartient à une école de centre-ville, d'un niveau socio-économique favorisé. Cette classe est un cours à deux degrés : 10 élèves sont en 3P et 11

[68] GFEN : Groupe Français d'Éducation Nouvelle
[69] FPSE : Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève
[70] Pascale est une enseignante chevronnée, dont les implications en formation d'enseignants sont assez semblables à celle de l'enseignante chevronnée française (voir section 3, suivante).

élèves sont en 4P. Nous observons le groupe en 4P. Citant l'enseignante, ce groupe est composé d'élèves « *encore trop jeunes pour dire* [classe] *homogène* » (Pas-Entr-2016/08/04). Pour les raisons indiquées dans la section méthode de la première partie de ce manuscrit, les données vidéographiques relatives à ce site ne sont pas toutes disponibles. Lorsque c'était le cas (voir tableau infra), nous avons utilisé les traces disponibles (entretiens rétrospectifs que nous avons conduits avec Pascale, documents recueillis lors des observations : cahiers d'élèves, notes de cours, etc. …).

1.2. Caractéristiques du fonctionnement pédagogique de la classe

L'observation des enregistrements vidéo disponibles met en évidence une première caractéristique des formats pédagogiques utilisée par Pascale : de nombreux allers-retours entre espace privé (le bureau de chacun) et espace public (l'espace 'réunion' devant le tableau). L'enseignante alterne le travail individuel et le travail collectif. L'espace réunion est le lieu privilégié de l'apprentissage : « *ma réunion c'est là que tout se passe. […] Tout se fait au moment de la discussion ensemble. L'activité en soi, les interactions, les réponses, les hypothèses, la recherche, c'est en réunion* » (Pas-Entr-2016/05/03). Elle le considère comme un lieu d'échanges lui permettant de réguler « *car il s'y passe beaucoup d'interactions entre moi et eux mais aussi entre eux. C'est l'espace des consignes, des leçons en interactions, des restitutions suite à des recherches, des corrections collectives…* » (Pas-Entr-2016/08/04). L'espace privé est réservé au travail individuel : « *Quand ils vont à leur place, c'est pour faire l'exercice. Ils sont déjà dans l'exécution, en fait.* » (Pas-Entr-2016/05/03). La configuration de la classe, que nous présentons ci-dessous, lui permet ainsi « *un dosage entre des moments collectifs, individuels, en groupe.* » (Pas-Entr-2016/08/04).

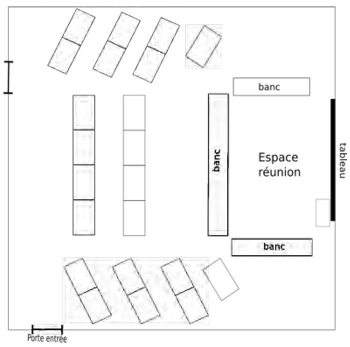


Figure 17 : organisation spatiale de la classe de Pascale

Une deuxième caractéristique est l'importance donnée à l'oral. Relativement à l'activité mathématique, Pascale déclare avoir « *pour habitude de vraiment tout verbaliser : 'On s'occupe de ça, oui alors ça, c'est quoi ? Est-ce que c'est l'unité ? Est-ce que c'est la* *dizaine ? ', pour que derrière les mots il y ait une représentation et puis qu'on sache de quoi on parle, en fait.* » (Pas-Entr-2016/05/03), ajoutant plus tard que « *lorsque tu verbalises la consigne, tu poses un vocabulaire mathématique. Et je pars du principe que vu que tu l'as verbalisé auparavant, eh bien après c'est plus facile* » (*Ibid*.).

Une troisième caractéristique est l'utilisation régulière d'un fichier issu de la pédagogie Freinet : « *Le principe de ce fichier, je l'ai depuis 25 ans, et je l'utilise toujours autant parce que je trouve vraiment intéressant de demander à l'élève de comprendre ce qu'il doit faire dans l'exercice, d'observer puis de prendre des initiatives. 'Ah bien là peut-être que si je comptais je pourrais trouver quelque chose', oui, de se poser des questions, de trouver une méthode, d'anticiper, de chercher, puis pas juste être plat 'ah… elle me donne une consigne et puis j'applique'* » (Pas-Entr-2016/05/03). Pascale considère que ce fichier développe chez l'élève « *une démarche de petit chercheur où il doit formuler des hypothèses pour comprendre ce que l'on attend de lui et pour pouvoir ensuite faire l'exercice qui est derrière.* » (*Ibid*.) Par ailleurs, ce fichier est un outil de régulation lui permettant d'installer ou de consolider des savoirs qu'elle juge nécessaires au bon déroulement de l'ingénierie : « *pendant les périodes de régulation, alors là, je choisissais de manière spécifique ce que je voulais travailler avec eux et puis je sortais les fiches que je voulais.* » (*Ibid*.)

Selon Pascale, « *ici* [à Genève], *on travaille plus sur des résolutions de problèmes, donner du sens, voir comment l'enfant réfléchit…* » (Pas-Entr-2016/05/03). La résolution de problème[71] est « *une porte d'entrée qui met l'élève en recherche ou interactions avec ses camarades.* » (Pas-Entr-2016/06/04). Ajoutant « *j'essaie de leur faire construire une démarche ou méthode pour argumenter leur solution.* » (*Ibid*.), elle dévoile une empreinte des traditions d'enseignement en Suisse que nous avions identifié lors de l'analyse du discours institutionnel : l'enseignant incite l'élève, par les situations qu'il propose, à construire par lui-même les savoirs.

Dans les sections qui suivent, nous présentons les descriptions synoptiques des différentes étapes mises en place dans la classe de Pascale, au regard de l'ingénierie

[71] Dans la suite du manuscrit, et pour chacun des cas, nous utiliserons des formulations différentes pour rendre compte de ce qui relève de « la résolution de problème » en tant que procédure cognitive en référence aux préconisations institutionnelles, de ce qui relève des manières de résoudre les problèmes soustractifs tels que proposés par l'ingénierie. Nous utiliserons pour ce faire le singulier (« résolution de problème ») lorsqu'il s'agira de la dimension générique telle que préconisée dans les pré-construits ou valorisées par les enseignantes ; nous utiliserons le pluriel (« Résolution des problèmes soustractifs ») pour référer à ce qui dans les observations, ou les discours des enseignantes renvoient à ce qu'elle font, visent, au regard des problèmes arithmétiques proposés aux élèves lors des mises en œuvre. Bien sur ce choix de formulation ne préjuge pas de la possibilité pour les élèves de construire une compétence générique de « résolution de problème » lors des apprentissages mathématiques qui leur sont proposés. L'intention rédactionnelle est ici de bien préciser à quoi se réfère la locution au singulier ou au pluriel.

didactique broussaldienne telle qu'elle est présentée dans le document qui lui a été délivré[72]. Nous faisons ensuite émerger les traits caractéristiques du déroulement de la mise en œuvre dans ce système didactique.

2. Descriptions synoptiques des différentes étapes dans la classe de Pascale

Rappelons que nous procédons à l'analyse de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique en adoptant une focale mésoscopique (celle de la séance) pour chacune des étapes de façon à obtenir *in fine*, par agrégation et identification des récurrences observées, une analyse macrodidactique. Par ailleurs, et comme nous l'indiquions dans la section méthode (*cf.* section 3.3.1.2.1 du chapitre 3 de la partie 1), seules certaines étapes de l'ingénierie didactique feront l'objet d'une analyse. Il s'agit des étapes 1, 2, 4 et 5. Les étapes 3 et 6 relevant prioritairement d'un travail de « la technique » sont apparues, à l'issue d'un premier regard, non discriminantes entre les trois sites et n'ont donc pas été analysées. Ce choix, compte tenu du déploiement temporel de mise en œuvre de l'ingénierie dans les différents sites, a aussi pour effet de limiter la taille (en nombre de pages) de ce chapitre des résultats.

2.1. Modalités temporelles de mise en œuvre de l'ingénierie didactique

La figure ci-après décrit les ajustements temporels adoptés par l'enseignante chevronnée suisse au regard de la structuration temporelle initiale de l'ingénierie didactique telle que décrite dans le document de Berté (1996). Le tableau de gauche indique le déroulé des leçons de l'ingénierie présentée dans ces documents. Le tableau de droite montre le déroulé des séances observées tel que mises en œuvre par Pascale. Afin de faciliter la lecture, nous avons utilisé un jeu de couleurs, blanc et bleu, pour délimiter chaque étape, telle que définie par l'ingénierie initiale. Par convention et dans tout le manuscrit, nous utilisons les termes « leçon » ou « ateliers » pour désigner l'unité d'enseignement tel que décrite, selon ces termes mêmes, dans le document de référence (Berté, 1996). Chaque description de « leçon » dans ce document propose le texte du savoir à enseigner relativement au processus de transposition didactique retenu par l'ingénierie broussaldienne. En tant que description du texte de savoir, le terme de « leçon » renvoie à sa définition académique[73]. Nous utilisons par contraste, le terme de « séance » pour référer à l'unité temporelle, dont nous indiquons la durée (*cf.* tableau ci-après), mise en œuvre dans la classe de chaque enseignante observée.

[72] Rappelons que ce document provient d'une recherche collaborative INRP/école Saint Charles effectuée sous la direction de Serge Quilio. Ce document reprend tout en les commentant le script des étapes de l'ingénierie didactique du document de Berté (1996).

[73] Au sens ancien établi en 1798 par l'Académie Française « se dit figurément de toute sorte d'instruction que reçoit une personne, ou pour sa propre conduite, ou pour traiter de quelque affaire ».

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique « la soustraction à l'école élémentaire »	
	Leçons	
1	Dévoluer l'apprentissage de la soustraction	Leçon 1
		Leçon 2
		Ateliers de soustraction
		Contrôle 1
2	L'addition comme moyen de preuve	Leçon 3
		Leçon 4
		Leçon 5
3	Sens et vocabulaire de la soustraction Introduction des signes « + » et « - » Calcul mental	Leçon 6 et contrôle 2
		Leçon 7 et contrôle 3
		Ateliers jeu de la boîte
		Exercices sur les écritures
		Leçon 8
4	La stratégie des essais	Leçon 9
		Leçon 10
		Leçon 11
5	Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs	Leçon 12
		Leçon 13 et contrôle 4
6	La soustraction	Leçon 14 et contrôle 5
		Leçon 15

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique implémentée par Pascale	
	Séances	
1	Séance 1	37 min
	Séance 2	60 min
	Séance 3	n. d.
	Séance 4	43 min
	Séance 5	n. d.
2	Séance 6	56 min
	Séance 7	n. d.
	Séance 8	1h16min
3	Séance 9	1h19min
	Séance 10	n. d.
	Séance 11	n. d.
	Séance 12	1h15min
4	Séance 13	51 min
	Séance 14	1h 04 min
	Séance 15	1 h
5	Séance 16	57 min
	Séance 17	37 min

n. d. : vidéos non disponibles

Tableau 11 : vue synoptique des séances mises en œuvre dans la classe de Pascale au regard de l'ingénierie initiale

Nous observons que si l'ingénierie didactique initiale est structurée en quinze leçons, deux ateliers et une séance d'exercices sur des écritures, l'enseignante l'adapte en dix-sept séances. Les séances se déroulent sur trois mois. Deux étapes ont fait l'objet d'aménagements dans le nombre de séances : la première étape relative à la « dévolution de l'apprentissage de la soustraction » et à la troisième étape plus technique « sens et vocabulaire de la soustraction ; introductions de signes + et - ; calcul mental ». Précisons que la mise en œuvre de cette ingénierie a été précédée d'une séance de dénombrement d'une collection importante de cubes (plus de 500). L'objectif était d'amener les élèves à regrouper les cubes en dizaines et ainsi à utiliser le système décimal pour dénombrer.

2.2. Analyse des étapes de l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Pascale

Rappelons (*cf.* Méthodologie) que pour dégager les traits caractéristiques de chacune des étapes de l'ingénierie didactique, nous débutons par une brève analyse de chacune des séances à la lumière des enjeux de chaque étape de l'ingénierie didactique (*cf.* section 1 de ce chapitre). Nous utilisons pour ce faire, les synopsis des séances qui sont les premiers outils de condensations des données disponibles. Ils permettent de mettre en évidence les principales caractéristiques du système didactique : quels sont les éléments successivement modifiés dans le milieu didactique, par qui, et comment ? Nous inspirant de la méthodologie de Leutenegger (2009) nous présentons les synopsis des séances, découpés sur une échelle de temps, selon :

(i) les modalités de travail : individuel, en binômes ou en collectif,

(ii) les tâches données aux élèves : tâche de modélisation de la situation, de résolution des problèmes soustractifs, ou de vérification de leur solution,

(iii) le discours de l'enseignante : questions, consignes, remarques,

(iv) les procédures de résolution des élèves.

2.2.1. Analyse de l'étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »

Cette étape est mise en œuvre par Pascale selon cinq séances. L'enjeu principal de cette étape est de « transmettre aux élèves le projet d'apprendre à résoudre les problèmes de soustraction et de leur donner la possibilité de les modéliser avec une boite et des cubes qui produisent la situation fondamentale » (Berté, p.3). Il s'agit de laisser les élèves résoudre les problèmes selon leurs propres procédures pour ensuite leur faire « comprendre que l'on peut vérifier son résultat avec la boîte » (*Ibid*.). Notre objectif est de voir comment les élèves s'emparent des problèmes et comment ils les résolvent : les élèvent s'engagent-ils dans la résolution des problèmes ? Utilisent-ils le matériel et comment ? Quelles procédures numériques mettent-ils en œuvre ?

2.2.1.1. Analyse mésodidactique des séances.

Dans cette étape, nous cherchons à suivre d'une part l'évolution de l'appropriation par les élèves de l'outil {boite ; cubes} pour simuler ou pour vérifier et d'autre part les procédures des élèves. Les synopsis condensés ont pour but de « relater synthétiquement » le déroulement des séances de façon à pouvoir ensuite mener une brève interprétation. Précisons que les extraits que nous présentons ont pour objectifs d'illustrer notre propos. Pour faciliter la lecture, nous indiquons entre parenthèses le repère temporel (min) de la partie de séance analysée, ce repère, indiqué sur le synopsis condensé de la séance, permet ainsi au lecteur d'identifier la situation et/ou le problème mathématique proposés aux élèves. Ce repère facilite par ailleurs pour le lecteur les aller-retour entre le texte et le synopsis condensé de chaque séance et ainsi de situer le propos interprétatif dans la dynamique interne à la séance.

2.2.1.1.1. Séance 1

Le synopsis (que nous présentons en page suivante) est un condensé du déroulement de la séance. Remarquons que cette séance ne dure que 37 minutes, ce qui s'explique par le fait que les deux derniers problèmes prévus dans le texte de l'ingénierie ne sont pas proposés aux élèves.

– Un premier constat porte sur les places respectives de l'enseignante et des élèves vis-à-vis de la simulation du premier problème dont nous rappelons l'énoncé :

Dans un parking il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?

Le texte de l'ingénierie indique précisément le topos de l'enseignant : c'est à lui de prendre en charge la simulation du problème en présentant la boîte (un garage) et les cubes (des voitures), en en mettant 14 dans la boîte, en complétant jusqu'à 32 pour ensuite questionner les élèves sur le nombre de cubes à rajouter. Pourtant, si l'enseignante suit dans un premier temps exactement les consignes du texte de l'ingénierie (affiche placardée au tableau, texte lu à deux reprises, attention portée sur le mot « encore », temps de recherche limité), nous pointons une bifurcation dès que la simulation est mise en œuvre. Bien qu'ayant placé 14 cubes dans la boîte, une élève lui propose une autre simulation que celle prévue : au lieu de mettre encore d'autres cubes dans la boîte, Diane lui dicte de mettre dès le départ 32 cubes pour ensuite par décomptage, enlever jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 14 cubes dans la boîte. Nous présentons ici l'échange entre le professeur et cette élève (min. 9 :36).

P : *Y a trente-deux places en tout. Alors qu'est-ce que je peux faire avec mes quatorze voitures parquées… en sachant que je, il faut que je cherche combien est-ce que je dois mettre* ***encore*** *de voitures dans… mon garage pour avoir mes trente-deux places occupées. Qu'est-ce que, comment je peux faire ? Diane.*

Diane : *Tu peux faire trente-deux. Tu comptes trente-deux jusqu'à quatorze et quand t'arrives jusqu'à quatorze… Et quand t'arrives à quatorze, du fait que tous les nombres sur ta feuille (xxx) tu comptes tous les nombres et puis après ça fait le résultat.*

[…]

P : *D'accord. Alors je vais enlever jusqu'à quatorze. Alors j'enlève pour pas qu'on se mélange (enlève les cubes sur la table) alors on va compter alors en reculant (sort au fur et à mesure les cubes de la boite, les élèves comptent avec elle) alors trente-et-un trente vingt-neuf vingt-huit vingt-sept vingt-six vingt-cinq vingt -quatre vingt-trois vingt-deux vingt-et-un vingt/dix -neuf dix-huit dix-sept seize quinze quatorze // et puis ?*

Diane : *Après tu comptes les cubes qu'il y a ici*

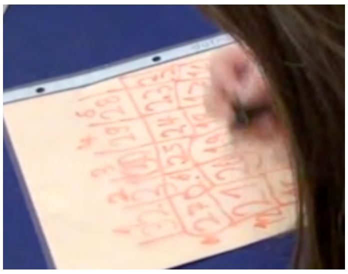
Extrait 49 : Pascale – séance 1 – modélisation du problème 1 – min 9 :36

Temps	Moda-lité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves.
0 :00			Présentation de la séance : résoudre des problèmes	
0 :40	**Problème 1 :** Dans un parking il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?			
	Col.	Lecture du problème	P fait lire le problème par deux élèves : Maéva puis Lara	
			P attire l'attention sur un mot souligné : « encore »	
	Ind.	Recherche d'une solution	Distribution d'une fourre* et d'un stylo à chaque élève. P indique un **temps de recherche : 2 min.** *une fourre est une pochette plastique transparente. En y glissant une feuille de papier, on obtient une ardoise effaçable	Procédures : **sur-comptage** en comptant sur les doigts ; écriture « 14 + 32 » ; écriture « 32 – 14 = 17 » ; **tableau de nombres** ; **décomptage** ; **addition** « 14 + 18 = 32 » réponse numérique brute : (18)
4 :58	Col.	Simulation du problème	Réunion des élèves devant le tableau, puis recensement des réponses.	Réponses des élèves : 17 / 18 / ne sait pas
6 :34			P fait relire le problème phrase par phrase et s'assure de la compréhension du problème	
7 :30			P présente le matériel puis simule le problème : elle met un à un 14 cubes dans la boite. *« Qu'est-ce que je peux faire maintenant pour dire combien est-ce qu'il reste encore de places dans le parking, pour qu'il soit complètement plein ? »*	
			P : « *qu'est-ce que je cherche ? […] Qu'est-ce qu'il y a dans la boite ?* »	Les élèves repèrent des données du problème.
9 :36			P : « *combien est-ce que je dois mettre **encore*** **[insistance sur encore]** *de voitures dans… mon garage pour avoir mes trente-deux places occupées ?* » P suit Diane en mettant 32 cubes dans la boite puis sort des cubes un à un en décomptant jusqu'à 14.	Diane : mettre 32 cubes puis de **décompter** jusqu'à 14. Les élèves comptent jusqu'à 32, puis décomptent jusqu'à 14.
11 :22		Résolution	P laisse discuter puis désigne Jules pour compter les cubes à côté de la boite. (18) « *Alors c'est quoi la réponse ?* » Retour sur les nombres en jeu dans le problème. « *où sont les cubes dont on cherche le nombre ?* » « Que représentent les 14 cubes ? »	**Erreur de dénombrement** des sous-collections. Les élèves sont partagés puis se rangent à l'avis de Diane.
16 :40	**Devinette 1 :** Il y a 16 cubes dans la boite. L'enseignante ne le dit pas, remue la boite et demande : « *j'ai des cubes dans ma boite. Combien ai-je de cubes dans ma boite ?* »			
	Ind.	Recherche	P : « *Est-ce que je peux savoir combien j'ai de cubes dans ma boite ?* »	Différentes réponses : 38 / 32 /15 / 14 / 20 /
	Col.	Résoudre	P : « *Alors comment faire pour savoir exactement ?* » Ouverture de la boite et comptage. « *Qui a trouvé ?* »	Réponse de la plupart : essayer de donner une valeur la plus proche possible. Barnabé : « *j'étais proche !* »
19 :35	**Devinette 2 :** il y a 16 cubes dans la boite. L'enseignante en enlève une poignée et demande : « combien en ai-je enlevé ? »			
	Ind.	Recherche	La boite est transparente…	Trop facile ! Les élèves ont compté les cubes…
			P change la boite pour une boite opaque et repose la devinette	Réponses 5 / 6 / 7 /13
		Résoudre	« *Comment est-ce que je peux savoir la réponse ?* »	Es « en comptant » dans la boite.
22 :51	**Problème 4 :** Alors y a seize cubes dans ma boite j'en enlève… Cette fois-ci je vous dis que j'en enlève (P prend des cubes) j'en enlève huit. Combien j'ai de cubes dans ma boite ?			
23 :37	Ind.	Comptage des cubes	P : « *comment je fais pour savoir ?* » P ne demande pas les procédures utilisées : la vérification se fait en comptant dans la boite	« *En comptant !* » écriture de **la suite des nombres** à rebours en partant de 16 / **Comptage sur les doigts** /
24 :59	**Problème 5 :** « Cette fois-ci je prends mes seize cubes. Hein je les ai mis dans mes deux mains et j'en pose un deux trois quatre cinq. Combien j'ai de cubes dans mes mains ?			
	Ind.	Recherche, puis comptage	Demande à Chloé de venir compter les cubes qui étaient dans sa main.	Réponses : 11 / 8
	Col.		[montrant les 11 cubes] « *Alors il faut combien de cubes pour qu'il y en ai **encore** seize ?* » […] [prenant la boite dans ses bras] « *Comment est-ce que je pourrai vérifier que c'est juste ? Combien j'ai de cubes en tout ?* »	Recherche du **complément à 16** / appui sur la **numération :** il faut cinq **unités** de plus /
30 :13	**Pour le bilan :** « Alors, qu'est-ce qu'on a appris ce matin ? »			
	Col.		P reprend les propos des élèves : « *je vous ai dit vous avez **quelques minutes pour compter, quelques minutes pour résoudre le problème**, donc on va continuer à faire des mathématiques une prochaine fois et pour pouvoir résoudre nos problèmes mathématiques on utilisera une boite et des cubes. Hein. Comme outils, comme moyens pour essayer de trouver des solutions.* »	Rép. : « à compter **plus rapidement** » « résoudre des problèmes » « à **travailler en vitesse** »
37 :00	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 1 : séance 1, site Pascale (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Nous faisons l’hypothèse qu’en questionnant les élèves, l’enseignante active un contrat didactique habituel, reconnu des élèves qui est de les laisser expérimenter eux-mêmes la situation. Cette hypothèse est confortée par les propos de l’enseignante : « *pendant très longtemps, tu leur demandes de résoudre les problèmes* ***comme ils veulent*** […] *Je pars du principe que ce qui compte ce n’est pas le résultat, mais la démarche. C’est comment tu arrives au résultat, c’est toute la réflexion et le cheminement qui est important.* » (Pas-Entr-2016/05/03).

- Découlant de cette première observation, il ressort que la variable didactique relative au matériel {boite – cubes} n’est pas utilisée que pour vérifier une réponse. L’interaction rapportée précédemment, montre que le matériel a bien permis de dévoluer aux élèves la situation, mais en élargissant significativement l’enjeu de savoir de cette dévolution par rapport à l’ingénierie : Pascale laisse prendre aux élèves la responsabilité de bout en bout, c’est-à-dire de la modélisation jusqu’à la vérification de la situation.
- L’analyse du film vidéo permet de repérer les procédures engagées par les élèves. Si la majorité des élèves répondent par un nombre sans autre explication, peu d’élèves dessinent. La plupart convoquent le nombre : certains sur-comptent en s’aidant des doigts, d’autres effectuent une opération, d’autres encore utilisent un tableau de nombres. Nous illustrons ci-dessous la procédure de Diane (capture vidéo, min 9 :36), que nous transcrivons à côté.



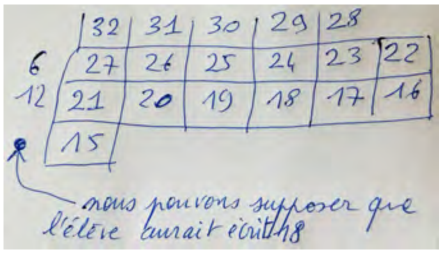


Figure 18 : procédure d’une élève pour la résolution du premier problème

Cette procédure, qui amène à la solution, est en cohérence avec la simulation proposée lors du regroupement collectif (extrait 1, supra) : après avoir écrit la suite des nombres « à reculons, à partir de 32 jusqu’à 15 », Diane dénombre la suite des nombres.

- Nous observons que Pascale modifie sensiblement (nous faisons pour le moment l’hypothèse que cela est à son insu) la structure d’un énoncé. (min 24:59) Ainsi, alors que le « jeu 3 » relève de la catégorie des transformations, Pascale transforme le problème en faisant porter la question non plus sur la valeur de la transformation, mais sur la valeur de l'état final, ce qui maintient les élèves dans la recherche d'un reste et non d'un complément.

- Enfin, il ressort de l'analyse du synopsis, l'hypothèse (encore à vérifier) d'un contrat didactique pérenne se rendant visible au travers de la situation des deux devinettes (min 16 :40 ; min 19 :35). Réagissant au contrat selon lesquels « si la maitresse donne un problème à résoudre, il y a forcément une réponse », les élèves proposent tous une réponse numérique. Ne voulant pas s'appesantir, l'enseignante clôt la discussion par « *Moi je pense que ça aurait été un coup de chance de dire le nombre exact parce que tu dis au hasard.* » (Pas-S1-22 :19)

2.2.1.1.2. Séance 2

L'enseignante débute la deuxième séance par un rappel de l'activité préliminaire à la première séance. Rappelons que les élèves avaient eu environ 500 cubes à compter dans un temps limité. L'objectif était de montrer l'efficacité de regrouper les cubes par 10 pour dénombrer la collection de cubes. Nous faisons l'hypothèse que, dans cette séance 2, la taille des nombres en jeu (58, 45, 57) (variable didactique dans l'ingénierie) incite l'enseignante à attirer l'attention de la classe sur les groupements par 10.

En présentant la séance qui suit : « *un nouveau problème mais évidemment un petit peu plus difficile que hier, pas trop difficile je vous rassure,* […], *vous allez faire tout seul comme hier* » elle précise qu'elle laisse « *très peu de temps pour… pour chercher la solution.* » (Pas-S1-1 :09). Elle conforte les propos des élèves « *calculer en vitesse* » en utilisant un argument d'ordre économique : « *pour aller plus vite* » (*Ibid*.).

Pour autant, lors de la recherche individuelle du premier problème (min 2 :16), les élèves dessinent, comptent sur leurs doigts, écrivent des opérations, mais n'utilisent pas les groupements par 10. L'enseignante bascule alors en position topogénétique haute (min 2 :16) et prend appui sur la résolution collective du premier problème pour clarifier ses attentes. En effet, tout au long de la simulation du problème, elle garde le contrôle de la simulation : « *j'en mets combien ?* […] *j'en enlève combien ?* […] *il en reste combien ?* […] *alors pour prendre cinquante-huit, comment je vais faire pour aller le plus vite possible ? » (min 7 :23).* Sa position en surplomb lui permet de soutenir le message « utiliser les groupements par 10 » : lors de la résolution de ce premier problème, elle utilise à trois reprises l'expression « *comment faire pour aller plus vite ? » (min 7 :23).*

Temps	Modali - té de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			Rappel mémoire didactique : « Qu'est-ce qu'on a appris ? » Présentation de la séance : « un nouveau problème […] **aussi très peu de temps** »	Chloé : « À compter en vitesse »
	Problème 1 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse-t-il à la maison ?			
02 :16	Col.		P : « *Combien de billes à la maison ?* », « *Combien il amène de billes à l'école ?* » « *Et qu'est-ce qu'on cherche ?* » « Vous *avez 1 ou 2 min pour répondre* »	Deux élèves lisent le problème.
3 :27	Ind.	Résoudre	P distribue feuille plastifiée.	**Dessins**, diverses **écritures :** « 58 – 45 » « 58 **.** 45 », du résultat (13), **comptage sur les doigts**
7 :23	Col.	Simuler Vérifier empiri-quement	Inventaire des réponses et rappel de la fonction de la boite : « *vérifier vos réponses* ». Incitation à utiliser le système de numération (base 10) « *pour aller plus vite […] j'en mets combien ?* […] *j'en enlève combien ?* […] *combien il me reste dans la boite ?* »	En réunion autour de la maitresse qui guide : mettre 5 barres de 10 et 8 unités dans la boite, puis enlever 4 barres de 10 et 5 unités. Lara mime puis Maéva compte les cubes restants.
12 :26		vérif. intellect.	P : « *Si je fais treize plus quarante-cinq ? […] On retrouve le nombre de départ.* »	Les élèves répondent quasiment tous 58.
12 :48	Problème 2 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 4 à l'école. Combien de billes a-t-il laissé à la maison ?			
14 :55	Col.	Résoudre	P présente le jeu comme une devinette et demande de répondre rapidement. P lit le problème deux fois, **mais rajoute « *il en reste combien ?* »**	Les élèves s'esclaffent. Thomas n'a pas de réponse.
16 :55	Col.		P appelle Thomas pour simuler le jeu et le guide.	Thomas mime le problème face à la classe. (retrait dynamique)
19 :32	Problème 3 : Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby .			
21 :42	Ind.		P lit deux fois le problème, P reste au tableau relisant ses notes.	« *c'est facile !* » Lara **dessine** Jules (58) et Léon (?) autre ? : 54
22 :42		Résoudre	P arrête la recherche, demande à tous de montrer son résultat, puis appelle Lara pour simuler. P l'aide puis se tourne vers la classe : « *avez vous trouvé 48 ?* »	Lara ne semble pas comprendre ce que représentent les cubes et simule sous la direction de P (retrait dynamique).
26 :11	Col.	Vérif. intellect.	P engage une discussion sur la validité de la réponse de Jules (58)	Diane : **ce n'est pas possible « *parce qu'après ça ferait 68* »**
27 :09	Problème 4 : J'ai 58 briques, j'en enlève 57. Combien en reste-t-il ?			
	Col.		P contextualise le problème : « *des briques pour construire une maison* ».	Esclaffements. Lara **dessine** (idem problème précédent) ; Léon **compte sur ses doigts. (?)**
28 :15	Ind.	Résoudre	P arrête la recherche. Interroge Lara : « *est-ce que tu peux me redire le problème, le redire avec tes propres mots ?* » puis Maéva.	Les élèves montrent leur réponse. Lara est à nouveau perdue. Léon vient mimer le problème
30 :11 34 :58	Col.	Simuler et résoudre	« Qui *veut faire avec la boite ?* ». Léon se porte volontaire. P appelle un autre élève pour aider Léon : « *Est-ce que quelqu'un arriverait, sans lui donner la réponse, juste lui donner un indice ?* » P montre ce qu'il reste dans la boite en rappelant le problème.	Léon place 58 cubes dans la boite mais ne sait continuer. Barnabé l'aide en lui disant de compter avec les cubes par dizaines. Il reste un cube dans la boite ; appui sur le système de **numération**.
35 :41	Devinette : « *j'ai mis dans la boite 58 cubes dans ma boîte, alors j'en enlève une poignée. Combien j'ai de cubes dans ma boite ?* »			
36 :39	Ind.	Recherche	P observe	« *C'est quoi une poignée ?* »
37 :36	Col.	Débat collectif	P : « *Vous êtes sûr de vos résultats ?* »	Réponses des élèves : 50 / 52 / 8 / 53 / 54 / 55 /
39 :29			P engage le débat : « *qu'est-ce qu'il se passe avec ce problème ?* »	Élèves **désarçonnés**.
41 :33	Bilan : « *est-ce que vous avez des remarques ? Est-ce qu'il y a des choses que vous avez apprises en faisant ça ?* »			
	Col.		P : « *C'était plus facile que hier ou plus difficile* ? »	Réponse spontanée de l'ensemble : « *plus facile !* […] *calculer dans sa tête* […] *travailler plus vite que d'habitude* »
45 :40	Calculs rapides			
	Col.		P présente (affiche) deux séries de calcul « *en faire mentalement au moins deux* ».	
		Calculer	P attend.	Les élèves écrivent leur réponse (nombre/écriture opérations)
52 :37		Corriger	P s'intéresse aux procédures et profite de la correction pour revoir de la numération (unités / dizaines). Pas de vérification avec la boite. P interroge des élèves de niveaux différents : Thomas (-), Diane (+), Chloé, Barnabé (+), Jules, Maéva, Lara Marie-Laure, Lara2 (-) P s'appuie sur la **comptine numérique** : « *Après soixante-trois, il y a combien ?* »	Appui sur la **numération :** « j'enlève une dizaine » **File numérique** : « j'ai reculé en arrière. » comptage sur les doigts. Difficultés à effectuer 58-57 et 64-63

Tableau synoptique 2 : séance 2, site Pascale (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Quelques instants plus tard, l'enseignante se replie sur un topos plus bas, laissant alors les élèves prendre à leur charge la simulation des problèmes (problème 2, min 16 :55 ; problème 3, min 22 :42 ; problème 4, min 30 :11). Pour autant, elle n'est pas complètement distante et joue sur les interactions entre élèves pour faire avancer le savoir. Par exemple, pour la simulation du quatrième problème (min 30 :11), Léon ne sachant comment faire, elle fait appel aux camarades : « *Est-ce que quelqu'un arriverait, sans lui donner la réponse, juste à lui donner un indice ?* ». Nous observons donc dans cette séance une enseignante agissant sur le milieu en imposant un rythme et une technique de dénombrement et jouant sur les positions des uns et des autres pour tenter de faire avancer un savoir.

Le synopsis nous permet de suivre l'évolution de ce savoir, au regard de l'utilisation de la boite et des cubes par les élèves et de mettre en évidence son l'utilisation selon trois aspects :

- l'aspect simulation (min 7 :23 ; 22 :42 ; 30 :11) : tous les problèmes sont simulés selon une modélisation relevant d'un retrait dynamique.
- l'aspect vérification (min 16 :15 ; 22 :42 ; 34 :58) : les élèves vérifient leurs réponses en la comparant au nombre de cubes restants dans la boite.
- l'aspect preuve (min 12 :26 ; 26 :11) : par la réunion des deux sous-collections que nous considérons comme une amorce de la preuve par addition d'un résultat : Notons que Pascale conclut à deux reprises (problèmes 1 et 3) sur une amorce de preuve d'un résultat que nous illustrons avec l'extrait suivant :

M : *Si je fais attention treize plus quarante-cinq ? (montre les deux ensembles)*
Es : *Ça fait cinquante-huit.*
M : *Cinquante-huit. On retrouve le nombre de départ. J'ai vérifié ce qu'il me restait dans ma boîte. D'accord ?*

Figure 19 : extrait Pascale – séance 2 – min 12 :26

L'enseignante se sert donc ici du matériel pour asseoir le savoir visé dans cette séance 2, mais aussi pour préparer un autre savoir qui lui, est enjeu dans l'étape suivante dans l'ingénierie. Ainsi qu'elle le précise en entretien, *« avant d'aller vers le calcul pour prouver,* *il faut comprendre le sens de faire les calculs, il faut comprendre cette notion de rajouter, d'enlever… il faut comprendre pourquoi tu aboutis au calcul. Mais pour aboutir au calcul, il y a ce processus de représentation et donc l'étape 1, c'était l'occasion de mettre des mots et puis de verbaliser, d'injecter déjà du sens* » (Pas-Entr-2016-05-03).

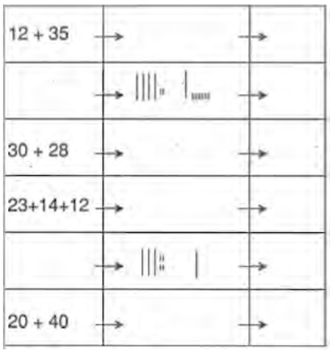
Par ailleurs, une rupture du contrat didactique pérenne se manifeste une nouvelle fois lors de la devinette (min 35 :41). L'enseignante enlève une poignée de cubes de la boite (qui en contenait 58) et demande combien il en reste dans la boite. Si quelques élèves admettent avant même de répondre que « *normalement on peut avoir faux.* » (Pas-S2-min 37 :12), montrant en creux qu'ils ont plus ou moins conscience de produire une réponse au hasard, la plupart avancent une réponse numérique. Ainsi, après vérification empirique, Chloé pense être en mesure de justifier sa réponse (min 39 :29) : « *je savais qu'une poignée, c'était huit, après ça fait 50* ».

2.2.1.1.3. Séance 3

Nous ne disposons pas de trace vidéo de cette séance 3. Lors des entretiens avec Pascale, nous avons compris qu'elle concernait ce qui, dans l'ingénierie, est dans cette étape 1 appelée « ateliers » (*cf.* Tableau 11, supra). Durant cette séance, les élèves devaient résoudre en binôme quatre problèmes, l'un avec le matériel, l'autre sans. Nous supposons que les élèves ont travaillé en autonomie pendant que l'enseignante travaillait avec l'autre groupe de la classe (nous rappelons que Pascale a en charge un cours double 3P/4P). La correction a eu lieu le lendemain. Celle-ci a été entièrement filmée.

Nous faisons aussi l'hypothèse que lors de cette séance, Pascale a aussi préparé les élèves à manipuler les nombres à deux chiffres. Comme elle nous l'a indiqué dans un entretien rétrospectif, ses élèves *« n'étaient pas vraiment au point au niveau des opérations ni au niveau de la numération. »* (Pas-Entr-2016/05/03). Aussi aménage-t-elle l'ingénierie dès la fin de cette étape comme elle nous l'a indiquée à l'occasion d'un entretien en incorporant des « *régulations » (Ibid.)* entre chaque séance : « *du calcul oral, par exemple le plus rapidement possible. Je faisais une colonne de 1 à 10. Puis je faisais des calculs. 34 + 12, 46 – 12, et qu'ils répondent le plus vite possible. […] Pour la numération, j'avais ce tableau où on avançait avec le jeton, on enlevait, on rajoutait. J'avais les fiches Freinet, ou bien j'avais encore des cartes où il y avait des calculs et on faisait des jeux de famille. On jouait à calculer le plus rapidement possible. Donc je mêlais opérations et numération dans les* *régulations, parce que ça aidait après au moment de la résolution de problèmes. » (Ibid.)* Nous présentons ci-dessous deux fiches citées par l'enseignante :

Sur le tableau de nombres ci-contre, un jeton positionné sur un nombre est déplacé selon des instructions telles que :
- *ajouter x unités,*
- *enlever y unités,*
- *ajouter z dizaines,*
- *enlever z dizaines.*



Une fiche « Freinet »

Figure 20 : exemple de matériaux utilisés par l'enseignante pour les régulations entre séances

Remarquons que la fiche Freinet ne présente ici que des additions simples ne demandant pas d'effectuer des échanges 10 contre un.

2.2.1.1.4. Séance 4

Dans les notes de bilan de cette séance Pascale indique avoir choisi « *les groupes ayant des difficultés pour la correction, ils ont vérifié en montrant aux autres* » (Pas-S3.fichePrep). Quatre binômes ont donc pour tâche de résoudre empiriquement les problèmes devant leur camarade.

Le synopsis de séance (ci-après) permet de saisir comment l'enseignante mène la classe : en retrait, elle laisse les élèves aller jusqu'au bout des simulations et n'intervient que pour poser des questions, principalement « *est-ce que c'est juste ?* » et « *pourquoi ?* ».

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes élèves et procédures des élèves
0 :00			Présentation de la séance : corriger la séance « atelier »	
	Problème 1 : La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Elle en distribue 23. Combien en reste-t-il ?			
0 :0 :34	Binôme	Présenter sa solution	P demande à deux élèves « *de présenter leur problème* »	Thomas et Maéva expliquent leur fonctionnement : résolution à tour de rôle, ensemble si le problème était trop compliqué. Thomas et Maéva ont trouvé 17
	Col.	Montrer comment on a résolu	P donne la parole aux camarades : « est-ce que c'est juste ? » Chaque fois qu'un enfant confirme ou infirme, P demande une justification en relançant avec un « *pourquoi ?* »	Jules ne sait pas. Chloé (4) **sur-compte** en s'aidant de ses doigts de 23 à 27. Diane : impossible que la réponse soit 17 « ***parce que vingt-trois ça ira plus loin que 17 si on compte à rebours. On en enlève que dix si on veut que ça soit dix-sept.*** [qu'il en reste] **» « *20 -20 = 0 et 7-3 = 4* » Décomptage :** « si on comptait à rebours vingt-six, vingt-cinq, vingt-quatre et vingt-trois donc c'est égal à quatre »
7 :32			Une fois que les élèves se sont exprimés, P demande comment on fait pour savoir. P demande à Ma et Tom de résoudre avec la boite et les cubes	Lara2 : **utilisation du matériel** « En fait, on peut utiliser les cubes encore et compter » Ne tenant pas compte de la remarque d'une camarade, Maéva dénombre un à un les cubes pour fabriquer la collection initiale. **Erreur de fabrication :** 26 au lieu de 27
13 :08			P profite d'une erreur de dénombrement pour conforter **l'utilisation du système décimal**	Utilisation du **matériel** et du **système de numération**. Maéva et Thomas accrochent les cubes en dizaines et corrigent la collection de cubes initiale. **Simulation selon retrait dynamique**
17 :51		Amorce d'une vérification intellectuelle	P amorce la vérification : « *Et si je rajoute… alors les… les… briques de jus d'orange qui restent je les rajoute aux autres briques j'aurai de nouveau combien ?* »	Plusieurs élèves répondent spontanément : 27
	Problème 2 : Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 9 filles. Combien y a-t-il de garçons ?			
18 :21	Binôme	Présenter sa solution	P appelle Schoen et Lara (« *vous aviez trouvé 5* [au problème précédent] »)	Schoen et Lara ont trouvé 19. Schoen lit le problème à deux reprises.
22 :22	Col.	Montrer comment on a résolu	P demande l'avis des autres sur la réponse de Schoen et Lara	E : **« si y avait dix-neuf garçons eh bein y avait vingt-huit élèves en tout. ».** Schoen et Lara vont chercher le matériel pour résoudre le problème et trouvent 18. (retrait dynamique)
23 :55	**Problème 3 :** La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Elle lui en reste 8. Combien en a t-elle distribué ?			
	Binôme	Montrer comment on a résolu	P appelle Jules et LaraJ.	Jules lit le problème et annonce leur résultat : 19
25 :32	Col.		P demande l'avis des autres élèves.	Les élèves pensent que c'est juste.
			P pose des questions guidant la simulation : « combien dans la boite ? », « Qu'est-ce qu'elle fait la maitresse ? »	Jules et LaraJ résolvent le problème **avec le matériel :** 27 cubes mis un à un dans la boite. Ils en sortent 8 et comptent ceux qui restent : 18 **Erreur de fabrication de la collection initiale**.
32 :55			P reprend les propos de Maéva **« ouai, *ça irait plus vite si on gardait nos baguettes de dix vous pensez ?* »** P fabrique la collection en utilisant les dizaines et simule le problème	Maéva : « *on pouvait faire les petites baguettes, enfin des grandes baguettes* » **.** Difficultés pour obtenir les 27 cubes. Les élèves remarquent que tous les problèmes mettent en jeu les mêmes nombres et gardent les cubes à proximité.
34 :16	**Problème 4 :** Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 13 filles. Combien y a-t-il de garçons ?			
	Binôme	Montrer comment on a résolu	P appelle Diane et Léon. P : « *est-ce que quelqu'un a trouvé autre chose ?* »	Diane lit le problème. Diane **résout avec la boite et les cubes.** 27 cubes dans la boite ; elle enlève les treize cubes correspondant aux filles et compte le restant. Schoen : « *moi c'est toujours un de plus ou un de moins* »
35 :49	Col.	Vérification intellectuelle	P : « *j'ai pas fait de calcul et je me dis 'tiens j'ai quand même envie de vérifier que mes résultats sont justes.* ***Est-ce que vous auriez une idée de comment est-ce qu'on peut vérifier son résultat ?*** »	Jules : « ***on peut faire 13 + 14*** ». Jules vérifie la quantité de cubes dans chacune des sous-collections : 14 cubes et 13 cubes, puis **sur-compte à partir de 14** Diane vérifie (explique) la vérification 4 du **pb 1** : « *tu mets les quatre (prend quatre cubes) plus vingt-trois et c'est comme si t'avais vingt-sept* » Chloé : **poser l'addition en colonne**.
37 :44			***« Est-ce que si je retrouve mon nombre départ, 27, est-ce que c'est une bonne manière de vérifier ou pas selon vous ? »***	Réaction unanimes des élèves : oui
39 :12	BILAN : « *Qu'est-ce que vous avez appris pendant ces quatre ateliers ?* »			
	Les élèves ont repéré que les collections initiales comportaient toutes 27 éléments. Travailler ensemble, calculer mentalement, Sondage de P relativement à la difficulté de l'atelier : difficile : 1 élève moyen : 4 élèves facile : 5 élèves P annonce la séance suivante : on continuera à faire des activités de cet ordre-là avec nos cubes la semaine prochaine avec d'autres consignes. Fin de séance			

Tableau synoptique 3 : séance 4 « bilan ateliers », site Pascale (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Trois points nous semblent mériter d'être relevés :

- Les difficultés des élèves en numération.

Comptant un à un les cubes pour fabriquer les collections initiales de cubes, les élèves se trompent à plusieurs reprises. L'erreur de dénombrement devient un sujet de débat qui ne trouve sa conclusion qu'au problème 3 lorsque Maéva propose de laisser les cubes « en baguettes ». Ce n'est qu'à ce moment-là qu'intervient l'enseignante pour approuver et conforter l'utilisation des groupements par 10, reprenant la formulation de « *baguette* » de Maéva. Ceci peut être interprété en considérant que le nombre, en tant qu'objet codé dans un système décimal, n'est pas encore construit par les élèves.

- Une reconnaissance des attentes de l'enseignante.

Le problème numéro 3 (min 23 :55) est traité de la même façon que le problème 1. Or si ces deux problèmes ont des ressemblances vis-à-vis du contexte, ils sont différents du point de vue de leur structure. Pour le problème 1, on recherche l'état final connaissant l'état initial et la transformation de la collection, alors que pour le problème 3, on recherche la valeur de la transformation connaissant les états initial et final des collections. Pour autant, les élèves traitent le problème 3 exactement comme le problème 1, ce qui peut être interprété, en terme de contrat didactique, comme un traitement par effet de contrat et donc implicitement une reconnaissance des attentes de l'enseignante : enlever une quantité à une autre.

- Un début de vérifications intellectuelles d'un résultat.

L'enseignante met en débat la validité des réponses des élèves avant même de vérifier empiriquement. Ce faisant, elle oblige ses élèves à argumenter et à produire ce que nous pourrions appeler des niveaux de preuve, comme le suggèrent les illustrations suivantes :

Pour le premier problème (min 3 :54) : Diane réfute la valeur 17 : elle compte à rebours de 27 à 17 en s'aidant des doigts pour ensuite déclarer « *On en enlève que dix si on veut que ça soit dix-sept.* » (sous-entendu, on n'a pas assez enlevé). En fin de séance (min 35 :49), elle énonce l'addition pour vérifier le résultat : « *tu mets les quatre (prend quatre cubes) plus vingt-trois et c'est comme si t'avais vingt-sept* »

Pour le second problème (min 22 :56) : c'est Marie-Laure qui, réfutant la valeur 19, avance l'argument que si celle-ci était exacte, « *si y avait dix-neuf garçons eh bein y avait vingt-huit élèves en tout* » (sous-entendu 19 et 9 font 28 ce qui différent de 27)

Le quatrième problème (min 36 :37) : donne l'occasion à l'enseignante de faire exprimer l'addition par Jules : « *On peut faire treize plus quatorze*. » puis par Chloé : « *poser l'addition en colonne* »

L'interprétation que nous faisons de cette séance recoupe en partie celle identifiée précédemment, à savoir qu'une technique utilisée par l'enseignante est de laisser les élèves interagir, se donnant pour rôle de mettre en exergue les interactions des élèves.

2.2.1.1.5. Séance 5

Nous ne disposons pas des données vidéographiques de la séance 5. Les notes de bilan de l'enseignante indiquent qu'il s'agit « *d'un contrôle fait individuellement et assez rapidement. Il y a eu des erreurs mais rapidement corrigées également individuellement* » (Pas-S4-fichePrep). Pour chaque problème, une mise en commun avec manipulations a eu lieu, manipulations jugées « *très utiles pour visualiser* » (*Ibid.*).

2.2.1.2. Conclusions à propos de la première étape de l'ingénierie mise en œuvre par Pascale.

Le tableau suivant retrace les modalités de mise en œuvre de la première étape de l'ingénierie par Pascale qui rappelons-le a fait l'objet de cinq séances. Les données que nous avons pu analyser portent sur trois d'entre elles. Nous les synthétisons relativement aux enjeux cette étape de l'ingénierie au regard :

- de la fonction de la boîte et des cubes
- de la manière dont le problème est « joué » avec la boîte (qui modélise ? Comment le problème est-il simulé ?)
- des procédures numériques engagées par les élèves lors de la résolution des problèmes
- des embryons de vérifications intellectuelles introduits dans les séances

	Séance 1	Séance 2	Séance 3 : données vidéo non disponibles	Séance 4	Séance 5 : données vidéo non disponibles
Fonction prédominante de la boîte et des cubes	**Simuler** le problème pour trouver une réponse. **Valider ou invalider** les réponses	**Simuler** le problème pour trouver une réponse. **Valider ou invalider** les réponses		**Simuler** le problème pour trouver une réponse. **Valider ou invalider** les réponses	
Jeu de la boite : qui simule ?	Pb 1→ une élève Pb 4→ deux élèves	pb 1 → l'enseignante pb 2 → un élève pb 3 → un élève pb 4 → deux élèves pb 5 → l'enseignante		pb 1 → 2 élèves (-) pb 2 → 2 élèves (-) pb 3 → 2 élèves (-) pb 4 → 2 élèves (+)	
Jeu de la boite : comment le problème est-il simulé ?	Pb 1 : 42 cubes dans la boite puis décomptage jusqu'à 14 Pb 4 : retrait dynamique	Tous les problèmes sont joués selon un retrait dynamique Utilisation des groupements par 10		Tous les problèmes sont joués selon un retrait dynamique. Utilisation des groupements par 10	
Procédures de résolution repérées	**Dessins**, **sur-comptage** en s'aidant des doigts, **décomptage** en partant de la valeur du tout. **Tableau (file) numérique**. procédure incorrecte : addition	**Dessins**, **sur-comptage** en s'aidant des doigts, **tableau numérique**, **décomptage**, Retrait en utilisant la **numération décimale**.		Séance d'ateliers non filmée, pas de traces écrites. Procédures de résolution non explicitées dans la séance bilan.	
Amorce d'une vérification intellectuelle		Réunion des deux sous-collections de cubes.		Plusieurs niveaux de preuve : - si la réponse proposée était exacte alors le tout serait égal à…, or… - si la réponse proposée était exacte alors on n'aurait enlevé que… or il faut enlever… - addition des deux cardinaux de la sous-collection.	

Tableau 12 : Synthèse des quatre séances de l'étape 1 – « dévolution de l'apprentissage de la soustraction » (Site Pascale)

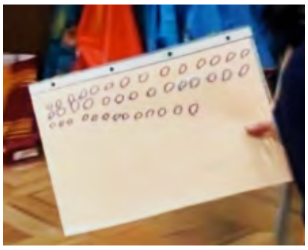
Ce tableau fait ressortir trois éléments :

– D'un point de vue mésogénétique, le matériel {boite, cubes} garde tout au long de l'étape deux fonctions : elle est successivement outil de simulation et outil de vérification. Presque tous les problèmes sont simulés de la même façon, selon un retrait dynamique : le tout est placé dans la boite, puis une partie des cubes est retirée. Seul le premier problème est simulé différemment par une élève (*cf.* séance 1), surprenant ainsi l'enseignante : « *j'ai été surprise de la proposition de Diane qui consistait à compter à l'envers depuis 32. Elle a introduit la soustraction très vite* *alors que je pensais partir de 14 et aller jusqu'à 32 par compensation.* » (Pas-S1.fichePrep). En ce sens, nous pouvons penser que la dimension mésogénétique que constitue le matériel (la boite et les cubes) a pour fonction lors de cette mise en œuvre de faciliter la compréhension des attentes réciproques de l'enseignante et des élèves : résoudre des problèmes où l'on cherche à quantifier une différence. La fonction que joue dans l'ingénierie cette variable didactique (au sens de la TSD, *cf.* analyse épistémique de cette étape en section 1), à savoir le contrôle de la situation de dévolution de la situation, est ainsi largement étendue.

– Les connaissances des élèves relatives au nombre sont fragiles : les erreurs de fabrication ou de dénombrement de collections de cubes sont fréquentes dans cette étape. L'explication réside dans le fait que les élèves construisent les collections par ajouts d'unités, montrant ainsi que les propriétés du système de numération décimal ne sont pas acquises ou si elles le sont, inexploitées. Si la plupart des élèves utilisent la comptine, dessinent ou comptent sur leurs doigts, peu utilisent les groupements par 10 pour fabriquer ou dénombrer une collection (savoir que Pascale souhaiterait que les élèves mobilisent, comme nous l'avons vu mais qui se surajoute aux visées initiales de l'étape dans l'ingénierie).

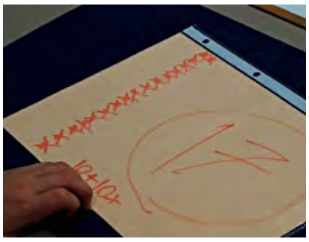
Les captations vidéo et trace écrite ci-dessous révèlent une diversité de procédures de résolution des problèmes soustractifs mis à l'étude :

Procédure 1 :
Comptage sur les doigts

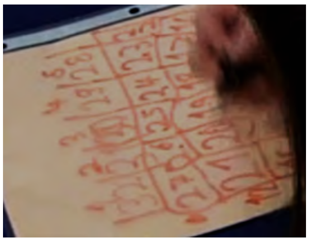


Procédure 2 :
Dessin

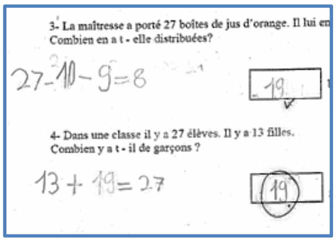
Procédure 3 :
Comptage à rebours



Procédure 4 :
Sur-comptage



Procédure 5 :
Tableau numérique



3- La maîtresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Il lui en
Combien en a t - elle distribuées?

27-10-9=8

19

4- Dans une classe il y a 27 élèves. Il y a 13 filles.
Combien y a t - il de garçons ?

13 + 19 = 27

19

Procédure 6 :
Calcul réfléchi

– L’ébauche d’une vérification intellectuelle.

Nous constatons que, dès cette première étape, l’enseignante prépare la vérification d’un résultat : à la séance 2, elle s’appuie sur le matériel pour illustrer les réunions des deux sous-collections, préparant ainsi l’étape 2 : *« Je l’anticipe mais seulement à l’oral. Je sais qu’on va venir à ça après donc je l’anticipe.* […] *J’injecte par anticipation des choses. Si ça vient ça vient, et puis si ça vient pas, on continue.* […] *Je reprendrai dans un autre moment, puis je continue ce sens… c’est comme ça que je construis en fait* » (Pas-entr-03/05/2016). L’analyse de la séance 4 a fait apparaître que les élèves poursuivent en développant des niveaux preuves reposant sur la réunion de deux parties pour obtenir le tout.

La dévolution de l’apprentissage de la soustraction se manifeste ainsi dès la première mise en situation lors de la première séance : alors que l’enseignante initie une simulation du problème, une élève en propose une autre. L’enseignante se met en retrait et laisse l’élève simuler, montrant implicitement ainsi au reste de la classe que la résolution du problème est à leur charge. Pour autant, elle n’est pas absente et introduit dans le milieu didactique des éléments propres à faciliter la compréhension des élèves ou préparer l’étape suivante.

L’enseignante agit sur la mésogenèse en introduisant le nombre sous un aspect décimal (pour justifier les groupements par dix). Pour ce faire, elle contraint ses élèves en jouant sur une variable temporelle (« *Vous avez deux minutes pour trouver la solution* » (Pas-S1-min 2 :22), provoquant ainsi des erreurs dans le dénombrement ou la fabrication de collections de cubes. Les interactions entre élèves conduisent ceux-ci à adopter une technique de dénombrement plus efficace, utilisant les regroupements par dix, ce que l’enseignante conforte par un « *Ouai, ça irait plus vite si on gardait nos baguettes de dix, vous pensez ?* » (Pas-S1-min 2 :22). Se confirme au fil de l’étape un format pédagogique valorisé par l’enseignante qui est de ne jamais amener elle-même les solutions et procédures à mettre en œuvre mais de les faire émerger dans les interactions entre élèves. Nous considérons que ce format n’est pas sans lien avec les préconisations institutionnelles du canton de Genève, telles que nous les avons identifiées en chapitre 1 des résultats, lors de l’analyse comparative des curriculums suisse et français.

Un autre ajout remarquable dans le milieu didactique est relatif à la preuve d’un résultat. Dès la seconde séance, l’enseignante utilise une gestuelle pour initier la preuve par addition : elle désigne les deux sous-collections (les parties) en les mettant en relation la collection initiale (le tout). Ainsi qu’elle l’exprime en entretien individuel, elle « *injecte par* *anticipation des choses* » (Pas-entr-03/05/2016). Cette manière de faire influe la chronogenèse, en privant en partie les élèves des effets attendus de la situation de dévolution tels que pensés dans l'ingénierie. Dès la quatrième séance, nous voyons apparaitre des niveaux de preuve : élimination de réponse parce que « *trop haute* » (NP1), comparaison de la réunion des parties au tout (NP2), comparaison de la transformation induite par la réponse à la transformation indiquée dans le problème. La chronogenèse tire ainsi parti des éléments constituant le milieu ainsi que des interactions entre les différents acteurs : élèves comme professeur profitent des remarques des uns et des autres pour construire un savoir relatif à la différence entre deux quantités.

Rappelons toutefois que le titre donné par Brousseau à cette étape est « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction ». L'analyse des séances montre que la dévolution a bien eu lieu : les élèves prennent en charge la résolution des problèmes proposés. Comme prévu dans l'ingénierie, les élèves ont « fréquenté différentes sortes de problèmes » (Berté, 1996, p. 6) mettant en jeu la notion de différence. Les problèmes relevaient de différentes catégories, au sens de Vergnaud, permettant la rencontre avec deux sens d'une différence : la différence comme un reste et la différence comme un complément. Si l'enseignante respecte l'ingénierie dans la lettre (les problèmes ne subissent aucune modification), elle en modifie subrepticement l'esprit en introduisant des prémices d'une vérification intellectuelle d'un résultat. Notons par ailleurs que cette vérification est abordée sous l'angle de la réunion de deux parties et non de la définition d'une différence, c'est-à-dire « le nombre que je dois ajouter au petit pour obtenir le grand » (Berté, 1996, p.49), corollaire à l'œuvre dans l'étape suivante.

2.2.2. Analyse de l'étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »

Cette étape, composée dans l'ingénierie didactique de trois leçons, a pour objectif d'amener à rendre les élèves capables de vérifier leurs réponses sans ouvrir la boite. Pour amener l'élève à accepter la vérification intellectuelle (la comparaison de la quantité initiale à la somme des quantités enlevée et restante) aux dépens de la vérification empirique (en comptant directement les cubes restants), on fait parier les élèves sur leur réponse. La vérification empirique (l'ouverture de la boite) est retardée, obligeant l'élève à reconsidérer sa réponse avant de s'engager dans un pari. Le pari ici est un « apprêt didactique » (Brousseau, 1986) permettant la dévolution de l'apprentissage de la preuve d'un résultat obtenu par soustraction. L’enseignante déroule cette étape sur trois séances. Nous ne disposons des données vidéographiques que pour les séances 6 et 8.

2.2.2.1. Analyse mésodidactique des séances.

Il s’agit d’identifier comment Pascale met en œuvre le passage de la preuve empirique à une vérification intellectuelle, ce qui constitue la visée centrale de cette étape dans l’ingénierie didactique. De la même façon que pour l’étape 1, nous menons l’analyse mésodidactique des deux séances pour lesquelles nous disposons des données filmiques et nous nous appuyons sur des données d’entretiens rétrospectifs, et des traces écrites par les élèves (copies, cahiers) pour reconstruire le fil du processus didactique des deux séances non documentées vidéographiquement.

2.2.2.1.1. Séance 6

Cette sixième séance est constituée de cinq problèmes dont les trois premiers sont issus de la leçon 3 et les deux derniers de la leçon 4 de l’ingénierie didactique. Pour mieux en préciser le contexte, nous nous appuyons sur un extrait d’entretien rétrospectif où l’enseignante explique l’aménagement de cette séance par le fait que « *pour la plupart du groupe, ils y arrivaient assez bien. C’est vrai que c’était un groupe qui comprenait vite, quoi.* » (Pas-entr-03/05/2016).

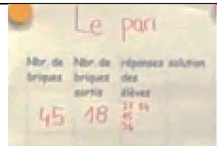
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Col.		Rappel de la séance précédente : « *Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois, qui est-ce qui peut me dire ?* » Présentation de la séance : « *aujourd'hui on va de nouveau faire un problème mais on va parier sur la réponse* ». [reprenant l'explication de Schoen] : « *On va dire que vous avez gagné ou perdu le pari, tout simplement* » et précise « *pour pouvoir gagner son pari, on va devoir faire le problème en le vérifiant.* Présentation de la preuve par addition : « *vous devrez gagner le pari en me prouvant,* ***en calculant avec ce qui reste, vous devrez aller jusqu'à… jusqu'au résultat que vous cherchez par l'addition*** »	Diane : « *On avait fait des problèmes d'abord sans cubes et après avec.* ». Certains élèves ne connaissent pas la signification de parier Schoen : « *si tu penses quelque chose et que l'autre il pense le contraire et bien tu peux parier. Si je gagne, tu me donnes 10 francs, et si je perds, je te donne 10 francs, ça s'est parier.* »
4 :26	Problème 1 : Dans la boîte, j'ai 45 cubes, j'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ? (réponse 27)			
	Col.		P : « *Je vous laisse quelques minutes pour le résoudre. Et puis après on se réunit pour mettre ensemble les résultats.* »	Marie-Laure et Jules lisent le problème.
5 :20	Ind.	Recherche	P reste en avant de la classe. Circule peu dans la classe	Quelques élèves recherchent des apartés avec l'enseignante.
9 :46 12 :47 17 :39	Col.	Simuler la situation avec le matériel puis vérifier sa réponse	P présente l'affiche qu'elle a préparée et complète avec les réponses des élèves : 27 / 24 / 15 / 36 P : « *comment est-ce qu'on peut faire ?* » P : « *j'ai entendu que des moins.* ***Moi dans mon pari, je veux que vous me fassiez du +*** ». 	procédures de résolution : **Calcul réfléchi / numération :** « 45 – 18→ 24 » ; Schoen : « *j'ai fait 45 – 10, → 35 puis 35 – 8 → 27.* » ; Difficulté : « *il n'y a pas assez de cubes tout seuls.* » Barnabé : « *On rajoute tous les cubes pour faire 45* »
20 :42			**Avec matériel :** Sur-comptage à partir de 18 jusqu'à 45 en sortant les cubes restants dans la boite.	
22 :28			Conclusion de P : « ***Vous avez résolu le problème d'une autre manière*** *qui est aussi juste, parce que vous avez trouvé les 27,* ***mais pour gagner mon pari, moi je voulais une addition****.* »	Les élèves manifestent de la joie d'avoir trouvé 27
23 :08	Problème 2 : Dans la boîte, j'ai 72 cubes, j'en sors 34. Combien en reste-t-il P ne demande pas à Maxine si elle veut parier sur sa réponse maintenant dans la boîte ? (réponse 38)			
	Ind.		P : trouver la réponse sans la boite avec une addition : « *partir de mon 34 et puis aller jusqu'à 72* »	Les élèves cherchent mentalement.
26 :14	Col.	Résoudre mentalement	P recense les réponses : 38, 43, 33. « *Rappelez-vous, qu'en faisant les briques sorties avec les briques dans ma boite, je retrouvais mes… la totalité de mes briques* »	Procédure de Barnabé : 70-30 = 40 ; 72-30=42… Les élèves ne semblent pas comprendre ce qu'attend la maitresse. Diane : « *vu qu'il y a 72, tu peux pas aller plus haut que 72* »
		Débat collectif	**Avec matériel,** sur-comptage de 10 en 10 à partir de 34 puis ajustement jusqu'à 72. Appui sur les doigts	
30 :06			P : « *Si j'en enlève 34, ben si je rajoute après 38, et c'est bien ça la preuve en faisant une addition, c'est que j'ai fait 34 + 38.* »	
30 :35	Problème 3 : Dans la boîte, j'ai 64 cubes, j'en sors 21. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Ind.	Recherche collective	P (à Schoen) : « *Tu dois pas enlever, tu dois ajouter, tu dois me prouver en faisant une addition.* »	Schoen exprime une procédure de résolution. Jules : 21+43 =64
			Avec matériel, P sur-compte de 10 en 10 à partir de 21 jusqu'à 64. P	La valeur 43 est confirmée, les élèves sont contents.
33 :48	Problème 4 : Dans la boîte, j'ai 70 cubes, j'en sors 23. Combien y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
			P lit le problème puis : « *vous devez le résoudre en faisant une addition* »	
	Ind.	Recherche	P circule dans le groupe et repère des procédures (« *pas mal celle-là* » au caméraman [parlant de 40+23-3 = 70)	Réponses repérées : 50+23-3=70 / 23+47=70 / 43 / 70-20=50 puis 50-3=47 / 70+23
37 :42	Col.	Résolution collective	P recense les réponses 45, 48, 43, 47 puis demande de prouver en faisant un « +, *une addition* ».	Les élèves répondent avec des égalités : 23+47=70 ; 23+48=70
40 :08			Montrant le matériel « *ça plus ça, ça fait 70* », « *je vais aller de combien à combien pour avoir 70 ?* »	
			Sans matériel : sur-comptage à partir de 23 de 10 en 10 en levant un doigt à chaque dizaine ajoutée, puis ajustement (-3) « *Donc de 23 à 70, j'ai combien ?* »	Les élèves comptent au fur et à mesure avec la maitresse.
			Montrant l'affiche : « *je vois bien que si je fais 23… Chut. 23 + 47, je trouve mes 70 cubes de départ.* »	Plusieurs élèves ont trouvé 47 et sont contents.
44 :00	Problème 5 : Dans la boîte, j'ai 42 cubes, j'en sors 17. Combien y a t-il maintenant dans la boîte ?			
			P lit le problème en affichant le problème. « Je veux la preuve avec une addition ».	
	Ind.	Prouver	P circule dans la classe.	Écritures relevées : 33+17=42 / 17 + 25 =42 / 42 + 17 Procédures : comptage sur les doigts / file numérique / dessin
47 :47	Col.	Résolution collective	Réponses : 33 / 45 / 25 / 42 puis « *Comment faire pour trouver combien il m'en reste dans la boite en faisant une addition ?* » […] « *Pourquoi est-ce que je vais aller de 17 à 42 ? Ça va me permettre de trouver quoi ?* » […] « *Est-ce que c'est la totalité des cubes ? Est-ce que c'est les cubes que j'ai sortis ou est-ce que c'est les cubes qui restent dans la boite ?* ». **Sans matériel :** P sur-compte par dix jusqu'à 37 puis Léon finit de les compter un à un : 25 P compte les élèves qui ont bien fait une addition (6) puis annonce une évaluation.	Marie-Laure : « *En fait il faut aller de 17 jusqu'à 42* » […] « *On a trouvé le nombre qui est entre 17 et 42* »
55 :47	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 4 : séance 6, site Pascale (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

Dans la séance 6 mise en œuvre par Pascale, les problèmes retenus relèvent tous d'une même structure, une transformation d'état, avec recherche de l'étal final : « il y a *c* cubes dans la boite, j'en sors *a*, combien en reste-t-il ? ». Rappelons que l'objectif, tel que présenté dans l'ingénierie didactique, est d'obliger les élèves à s'interroger collectivement sur la validité de leurs réponses. L'enseignante conduit cette séance comme les précédentes : lecture de l'énoncé, temps de recherche, recueil au tableau des réponses des élèves, recherche de la valeur exacte.

Afin de montrer comment le déroulé de cette séance, modifie en profondeur l'enjeu d'étude au cœur de cette étape de l'ingénierie, nous condensons dans le tableau ci-dessous les principales interactions entre enseignante et élèves tout au long de la séance.

	Temps	Enseignante	Élèves	
Séance 6	**02:18**	vous devrez gagner le pari en me prouvant, **en calculant avec ce qui reste,** vous devrez aller jusqu'à… jusqu'au résultat que vous cherchez par l'addition. **C'est compliqué ce que je vous dis, on va peut-être le faire et puis on va peut-être voir après.**		
	08:46	tu peux faire avec des moins et avec des plus, mais **tu dois prouver en faisant une addition.** […] Mais tu as peut-être une autre manière de trouver juste, mais **comment le prouver en passant par l'addition** ?	Eh bien moi en fait j'ai fait 45 - 10, et après j'ai fait... ça m'a donné égal à 35. Après j'ai fait 35 - 8 et ça m'a donné 27.	**11:56**
	12:13	D'accord, mais dans ton explication j'ai entendu que des moins. Moi **dans mon pari, je veux que vous me fassiez des +.** Une addition, c'est des +. Barnabé ?	On avait 4 dizaines. Alors si on en prend qu'une, il en resterait 3. Après je sais pas.	**17:02**
	17:23	C'est intéressant, ce que tu dis, mais c'est… ça va pas dans le sens de gagner le pari, puisque moi **je veux une addition. Pour arriver à 45.**	Ben on rajoute tous les cubes pour faire 45	**17:35**
	22:28	**Vous avez résolu le problème d'une autre manière qui est aussi juste**, parce que vous avez trouvé les 27, mais pour gagner mon pari, **moi je voulais une addition**.		
	33:48	vous devez le **résoudre en faisant une addition**, d'accord ?		
	38:32	comment je vais faire **pour prouver mon résultat** en faisant un plus, en faisant une addition ?	Réponses d'élèves : 23 + 47 = 53 23 + 47 = 70 23 + 48 = 70	**39:02**
	39:34	comment **je vais faire pour vérifier qu'une de ces réponses est juste ?** Je sais pas laquelle.		
	42:15	Pour faire une addition, **je vais aller de combien à combien ?** [P sur-compte à partir de 23 en sortant les cubes de la boite]		
	52:32	si **je compte de 17 à 42**, qu'est-ce que je vais trouver ?	Hé bein on a trouvé, on va compter de 17 à 42, on va trouver le nombre qui est entre 17 et 42.	**53:31**
	55:30	Consigne pour l'évaluation : vous allez m'écrire **le calcul par l'addition pour trouver la réponse**		

Tableau 13 : Passage progressif d'un enjeu de la co-construction de la preuve vers la co-construction de l'addition à trous lors de la séance 6

Le tableau ci-dessus met en exergue plusieurs éléments :

- L'enseignante a des difficultés à définir la tâche des élèves. Elle l'admet implicitement en déclarant aux élèves *« C'est compliqué ce que je vous dis, on va peut-être le faire et puis on va peut-être voir après. »* (Pas-S6-min 2 :18).
- Dans un premier temps, les élèves répondent selon le contrat en usage dans la classe qui est d'expliquer leurs procédures de résolution (Pas-S6-min 11 :56 et 17 :02).
- Durant toute la séance, l'enseignante utilise sans pour autant en définir un sens précis, les mots « *prouver* » (min 8 :46 ; 38 :32), « *trouver* » (min 55 :30), « *vérifier* » (min39 :34), « *résoudre* » (min22 :28 ; 33 :48). Ces imprécisions terminologiques n'aident pas les élèves à décrypter ses attentes : s'agit-il de *vérifier* les résultats recensés au tableau, de *prouver* un résultat ou de *trouver* ce résultat par une autre procédure ? Ainsi, par exemple, à la minute 33, Pascale demande de « *résoudre en faisant une addition* » suivi de « *comment prouver en faisant une addition* » à la minute 38.
- Les élèves comprennent peu à peu que l'enseignante attend une réponse sous la forme « a + b = c » (Pas-S6-min39 :02), réponse ensuite validée lors de l'ouverture de la boite suivi du sur-comptage des cubes restants aux cubes sortis (Pas-S6-min42 →53).

Nous pouvons interpréter cette séance en pointant le glissement progressif de l'enjeu de la séance « prouver un résultat » vers celui de « trouver le résultat en utilisant une addition ». En validant cette égalité empiriquement avec la boite et les cubes, l'enseignante tente de donner du sens à l'addition lacunaire par la recherche du complément. Il y a donc, non plus mise en œuvre d'une vérification d'un résultat (la visée initiale des situations de l'ingénierie en ce début d'étape 2), mais co-construction du sens d'une nouvelle technique de résolution : l'addition à trous

Notre analyse est confortée par l'échange conclusif entre l'enseignante et une élève à propos du dernier problème que nous présentons ci-après (min 47 :47) :

***P : Comment faire pour trouver combien il m'en reste** dans la boite en faisant une addition **? [...]** Marie-Laure ?*
***Marie-Laure :** En fait **il faut aller de 17 jusqu'à 42. [...] on va compter de 17 à 42, on a trouvé le nombre qui est entre 17 et 42**.*
***P :** voilà.*

Extrait 50 : Pascale – Séance 6 – Échange conclusif relatif au problème 5 – min 47 :47

L'indice d'institutionnalisation « *voilà* » qui clôture l'échange relatif au problème 2 mais aussi, quasiment, la séance renforce notre interprétation d'un glissement d'enjeu. Il conviendra de confirmer ce point au fil de l'analyse de mise en œuvre de cette étape 2, décisive quant aux savoirs à construire de la soustraction.

2.2.2.1.2. Séance 7

La séance 7 est une séance d'évaluation. Rappelons que nous n'avons pas de données vidéographiques. Les seules traces dont nous disposons sont les copies des élèves. Cette évaluation, constituée de 8 problèmes, est précisément décrite dans le texte de l'ingénierie.

La figure ci-après représente un extrait tronqué de cette évaluation : nous souhaitons mettre en évidence d'une part les rajouts de l'enseignante, d'autre part les réponses des élèves :

Notons tout d'abord que l'enseignante rappelle quelques points de méthodologie (surlignés en vert), points explicitement indiqués dans le Plan d'Études Roman (PER) : « choix et mise en relation des données nécessaires à la résolution / choix de l'opération / vérification de la pertinence du résultat » (PER – MSN13 – p.18).

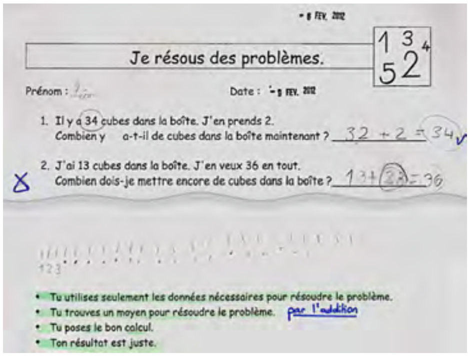


Figure 21 : extrait d'une copie d'élève – séance 7

Notons ici une forme de combinaison d'injonctions officielles liées au pré-construits institutionnel et du texte de l'ingénierie, nous y reviendrons. Concernant le « choix de l'opération », Pascale demande de trouver un « *moyen pour résoudre le problème* » en précisant « *par l'addition* » (ajout à la main sur la fiche élève, en bleu). Cette trace écrite conforte le constat d'un glissement de l'enjeu d'étude de l'addition comme moyen de preuve d'un résultat vers l'addition lacunaire pour trouver un résultat.

2.2.2.1.3. Séance 8

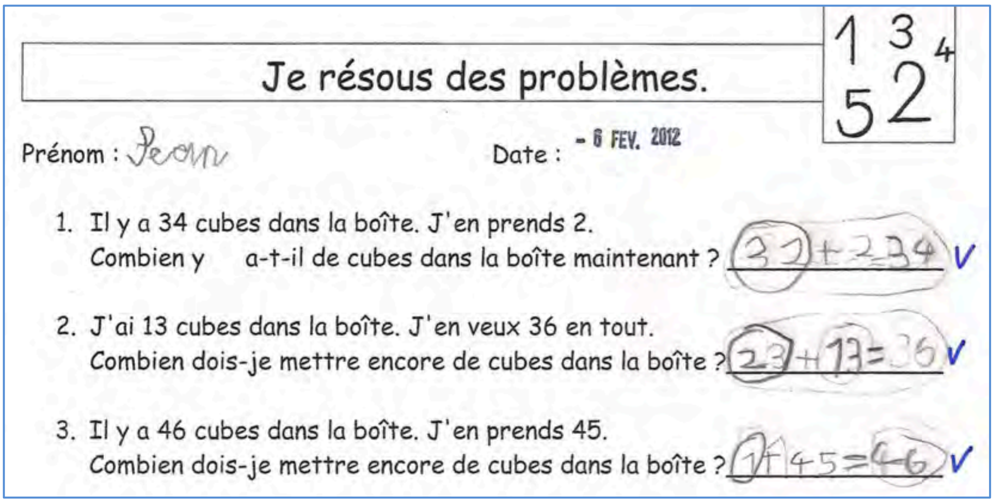
Cette séance débute par la correction de l'évaluation faite lors de la séance précédente et poursuit avec la résolution de deux problèmes issus de la leçon 5 de l'ingénierie. Seule la résolution du premier problème a été filmée. Le synopsis de séance ci-après présente le déroulement de la séance.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Col.	Écouter	Rappel de l'objet de l'évaluation Présentation de la séance	
05 :52	Travail en binômes : les élèves travaillent sur leur évaluation en binôme			
	Binôme		P circule de binôme en binôme	Maéva à Thomas : *« Si tu en enlèves, ça fait 32… Alors tu vas mettre 32 ici et tu vas écrire le + 2 ici, et puis ça va te faire le résultat, 34. »*
25 :32	Travail en réunion			
	Problème 1 : Il y a 34 cubes dans la boite. J'en prends 2. Combien y a-t-il de cubes dans la boite maintenant ?			
	Col.	Résolution collective	P recense les réponses 32 / 34 puis, « Donc maintenant ***comment prouver*** *en faisant une addition* ***que c'est 32 ou 34*** *?* ». conclusion : ***« je peux te prouver que ça fait 32, parce que si je prends 32 cubes et je rajoute mes 2 cubes dans la boite, je retrouve mes 34 du départ. C'est ça, la preuve.*** *»*	Maéva semble ne pas savoir ce qu'attend la maitresse, répond par l'addition 32 +2, puis par 32. Jules propose une autre procédure de résolution (**décomptage** à partir de 34). Léon et Thomas proposent 32+2 = 34
31 :41	Problème 2 : J'ai 13 cubes dans la boite. J'en veux 36 en tout. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	Résolution collective	P recense les réponses 23/ 20 / 28 puis *« Je veux la preuve de ce vous me dites »* Reprenant la réponse de Lara : *« 13 + 23 = on sait… On dit 36, mais on va voir »* P fait l'addition en s'appuyant sur la numération. Conclusion : *« j'ai vérifié, j'ai fait le calcul. Donc quelle est la réponse ? »*	Lara : « 13 + 23 = 36 ». Diane tient à exprimer une procédure de résolution **(numération décimale) :** « J'ai remarqué que 10 + 20 ça faisait 30. […] Alors… Déjà 10 +… 30 ça va m'avancer, après 3 + 3, je sais que ça fait 6, donc ça va être 36.
35 37	Problème 3 : Il y a 46 cubes. J'en prends 45. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	Résolution collective	P reformule la question : « Combien dois-je mettre encore de cubes dans ma boite pour en avoir 46 ? » **Conclusion : « si je fais 1 + 45, je trouve 46 »**	Maéva : « *Parce que il y a 45 et après 45 c'est 46 alors on doit en rajouter qu'un.* » Diane : « *moi j'ai fait 45 + 1 et tu m'as mis juste.* » *[…]* « *ça revient au même* »
38 :59	Problème 4 : Il y a 64 cubes. J'en prends 5. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	Résolution collective	P recense les réponses : 5 / 59 / 64. « *Alors 59 ou 64 ? … je veux la preuve maintenant* » « *Alors c'est quoi la réponse, Thomas, parmi ces 3 nombres ?* »	Les élèves sont complètement perdus. Ils ont une égalité en cohérence avec l'énoncé mais ne repèrent pas le nombre solution. **M-L croyait que «** ***les réponses, c'était après le égal, ce qu'on devait trouver*** **»** Chloé sur-compte en rythmant avec les doigts : « *59, 50… euh, 60, 61, 62, 63, 64* »
44 :00	Problème 5 : Il y a 41 cubes. J'en prends 39. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	Résolution collective	P demande à Jules de lire le problème. Et reformule la question : « *combien il y en a dans la boite ?* » « *je veux la preuve par l'addition que mon résultat, c'est 2* »	Réponse de tous : 2. Chloé en rythmant avec les doigts : « 39, 40, 41 » Léon pense que le résultat après le signe =. Marie-Laure a entouré chaque fois le nombre après le signe « = »
47 :24	Problème 6 : Il y a 59 cubes. J'en prends 1. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	idem	« *si j'en prends 1 + quelque chose, j'en aurai 59* »	Marie-Laure et Maéva : 1 + 58 = 59
49 :44	Problème 7 : Il y a 48 cubes. J'en prends 8. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boite ?			
	Col.	idem	« *si j'ai déjà 8 et que je dois aller jusqu'à 48, je vais en rajouter combien ?* »	Léon lit l'énoncé et répond 48. Jules 40. Marie-Laure : « Eh ben ça fait 8 + 40 = 48. »
51 :46	Problème 8 : J'ai 20 cubes dans la boîte. J'en veux 37 en tout. Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boîte ?			
	Col.	idem	P demande à Thomas sa réponse, puis énonce la vérification : « 20+17, 37 »	Thomas : 17.
54 :29	Problème 9 : Dans un troupeau il y a 75 moutons. Un brigand vole 46 moutons. On cherche combien il lui reste de moutons.			
25 :32	Col.		« *je voudrais que vous me mettiez votre réponse, la preuve de votre réponse* »	Diane puis Barnabé lisent le problème
56 :02	Ind.. Col.	Résoudre	P circule dans la classe P recense les réponses : 30 / 29 / 26 / 28 / 35 / 31, puis « *qui a trouvé la preuve qu'il a raison, qu'il ou elle a raison ?* »	Marie Laure dessine des traits en **sur-comptant** à partir de 46, **dénombre** le nombre de traits, écrit 28 dans la case « réponse » puis écrit immédiatement 46+28 = 75 dans « Vérification par calcul ». Léon dessine beaucoup de traits, compte les 46 premiers, puis **dénombre** le reste : 30. LaraJ écrit 75 – 46 = dans la case « Vérification par calcul »
:04 :46		Résolution collective	*P : « si je calcule combien est-ce qu'il me manque entre 46 et 75, je peux trouver combien il m'en manque. »* Interroge Barnabé puis Diane	Léon lit le problème. Barnabé commence une procédure de résolution 40 + 30 = puis s'arrête. Diane : 29 + 46 = 75
			« ***Donc est-ce que quelqu'un a trouvé cette addition : 46 plus quelque chose pour trouver 75 ?*** *»*	Diane réaffirme son opération : j'ai trouvé 29 + 46 = 75
			Vérification de l'opération de Diane puis : « *Alors j'ai bien trouvé 46 + 29 = 75, je reprends ma question : combien il reste de moutons […] 46, 29 ou 75 ?* »	Marie-Laure répond 46. Jules déclare avoir trouvé 29 autrement : « *en faisant 75 – 46 =29* »
1:10:35	Problème 10 : Dans une boite il y a 75 cubes, des bleus et des rouges. 38 sont bleus. Combien y a-t-il de rouges ?			Non filmé : la caméra s'arrête après l'énonciation du problème.

Tableau synoptique 5 : séance 8, site Pascale (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

Lors du premier temps de la séance (travail par binôme sur la fiche d'évaluation intitulée « Je résous des problèmes »), les élèves ont tous répondu par une écriture additive. Or cette écriture ne permet pas à l'enseignante de connaître la réponse au problème : « *Parce que moi quand je lis un calcul, je sais pas si la réponse c'est ce nombre, ce nombre ou ce nombre. Donc il faut me l'entourer pour que je sache quelle est la réponse.* » (Pas-S8-min03 :01). La première partie de cette correction est donc individuelle et consiste à revoir sa copie en entourant les réponses aux problèmes.

La seconde partie, en réunion autour de la maitresse, consiste en une correction collective. Nous présentons ci-dessous un extrait de copie, où nous percevons les hésitations de l'élève (les traces de gommage) quant à ce que la maitresse demande d'entourer. Ces hésitations reflètent les difficultés des élèves à saisir les attentes de l'enseignante.


Je résous des problèmes.

1 3 4
5 2

Prénom : Jean Date : - 6 FEV. 2012

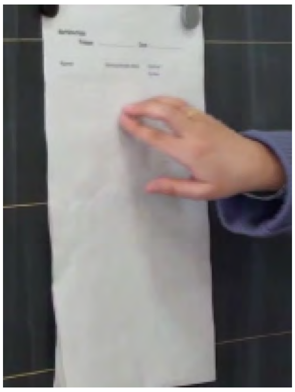
1. Il y a 34 cubes dans la boîte. J'en prends 2.
Combien y a-t-il de cubes dans la boîte maintenant ? 32 + 2 34 V
2. J'ai 13 cubes dans la boîte. J'en veux 36 en tout.
Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boîte ? 23 + 13 = 36 V
3. Il y a 46 cubes dans la boîte. J'en prends 45.
Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boîte ? 1 + 45 = 46 V

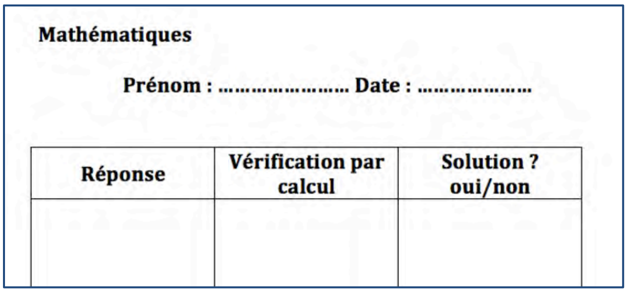
Figure 22 : extrait d'une copie d'élève

Nous synthétisons ci-après les deux points majeurs qui émergent de l'analyse de la séance 8 :

a. Tentative de retour sur l'enjeu initial « la preuve par addition »

Lors de la correction sur une feuille affichée, l'enseignante tente de clarifier la preuve par addition. Utilisant le tableau présenté dans le texte de l'ingénierie (reproduis ci-dessous à côté du photogramme pour des commodités de lecture) elle s'attache à écarter toute explication relative à une procédure de résolution.





Mathématiques

Prénom : ………………… Date : ………………

Réponse	Vérification par calcul	Solution ? oui/non

Figure 23 : support affiché pour la correction de l'évaluation n° 2

Ainsi, pour le premier problème, alors que les élèves veulent détailler leurs procédures de résolution, Pascale les interrompt en leur demandant « *juste la réponse* » (*Ibid.*, min 28 :58). Alors que les élèves proposent deux réponses pour le premier problème, elle demande : « *Alors c'est soit 32 soit 34. Donc maintenant, comment je peux prouver en faisant une addition que c'est soit 32, soit 34, ma réponse ?* » (*Ibid.*, min 29 :26). En concluant le traitement du premier problème par « *je peux prouver que ça fait 32, parce que si je prends 32 cubes et je rajoute mes 2 cubes dans la boite, je retrouve mes 34 du départ. C'est ça, la preuve* » (*Ibid.*, min 31 :41), l'enjeu devient plus net. Pour autant la suite de la séance montre que l'enjeu bascule à nouveau vers une procédure de résolution.

- Perte de l'enjeu et basculement sur la procédure de résolution « recherche du complément »

La fiche d'évaluation distribuée aux élèves a été rédigée à l'aide d'un traitement de texte ; elle comporte une coquille dans les énoncés des problèmes que nous détaillons ci-après. L'enseignante ne s'en aperçoit pas. On peut raisonnablement penser que cette coquille provient d'une utilisation de la fonction « copier-coller » : les questions des énoncés 3, 4, 5, 6 et 7 correspondent à la question du problème 2. Ainsi par exemple, pour l'énoncé « Il y a 46 cubes dans la boite. J'en prends 45 » la question à l'origine « Combien y a-t-il de cubes dans la boite maintenant ? » est devenue « Combien dois-je mettre encore de cubes dans la boîte ? ». L'incohérence de la question au regard l'énoncé initial génère durant tout le temps de la correction un quiproquo sur la nature de la réponse attendue : un nombre mesurant la quantité restante ou égalité de type « $a + b = c$ » ? Les élèves finissent alors par produire une égalité de type « $a + b = c$ » et par repérer le nombre correspondant à la quantité restante. Pour ajouter à la confusion, les traces écrites et les interventions de certains élèves (Pas-S8.min42 :15- min 45 :39) indiquent que pour beaucoup d'élèves, la réponse se situe après le signe « = ». Cet événement rend très difficile la correction, mais aussi conforte le glissement relativement aux enjeux de savoirs déjà évoqué en début d'étape.

La correction du problème 8 est le moment d'une cristallisation de cette modification de l'enjeu de savoir initialement conçu dans l'ingénierie : *« si je calcule combien est-ce qu'il me manque entre 46 et 75, je peux trouver combien il m'en manque***.** *Donc est-ce que quelqu'un a trouvé cette addition : 46 + quelque chose pour trouver 75 ?* » (Pas-S8.min57). En formulant ainsi la question, l'enseignante dévoile son intention didactique : faire émerger une autre procédure de résolution, la recherche du complément.

- Une modification de l'énoncé du dernier problème

Pascale apporte une modification dans l'énoncé du problème 9. Elle ne modifie ni les données, ni sa structure, mais la question. Initialement « combien le berger possède-t-il de moutons maintenant ? », celle-ci devient « On cherche combien il reste de moutons ». Si la question était au départ neutre, le mot « reste » est un mot inducteur du calcul d'une différence. Nous rapprochons cette modification d'un fait similaire lors de la première séance, séance où Pascale avait là aussi modifié un énoncé en faisant porter la question sur « un reste » (*cf.* séance 1). Nous poursuivons la récolte d'indices qui pourraient nous laisser penser que Pascale aurait une perception privilégiée du sens de la soustraction.

2.2.2.2. Conclusions à propos de la deuxième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Pascale.

Rappelons que l'objectif de cette étape est de faire émerger un moyen intellectuel de vérification d'une réponse apportée à un problème soustractif. Nous condensons les analyses des séances de cette étape telles que mis en œuvre par Pascale dans les deux tableaux suivants : le premier à propos de l'évolution du milieu didactique et le second à propos de l'avancée du savoir relative à la preuve d'un résultat. Nous menons l'interprétation de ces constats à la suite.

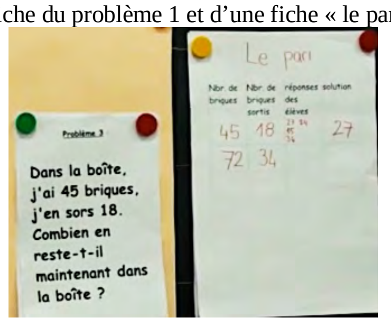
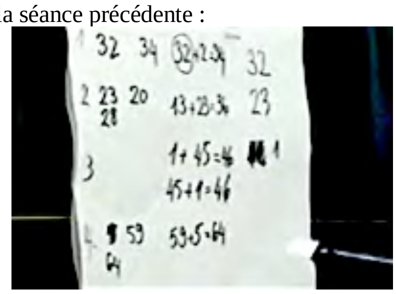
	Séance 6		Séance 8
Modalité	Collective / individuelle	Séance 7 : données vidéo non disponibles	Collective / individuelle
Matériel	Affiche du problème 1 et d'une fiche « le pari » :  Boite et cubes en dizaines ou en unités		Affiche pour la correction de l'évaluation de la séance précédente : 
Langagier	Rassembler, ensemble (0) En tout (7) Trop (3) plus petit (2) à partir de… (7) aller de (11) Jusqu'à, arriver à, aller à (26) Ajouter / rajouter (18) Addition (36) plus (53) moins (9) égal (13) Calcul (5) Preuve / prouver (17) Vérifier (5) trouver (38) Résoudre (4) Gagner (20) perdre (6) pari (39)		Rassembler, ensemble (2) en tout (16) Trop (0), pas assez, trop petit (4) Partir de… (1) Jusqu'à, Arriver à, aller à (5) Ajouter / rajouter (26) Addition (29) plus (65) égal (18) Calcul (23) Preuve/prouver (26) Vérifier (3) Trouver (18) Résoudre (4) Gagner (2) /perdre (0) pari (4)

Tableau 14 : synthèse des trois séances de l'étape 2 « l'addition comme moyen de preuve » du point de vue mésogénétique (Site Pascale)

Le pari	Le pari porte sur une écriture additive et non sur un résultat	Séance 7 : données vidéo non disponibles	Le pari porte sur un résultat au problème 1 puis disparaît
Procédures de résolution	**Recherche du nombre de cubes à ajouter,** à partir du nombre de cubes sortis, **par sur-comptage** en s'appuyant sur la numération décimale		**Recherche d'une égalité de type « a + b = c »,** puis repérage des « nombres-données » du problème pour ensuite déduire le « nombre-solution »
Procédures de vérification intellectuelle	--		**vérification par une addition pour les problèmes 1 et 2**
Vérification empirique	Sur-comptage des cubes restants dans la boite à partir du nombre de cubes sortis.		--
Explicitation **des procédures de résolution** des élèves.	Problèmes 1, 2, 3 et 4 : résolution par retrait avec appui sur la numération décimale		Pb 1 : addition « 32+2=34 », comptage à rebours à partir de 34 Pb 2, 3, 4, 5, 6 : recherche d'une écriture additive du complément (appui sur la numération) Pb 9 : sur-comptage puis écriture d'une addition.

Tableau 15 : synthèse des trois séances de l'étape 2 « l'addition comme moyen de preuve » du point de vue chronogénétique (Site Pascale)

Ces tableaux confirment les modifications substantielles et le réaménagement important de l'étape 2 telle que conçue par Brousseau, ainsi qu'une évolution de son enjeu d'étude :

– Si l'ingénierie la prévoyait en trois leçons (Leçon 3, 4 et 5), l'enseignante choisit de fusionner les deux premières en ne traitant que les problèmes 1, 2 et 3 pour la leçon 3 et les problèmes 1 et 2 pour la leçon 4. Elle justifie ses choix, plus tard lors d'un entretien rétrospectif : « *j'ai condensé les deux leçons ; j'ai chevauché parce que j'ai le souvenir que pour la majorité, c'était compris. Ils arrivaient à faire la preuve par addition. Et* *puis après, du coup, j'ai dû me dire puisque la plupart y arrivent, ça sert à rien que je répète et re-répète.* » (Pas-entr-05/05/2013). Ce propos indique que l'enseignante n'a pas perçu les différents les paliers au sein de l'étape 2 : (1) une preuve collective avec utilisation du matériel, (2) une preuve orale et individuelle sans utilisation des cubes, (3) une preuve écrite et individuelle sans utilisation des cubes.

- Le pari, apprêt didactique dans l'ingénierie didactique constituant une variable de commande de la situation de validation[74] ne porte plus dans cette étape sur la réponse à un problème mais sur l'addition à trous. En d'autres termes, il s'agit de parier que l'on est capable de résoudre le problème en faisant une addition. Le pari ainsi pensé n'ayant pas une réelle assise didactique, il disparaît peu à peu au fil des trois séances : aucun élève ne parie à titre personnel et l'enseignante ne l'utilise plus que pour indiquer sa volonté de voir apparaître une écriture du type « a + b = c » (*cf.* Pas-S8.min26 :52)

- Durant toute l'étape, l'enseignante recueille les réponses des élèves, laissant penser que l'objectif est, tout comme pour la première étape, de vérifier empiriquement les réponses. Ce qui caractérise les choix didactiques de l'enseignante dans la mise en œuvre de cette étape 2 (« L'addition comme moyen de preuve ») est une inflexion radicale vers un objectif non prévu dans le texte de l'ingénierie didactique. Nous extrayons ci-dessous six répliques issues des deux séances filmées significatives de cette inflexion.

Séance 6	9 :02	*Tu as peut-être une autre manière de trouver juste, mais **comment le prouver** en passant par l'addition ?*
	22 :28	***Vous avez résolu le problème d'une autre manière** qui est aussi juste, parce que vous avez trouvé les 27, mais pour gagner mon pari, moi **je voulais une addition**. Je vous l'ai dit au départ.*
	50 :09	*Comment faire pour **trouver** combien il m'en reste dans la boite **en faisant une addition** ?*
Séance 8	26 :42	*pour pouvoir gagner le pari, on va devoir **prouver la réponse en faisant une addition.***
	26 :52	*ici on va faire le pari **qu'on peut répondre à la question en faisant une addition.***
	1 :07 : 03	*Alors si le brigand, avant qu'il en vole 46, si je vais de mes 46 moutons jusqu'à mes 75, j'aurai la totalité. Donc **si je calcule combien est-ce qu'il me manque entre 46 et 75**, je peux trouver combien il m'en manque. Donc **est-ce que quelqu'un a trouvé cette addition : 46 + quelque chose pour trouver 75** ?*

Tableau 16 : extraits de répliques de l'enseignante

[74] Nous entendons ici situation de validation au sens de la TSD, dans la mesure où la validation empirique du milieu didactique est insuffisante et nécessite une validation intellectuelle. (Bessot, 2003, p.16)

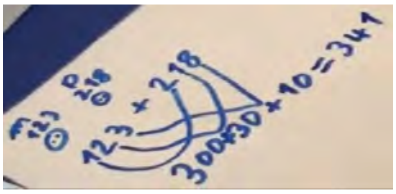
Ces extraits renforcent par leur récurrence notre interprétation : l'enseignante basculant de la vérification (en gris sur le tableau) à la construction d'une procédure de résolution par recherche d'un complément (en blanc sur le tableau), procédure inconnue des élèves jusqu'alors. C'est pourquoi Pascale introduit peu à peu dans le milieu didactique au fil de l'action conjointe avec ses élèves, les ingrédients nécessaires à la compréhension de cette nouvelle technique de résolution. Dès le premier problème, elle amorce une première approche de la recherche du complément en ouvrant la boite pour, non pas compter les cubes restants, mais les sur-compter aux cubes déjà sortis : « *c'était pour leur montrer qu'on peut calculer juste la différence, pour leur montrer visuellement cette différence, mais sans faire une soustraction.* » (Pas-entr-03/05/2016). Ensuite, elle introduit rapidement des expressions telles que « *à partir de…* » (7 fois), « *aller de…* » (11 fois), « j*usqu'à…, arriver à…, aller à…* » (26 fois), mettant ainsi en place les prémisses de l'addition à trous. Enfin, lorsqu'elle demande en fin de séance 8 « *est-ce quelqu'un a trouvé cette addition ? 46 plus quelque chose pour trouver 75 ?* », Pascale énonce clairement qu'il s'agit de rechercher un complément.

Pour conclure sur cette étape, la vérification devient ici non pas une preuve s'appuyant sur la définition d'une différence, c'est-à-dire « si a – b = c alors c est le nombre qui, ajouté à b 'donne' a » mais une confirmation par comparaison avec un résultat obtenu par une autre procédure, ici par la recherche d'un complément. A cette étape de l'analyse, quelles sont les déterminations qui nous semblent peser sur les pratiques observées ? Nous pensons trouver des explications des inflexions observées en revenant sur le contenu des documents curriculaires officiels : deux documents, les moyens d'enseignements COROME et l'ouvrage « Apprentissage et enseignement des mathématiques » apportent un éclairage sur la manière dont l'enseignante conduit cette étape. Nous en extrayons dans chacun d'eux un passage :

- « Le champ de l'addition englobe les deux opérations réciproques : l'addition (a + b = c) et la soustraction (c – a = b ou c – b =a). On ne trouvera donc pas de module sur la « soustraction », celle-ci étant intégrée aux activités sur l'« addition », envisagée dans l'acceptation large du terme. » (Moyen COROME, p.181).
- « Toute situation additive peut être exploitée en termes de soustraction pour montrer la complémentarité des deux opérations. […] L'enfant doit le constater, le pratiquer dans de multiples occasions, y réfléchir, comparer les écritures pour acquérir cette conviction que l'addition et la soustraction entretiennent des liens très étroits. » (Apprentissage et enseignement des mathématiques, p.100).

Nous rapprochons ces deux extraits des propos de l'enseignante : « *à Genève, nous travaillons en 4P l'addition et la soustraction en parallèle… par la recherche du complément, même si ça bascule dans l'addition lacunaire, qu'est-ce que ça peut faire ? Ce qui compte, c'est qu'ils ont compris que tu peux compléter par l'addition.* » (Pas-entr-18/08/2016). Il nous semble alors possible de considérer qu'en réalité l'étape est menée par Pascale, non pas sous couvert du texte de l'ingénierie didactique, mais sous couvert des documents institutionnels. Ce poids des pré-construits institutionnels demande néanmoins à être nuancé, notamment en continuant l'enquête de façon à identifier d'autres déterminants, plus individuels, relevant de l'épistémologie pratique de ce professeur. Car dans cette étape nous observons une enseignante qui, tout comme ses élèves, est aussi aux prises avec un contrat pérenne dicté par sa pratique d'enseignement usuelle, pratique elle-même dirigée par son institution. Nous continuons donc l'enquête, en nous déplaçant, pour les raisons que nous avons indiquées dans la section méthodologique[75] vers l'analyse de l'étape 4 (« La stratégie des essais »).

Avant de poursuivre avec l'analyse de l'étape 4, indiquons que durant l'étape 3 (« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signes + et –. Calcul mental pour soustractions techniquement faciles »), les élèves ont établi le lien entre différence et soustraction, le codage de la soustraction par le signe « – » a été introduit. Comme prévu par l'ingénierie, les élèves de Pascale sont capables traduisent leurs stratégies de résolution et de calcul par des écritures mathématiques.



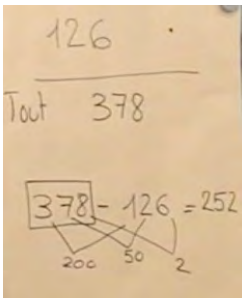


Figure 24 : traces écrites en fin d'étape 3

Par ailleurs, lors de la dernière séance de cette étape 3, Pascale introduit une schématisation des problèmes en terme de « partie » et de « tout ». Ainsi, pour le calcul de 345 – 83 deux schématisations sont présentées, qui seront reprises lors de l'étape 4 :

[75] Rappelons que compte tenu de la quantité des données recueillies et transcrites, nous avons considéré peu décisif de faire une analyse mésodidactique détaillée des séances de l'étape 3, qui comme nous l'avons indiqué en section méthodologique, relèvent d'un travail de la technique fort bien maitrisé par les enseignantes observées. Il sera de même pour les deux autres cas.

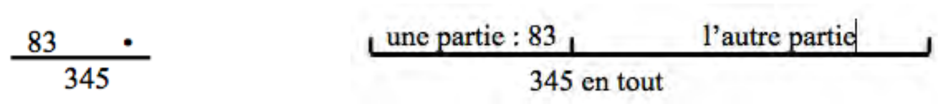


Figure 25 : exemple de schématisation d'un problème (Séance 8, problème 4)

Ces deux schématisations permettent d'introduire la technique de l'addition lacunaire.

A la fin de cette étape, les élèves sont donc capables de produire une réponse à un problème soustractif par une écriture soustractive et sont capables d'effectuer l'opération dès lors qu'elle s'inscrit dans l'une des catégories de calcul prévu par l'ingénierie.

Nous rappelons au lecteur que l'étape 3 s'est déroulée sur quatre séances, la dernière étant la séance 12.

2.2.3. Analyse de l'étape 4 : « La stratégie des essais »

Cette quatrième étape a pour objectif de faire « formuler, reconnaître, identifier » (Berté, 1996) par les élèves les procédures de résolutions mises en œuvre jusqu'à présent par les élèves. Trois leçons y sont consacrées dans le document. À ce stade de l'ingénierie, la plupart des élèves identifie les problèmes relevant d'une différence et savent écrire la solution sous la forme d'une écriture soustractive. Par contre, ils ne savent pas effectuer les opérations : les variables numériques sont telles, que les calculs ne correspondent à aucune des catégories étudiées à l'étape 3. L'étape 4 est une étape « pivot » entre la première partie de l'ingénierie qui vise la reconnaissance, la résolution de problèmes soustractifs (l'addition étant alors un moyen de vérifier son résultat), l'écriture de la réponse sous la forme d'une écriture de type « a – b » et la seconde partie qui vise à élaborer des techniques de résolution de plus en plus fines pour ensuite déboucher sur un algorithme de la soustraction.

Il s'agit dans cette quatrième étape de faire émerger la méthode de la fausse position[76] comme procédure de résolution et initier un algorithme de la soustraction. Pour ce faire, les variables numériques des problèmes proposés ont été choisies de façon à provoquer des erreurs, erreurs répertoriées dans de multiples travaux de recherche (*cf.* section 2.2.2.2 du chapitre 1 de la partie1). La mise en exergue des erreurs des élèves est un premier pas vers le sens de l'algorithme de la soustraction.

[76] La méthode de la fausse position consiste à proposer une réponse que l'on pense proche de la solution puis, après vérification, à la corriger en tenant compte de l'écart constaté entre le résultat obtenu et le résultat attendu.

Les problèmes retenus par Pascale dans cette étape 4 relèvent de combinaisons d'états (séances 13 et 14), de transformation d'états (séances 14 et 15) et de comparaison d'états (séance 15). Tous mettent en jeu des variables numériques amenant les élèves à imaginer des procédures pour contourner une soustraction qu'ils ne savent pas effectuer. L'addition devient alors un outil au service de la résolution : elle permet aux élèves de développer une stratégie de résolution par essais.

2.2.3.1. Analyse mésodidactique des séances

2.2.3.1.1. Séance 13

L'intention didactique pour Pascale dans cette séance est de faire expliciter l'ensemble des procédures de résolution produites par les élèves. Il ressort des données vidéographiques qu'enseignante et élèves se focalisent sur l'explicitation de deux stratégies opératoires :

- La première est un procédé s'approchant de l'addition lacunaire. La solution est obtenue par sur-comptage de dix en dix, puis par ajustement à l'unité pour atteindre le tout.

- La seconde est un procédé s'appuyant sur la soustraction. La soustraction étant une opération difficile à effectuer, la difficulté est contournée en décomposant le nombre à soustraire.

Nous détaillons les modalités de mise en œuvre à partir du synopsis ci-après qui synthétise le déroulement de la séance.

L'enseignante débute la séance par un appel à la mémoire didactique qu'elle prend en grande partie à sa charge. Pour ce faire, elle utilise une trace écrite construite lors de l'étape 3 précédente (*cf.* Figure 26) que nous décrivons ci-après. Ce rappel poursuit deux objectifs : réduire l'hétérogénéité entre les élèves et remettre en mémoire deux écritures de la solution, l'une additive, l'autre soustractive

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			**Appel à la mémoire didactique :** *1) « quand on avait le tout, on pouvait faire une partie plus une partie et on trouvait mon tout, ou bien une partie moins une partie et on trouvait mon tout »* 2) *« dessiner une ligne avec mon tout et puis de mettre une partie plus une autre partie pour avoir mon tout.* 3) *« de poser soit une soustraction, soit une addition en ligne, et puis on faisait avec notre système où on mettait les unités ensemble, les dizaines ensemble, les centaines ensemble.4) si je remonte encore plus plus plus en arrière, tout au début, nos problèmes, on les faisait avec la boite ! »*	Marie-Laure : *« En fait, dans une boite, il a 345 cubes, il y a des rouges et des bleus, il y a 83 cubes rouges et puis il y a 262 cubes bleus. Donc en fait nous en fait on cherchait combien est-ce qu'il y avait de cubes bleus, et puis la réponse, c'était 262 et puis on a trouvé ça dur parce que le calcul il était assez dur.* Léon : *Parce qu'on pouvait pas faire 4 dizaines – 8 dizaines.*
03 :54	Problème 1 : un cahier a 92 feuilles, 34 sont écrites. Combien y a-t-il de feuilles blanches dans ce cahier ? (rép. 58)			
	Col.	Lecture du pb.	P reformule le problème : « il y a 92 pages feuilles en tout, mais seulement 34 sont écrites. On vous demande combien de feuilles sont blanches. Vous avez le droit d'utiliser la méthode qui est la plus facile pour vous. »	Difficultés de lecture.
6 :50	Ind.	Résoudre le pb.	P circule dans la classe	Procédures des élèves : addition lacunaire 34 + ••• = 92 soustraction en ligne : 92 – 34 = 62 ; Calcul sur les dizaines puis les unités ; dessin ;
14 :22	Col.		P recueille les résultats des élèves	92 – 34= 60 ou 92 – 34= 62 ou 34 – 92 = 62 34 + 66 = 92 ou 34 + 58 = 92
16 :56	Col.	Énoncer deux écritures : l'addition à trou et la soustraction	Repérage des données du problème : « *qu'est-ce qu'on nous donne comme information dans ce problème ?* » P énonce une procédure « *Donc si je prends mes 34 feuilles écrites dans mon cahier, plus mes feuilles blanches, en tout j'aurais mon cahier de combien de pages* […] *La majorité d'ailleurs, vous avez posé un autre calcul.* » puis interroge Schoen sur une autre procédure possible. »	Schoen : « *Parce que c'est mon tout et que… que je peux enlever le… toutes les pages qui sont écrites, et après on doit vérifier combien on a de pages blanches.* »
20 :48 22 :16		Résoudre par sur-comptage	P interroge Léon puis « *Alors, pour aller progressivement,* ***pour être sûr que tout le monde comprend ce que tu dis****, Léon, on va aller de 10 en 10. Vous êtes d'accord ?* […] *On n'est pas encore dans les 100, donc on peut calculer de 10 en 10.* » P accompagne le comptage des élèves avec ses doigts jusqu'à 94. P recommence le comptage et arrivée à 94 : « *oh ! j'en ai 2 de trop ! alors qu'est-ce que je fais de ce 10 ?* »P reprend le comptage de 10 en 10 jusqu'à 84 puis ajoute 8 **Conclusion :** « *Là j'ai résolu en disant une partie plus une partie, j'ai mon tout* »	Léon : « *On peut commencer à 30 pour trouver 90, ben ça va faire 60, parce que 30 + 60 c'est égal à 90. Et 4 + 2, c'est égal à 6.* » 1er comptage : les élèves comptent de 10 en 10 de 34 à 94. Spontanément, réactions : « *il faut enlever 2 dizaines* », « *il faut enlever 2 unités* » 2nd comptage : E1 : « *tu enlèves 2 unités à 60.* » E2 : « *on met 8 unités à 50* » 3ème comptage : les élèves accompagnent le comptage
26 :29		Résoudre par soustraction.	Essai de résolution par l'autre procédure de calcul. P : « *si j'ai 2, Schoen, j'ai 2 unités, est-ce que je peux enlever 4 unités ?* » Comparaison avec l'addition : « *Quand je fais une addition, je peux. Si vous dites 2 + 3 ou 3 + 2, je vais trouver… ?* » Mise en exergue de la non commutativité de la soustraction (*vs* l'addition) **Conclusion :** « *ici, ben je suis vite bloquée, parce que j'arrive pas à enlever à mes 2 dizaines mes 4 dizaines.* […] *on va utiliser une autre méthode* [l'addition] »	E : « *zéro surement !* », « *c'est impossible !* » Schoen *: « Mais on peut faire l'inverse.* »
32 :05	Problème 2 : un cahier a 92 feuilles, 25 sont déjà écrites. Combien y a-t-il de feuilles encore blanches dans ce cahier ?			
	Col.	Lecture du pb.	P aux réactions des élèves : « *qu'est-ce qui change ?* »	Réactions spontanées : « *c'est encore le même !* »
33 :02	Ind.	Résoudre	P circule d'élève en élève. P demande de faire la vérification.	Après vérification, ajustement des réponses pour certains
40 :22	Col.	Résolution par sur-comptage	P demande aux élèves d'expliquer « *comment ils ont fait pour résoudre le calcul ?* » P reprend l'explication, puis oriente sur la recherche du complément, en faisant compter de 10 en 10 jusqu'à 95.	Plusieurs élèves ont trouvé 67, mais ne savent dire comment ils ont trouvé. Diane fait le lien avec le premier problème : « *c'est qu'avant on en avait 34, je suis allée jusqu'à 25, ça m'a fait 9 nombres différents. Après, j'ai rajouté les 9 aux 58 qu'on avait trouvés, et j'ai trouvé 67.* » ; Chloé *: « j'en enlève 3 » ;*
47 :51		Écriture de deux égalités à partir de 25 + 75 = 92	P revient sur une question de Maéva : *« je peux vérifier quand je fais une soustraction avec une addition, est-ce que je peux vérifier une addition avec une soustraction ?* » Écriture de 2 égalités *à partir de l'écriture 25 + 67 = 92*	Barnabé et Es : 92 – 67 = 25 Diane : 92 – 25 = 67
49 :51	Bilan : *« Est-ce qu'il y a des questions ? »*			
51 :14	Léon « *j'arrivais pas à faire 92 – 25* » réponse de P : « *c'est bien ce calcul-là qui me pose problème pour trouver 67, c'est parce qu'à 2, je n'arrive pas à enlever mon 5. Aïe aïe aïe ! Qu'est-ce qu'on va faire ?* »			

Tableau synoptique 6 : séance 13, site Pascale (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

- **Un appel à la mémoire didactique pour réduire le différentiel d'hétérogénéité**

Pascale remémore « *les manières de faire* » pour résoudre une telle opération : « *Vous vous souvenez, pour résoudre un problème,* [désignant la schématisation 1] *quand on avait le tout, on pouvait faire une partie plus une partie et on trouvait mon tout,* [désignant la schématisation 2] *dessiner une ligne avec mon tout et puis de mettre une partie plus une autre partie pour avoir mon tout,* [accompagnant de gestes] *poser soit une soustraction, soit une addition en ligne, et puis on faisait avec notre système où on mettait les unités ensemble, les dizaines ensemble, les centaines ensemble.* [se rapprochant de la boite et des cubes] *si je remonte encore plus plus plus en arrière tout au début, nos problèmes, on les faisait avec… ? La boite* » (Pas-S13-min13 :13).

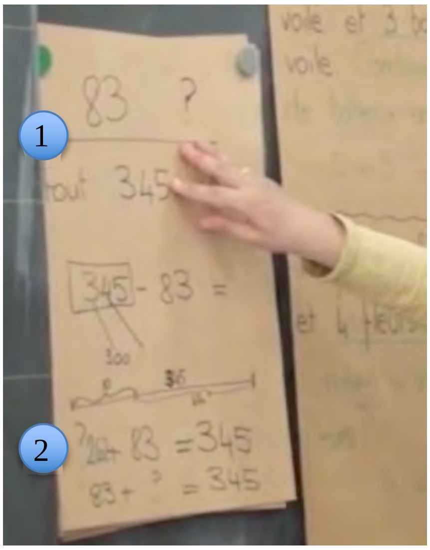


Figure 26 : appel à la mémoire didactique (*cf.* séance 8, étape 3)

L'enseignante profite de cette remise en mémoire de l'ensemble des moyens à disposition à ce stade de l'apprentissage pour, en s'appuyant sur des ostensifs graphiques, langagiers et gestuels, conforter un des sens de la soustraction : si a – b = d alors d est tel que d + b = a.

- Le basculement de l'enjeu d'étude de la reconnaissance de problèmes soustractifs vers la construction de techniques de résolution.

L'enseignante explicite progressivement l'enjeu d'étude aux élèves :

- lors du rappel à la mémoire didactique, en amenant les élèves à énoncer les difficultés rencontrées à la séance précédente : *« la réponse, c'était 262 et puis on a trouvé ça dur parce que le calcul il était assez dur »* (Pas-S13-min0 :48) *« on n'arrivait pas à faire 4 dizaines moins 8 dizaines »* (Pas-S13-min1 :02) ;
    - lors de la résolution du premier problème en orientant la discussion sur la soustraction posée : « *Mais plusieurs d'entre vous, vous avez posé ce calcul. Il est absolument juste, par contre il faut qu'on vérifie* » (Pas-S13-26 :29) ;

– lors de la conclusion de la séance : « Mais c'est bien ce calcul-là [92-25] qui me pose problème pour trouver 67, c'est parce qu'à 2, je n'arrive pas à enlever mon 5. Aïe aïe aïe ! Qu'est-ce qu'on va faire ? » (Pas-S13-min50 :58).

Par ces interventions, Pascale indique ainsi aux élèves que l'enjeu d'étude glisse de la reconnaissance de problèmes soustractifs à la recherche de techniques opératoires permettant d'effectuer des soustractions jusqu'ici difficiles pour les élèves.

- La mise en exergue de la non commutativité de la soustraction pour justifier l'apprentissage d'un nouveau savoir

Lors de la résolution du premier problème (min 00 :00), l'enseignante exhibe des réponses d'élèves qu'elle a repérées dans son tour de classe. En posant pose les questions telles que « *Est-ce que je peux faire 34 – 92 ?* », « *j'ai deux unités, est-ce que je peux enlever 4 unités ?* » elle provoque la réponse « *mais on peut faire l'inverse* », ce qui lui permet de comparer la soustraction et l'addition : « *si vous dîtes 2 + 3 ou 3 + 2, je vais trouver 5.* […] *Mais si je fais 5 – 2, ça fait 3, mais si j'inverse, et puis je fais 5 – 2, est ce que je peux faire 2 – 5 ?* ». L'affichage (*cf.* Figure 27) permet de mémoriser cette différence entre les deux opérations et de justifier la nécessité d'apprendre un savoir nouveau : « *ça veut dire qu'avec mon système en ligne, ici, ben je suis vite bloquée, parce que j'arrive pas à enlever à mes 2 dizaines mes 4 dizaines.* »

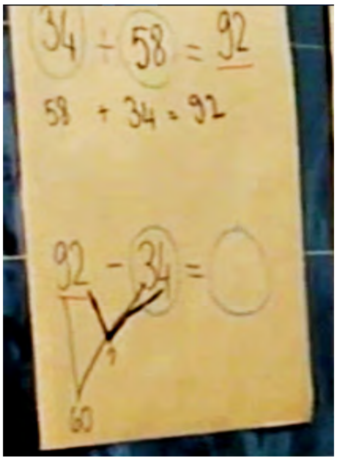


Figure 27 : mise en exergue de la nécessité d'apprendre un nouveau savoir

- La généralisation de l'équivalence des égalités a + b = c et a = c – b, pour a, b et c entiers positifs

Lors de la résolution collective du premier problème, Maéva pose la question « *la vérification pour le moins c'est le plus, mais quand on fait des additions, est-ce que la vérification, c'est encore le moins ?* ». L'enseignante ne répond pas immédiatement, et ne la prend en compte que lors de la résolution du second problème (min 0 :54) en la renvoyant à tous les élèves « *est-ce que je peux vérifier une addition avec une soustraction ?* ». Nous retrouvons ici une manière de faire habituelle à l'enseignante : retourner la question aux élèves et les obliger à prendre en charge l'avancée du savoir. Ici, à partir de l'égalité « 25 + 67 = 92 », les élèves produisent deux nouvelles égalités : « 92 – 67 = 25 » et

« 92 – 25 = 67 ». Nous faisons ici l'hypothèse que Pascale a profité de la question de Maéva pour faire émerger cette équivalence entre les trois écritures, écritures indiquées dans les Moyens COROME : « Le "champ de l'addition" englobe les deux opérations réciproques : l'addition (a + b = c) et la soustraction (c – a = b ou c – b = a) » (p.182)

Le texte de l'ingénierie didactique nous indique que cette séance initie la résolution des problèmes par essais : « ceux qui ont une réponse doivent la vérifier pour être sûrs que c'est la bonne solution. Si ce n'est pas la solution, faire un autre essai » (Berté, 1996, p. 33). Or, nous observons ici une résolution des problèmes par la recherche du complément, procédure et non par essais successifs. Si Pascale fait bien écrire la solution des problèmes sous la forme d'une écriture soustractive, elle ne poursuit pas dans cette direction, privilégiant la recherche du complément. Ce constat nous incite à penser que l'enseignante poursuit en réalité le travail de construction de l'addition lacunaire, travail entamé lors de l'étape 2.

Nous notons par ailleurs une avancée chronogénétique relativement à la soustraction : la mise en exergue de la non commutativité de l'opération ainsi que l'équivalence entre écritures additive et soustractive. Nous n'interprétons pas cette avancée comme une anticipation réfléchie sur une séance à venir, mais plutôt comme l'exploitation spontanée *in situ* de certaines erreurs ou réactions d'élèves.

2.2.3.1.2. Séance 14

Cette séance, qui reprend les problèmes de la leçon 10 du texte de l'ingénierie, poursuit la recherche de procédés opératoires pour effectuer des calculs que les élèves ne savent pas encore réaliser. Ils ont à « imaginer » (Berté, 1996, p. 36) des techniques leur permettant d'obtenir la solution. Le texte de l'ingénierie didactique précise que « certains élèves n'imaginent pas que des essais peuvent amener à la solution » (*Ibid.*)

L'objectif de la séance est donc annoncé dès le début de la séance : il s'agit de « *se dire* » les procédés de calcul effectués. L'enseignante laisse les élèves libres de procéder à leur façon pour ensuite « *regarder si toutes les méthodes sont les mêmes, s'il y a des différences, lesquelles vous avez utilisées* ».

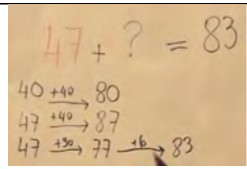
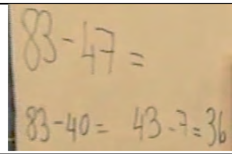
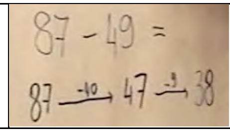
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			« *Aujourd'hui, je voudrais qu'on puisse se dire quelle méthode on va utiliser pour résoudre un problème.* […] *vous pourrez utiliser la méthode que vous voulez* […] *ensuite, on regardera si toutes les méthodes sont les mêmes, s'il y a des différences, lesquelles vous avez utilisées.* »	
2:19	**Problème 1 :** sur un bateau, il y a 83 cahiers, des rouges et des verts. Il y a 47 cahiers rouges. Combien y a-t-il de cahiers verts ? (rép. 36)			
2 :32		Lire le problème	« *Alors je vais vous donner un stylo, quelques minutes pour trouver avec la méthode que vous voulez, la solution du problème.* »	Lecture de l'énoncé par deux élèves.
4:12	Ind.	Résoudre le problème	P circule d'élève en élève.	Procédures : écriture de l'addition lacunaire puis schéma pour trouver le complément / 83 – 47 = 34 puis preuve suivi d'un ajustement / soustraction (par la conservation des écarts) / addition (83+47)
9 :43	Col.	Résolution collective	Recension des réponses : 36 et 37 « *Qui est-ce qui a envie de raconter comme… qu'est-ce qu'il a pensé en voyant le problème et quelle méthode il a choisie ?* »	Tous ne donnent pas leurs réponses ou changent d'avis.
11 :33		Résoudre avec une addition	P interroge Diane, qui a fait avec une addition « je vois que tu as fait une addition » Schématisation puis « comment je pose mon addition ? » → Interroge Thomas. Écriture de l'addition lacunaire.	Diane : « j'ai compté en dizaines, ça faisait 87 » ; Thomas : « 47 + 83 » ; Thomas corrige son erreur à l'aide de la schématisation au tableau.
15 :08			S'adressant à Diane « *Mais moi je voulais que tu m'expliques qu'est-ce qu'on a comme information.* […]. *Parce que ça, c'est une méthode qui marche très très souvent, en vous disant : ben tiens, qu'est-ce que je cherche ? Est-ce que je cherche mon tout ou une partie ?* » P écrit au fur et à mesure sur l'affiche les explications des élèves (cf. ci-dessus). **Conclusion :** « *j'ai calculé de 47* […] *j'ai complété la différence pour aller à 83* » 	Diane : « 4 + 4 = 8 donc 40 + 40 = 80 » puis « *40 + 47, ça va pas jouer parce que ça va faire 87. Alors il faut forcément ben une dizaine de moins, et après, les unités qui restent* ». Accord des élèves : « *il faut enlever une dizaine* », puis Schoen ajuste en comptant sur ses doigts.
19 :44			« *Est-ce que quelqu'un a fait une autre méthode ?* » P considère que c'est la même méthode que celle de Diane	Chloé a sur compté de dizaine en dizaine de 47 à 87 puis a enlevé 4.
21 :05			« *c'est une méthode tout à fait possible, Lara, mais je ne vais pas l'expliquer parce qu'on n'a pas appris à faire les soustractions en colonnes.* »	Lara a fait une soustraction en colonne, s'appuyant sur la conservation des écarts.
21 :51		Résoudre avec une soustraction	« *Est ce que je peux poser une soustraction à partir de ce problème ?* » P en profite pour faire discuter sur l'écriture soustractive pour se mettre d'accord sur l'écriture. « *comment je vais faire pour faire l'opération ?* » P suit Diane et compte à reculons de 10 en 10 de 83 jusqu'à 43, puis continue en s'appuyant sur les doigts jusqu'à 36. 	Thomas se trompe : 43 – 87 mais se corrige très vite 83 – 47 Diane propose de calculer 83 – 43 en enlevant directement 40 puis 7 Les élèves accompagnent l'enseignante dans le comptage à rebours.
27 :07			Conclusion : « *Donc je peux résoudre, j'ai déjà deux méthodes pour trouver la réponse à cette question. Soit je passe par l'addition et je complète jusqu'à mon tout, hein, Schoen, soit je pars de mon tout, j'enlève une partie, et je trouve l'autre partie. Et puis étant donné que j'ai pas appris à faire des calculs encore en colonnes, même si certains, vous avez sûrement appris à la maison, eh bien j'ai d'autres manières de faire : j'enlève d'abord mes dizaines et ensuite j'enlève mes unités.* »	
27 :53	**Problème 2 :** J'ai 49 cubes bleus dans le plateau. Dans la boite, il y a des cubes rouges. Je prends les cubes bleus qui sont dans le plateau et je les mets dans la boite avec les rouges. Je compte tous les cubes dans la boite. Il y en a 87. Combien de cubes rouges y a-t-il dans la boite ?			
	Ind.		P lit le problème « car il y a beaucoup de mots »	
36 :33	Col.	Débat / Résolution collective	Discussion sur l'écriture de Schoen P demande les deux « méthodes » : la soustraction et la recherche du complément (addition lacunaire) Seule une technique pour faire la soustraction est effectuée. 	Schoen : 49 – 87 Jules décompte de 10 et 10 à partir de 87. Puis les élèves décomptent de un en un
47 :14			P [montrant les deux problèmes] : « lequel est le plus difficile ? » « En fait, c'est le même genre de problème, seulement celui-là il a l'air plus compliqué parce qu'il y a plus de mots. » P en profite pour revoir les données des deux problèmes en terme de « tout » et de « parties ».	Réponses : « le deuxième ! »
49 :29	**Petit contrôle : contrôle n° 4.** Observations : 8 élèves écrivent la soustraction , 3 élèves l'addition lacunaire , 1 élève additionne les données de l'énoncé			
1 :03 :49	interruption de la vidéo			

Tableau synoptique 7 : séance 14, site Pascale (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Comme à la séance précédente, l'affiche construite lors de l'étape 3 reste présente au tableau (*cf.* Figure 28).

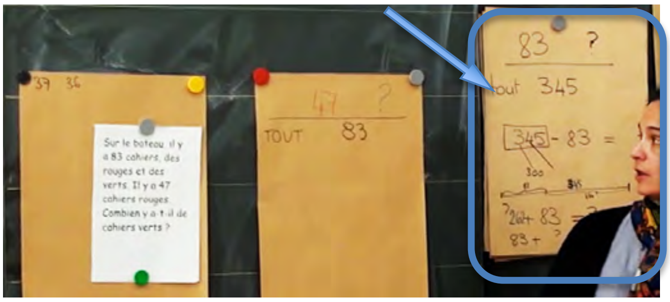


Figure 28 : utilisation d'une affiche comme mémoire didactique

Cet élément mésogénétique, relevant d'une institutionnalisation, sert de mémoire didactique à la classe.

- Un élément mésogénétique important : la schématisation du problème

Après un temps de recherche individuel, l'enseignante recueille les résultats des élèves puis interroge les élèves sur les données du problème (min 9 :43). S'exprimant en terme de « *tout* » et de « *parties* », elle cherche à faire reconnaître les procédés opératoires pour sa résolution. Nous constatons qu'elle reprend systématiquement la schématisation effectuée à la séance précédente en disposant les nombres de la même façon : une ligne horizontale séparant le tout des parties, les données du problème disposées à la même place.

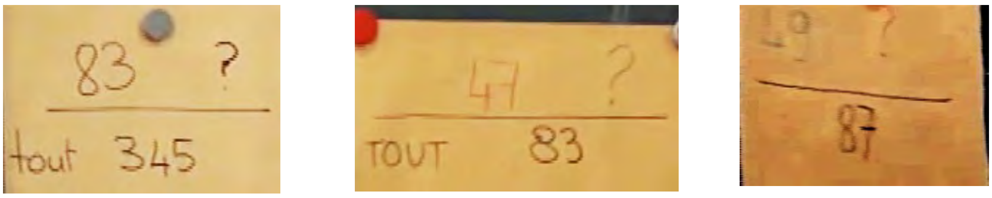


Figure 29 : schématisation des problèmes

Cette disposition nous conduit à penser que l'enseignante présente implicitement cette schématisation comme un modèle facilitant la reconnaissance des opérations pour résoudre le problème. Nous citons ici trois interventions de l'enseignante désignant, à chaque fois, ce schéma.

Reconnaissance du problème	min 15 :15	*« ça c'est une méthode qui marche très très souvent, en vous disant : ben tiens, qu'est-ce que je cherche ? Est-ce que je cherche mon tout, ou une partie ? »*
Traitement par une addition	*min 18 :51*	*« J'ai calculé de 47, Lara, combien est-ce qu'il me manque. J'ai complété la différence pour aller jusqu'à 83 »*
Traitement par une soustraction	*min 24 :07*	*« ben ma soustraction, elle part de mon tout. Je pars de mon tout, je vais enlever une partie et je vais trouver l'autre partie »*

Tableau 17 : Indications d'institutionnalisation s'appuyant sur la schématisation du premier problème

En réitérant des institutionnalisations, Pascale met l'accent sur un trait pertinent du milieu didactique qu'elle souhaite rendre effectif : la schématisation affichée devient ainsi un élément du milieu didactique permettant à l'enseignante d'influer sur la chronogenèse. Précisons :

Le premier problème est un problème de combinaison d'états. Les élèves reconnaissent un problème soustractif sans difficulté. La schématisation affichée conforte les élèves dans l'écriture soustractive du résultat, 83 – 47. Par contre, le second problème est jugé plus « difficile » par les élèves (min 47 :14). Plusieurs raisons peuvent être avancées : (i) la longueur du problème (61 mots), (ii) les manipulations décrites dans le problème rendant son « imagination » difficile pour les élèves, (iii) la structure du problème que les manipulations décrites dans le problème incitent à caractériser comme une transformation d'états avec recherche de l'état initial, structure d'ailleurs pointée par de nombreux chercheurs comme source de difficultés pour les élèves (*cf.* 2.2.1.1.2). La schématisation est alors ici un élément mésogénétique décisif pour la reconnaissance du problème.

- Une chronogenèse orientée : deux traitements opératoires menés en parallèle

Rappelons que l'enseignante alterne des temps de recherche individuel et des temps de recherche collectif. Lors de la recherche individuelle, l'enseignante repère les élèves sur lesquels elle s'appuie dans le temps collectif. Elle donne la parole tant à des élèves en difficultés qu'à des élèves ayant développé des procédures correctes. Ainsi, Thomas (min 11 :33) qui fait la somme des données du problème, lui donne l'occasion de revenir sur l'identification des données et la reconnaissance du problème. Schoen, qui propose une écriture soustractive pour laquelle le premier terme est inférieur au second (min 36 :33), lui permet de revenir sur la non commutativité de la soustraction. Diane, Chloé et Jules principalement recherchent le complément (min 11 :33 ; 15 :08 ; 19 :44) ou Diane et Jules effectuent la soustraction par retraits successifs (min 25 :51 ; 36 :33). Ces élèves lui donnent ainsi la possibilité d'orienter le traitement opératoire selon deux directions : l'une proche de l'addition, l'autre proche de la soustraction (min 15 :08 ; 21 :55 ; 36 :33). Ainsi, Pascale dans une position topogénétique haute, usant d'effets Topaze, guide les élèves dans le sur-comptage ou le comptage à rebours. Nous illustrons cette position par un extrait de la transcription de séance, accompagné d'un photogramme montrant le geste de l'enseignante accompagnant le sur-comptage.

P : Donc à 83, j'enlève déjà mes 40. Et puis après j'enlèverai mes… ?
E : 7.
P : Alors enlevons 40 à 83. Je vais aller à reculons. 83…
P et Es : 73, 63, 53, 43. Alors je suis à 43. Et puis maintenant il faut que j'enlève… ?
Es : 7.

P : 7 unités. Alors 43, je peux même aller à reculons, vu que c'est un petit chiffre, hein. 43…
L'enseignante accompagne les élèves à l'aide d'une gestuelle s'appuyant sur les doigts.
Es : 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36.
P : Ah !
E : On a trouvé la réponse.
P : C'est bon ?
Es : Oui.
P : 36.
P : C'est les bleus

Extrait 51 : Pascale – Séance 14 — effet topaze lors du problème 1 (min 21 :51)

Il ressort de l'analyse vidéo de séance, que les deux problèmes proposés aux élèves sont résolus par ajouts successifs (Figure 30) ou par retraits successifs (Figure 31).

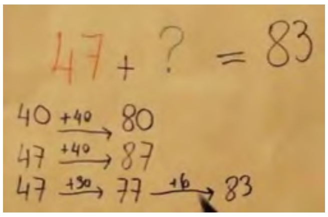


Figure 30 : ajouts successifs (site de Pascale)

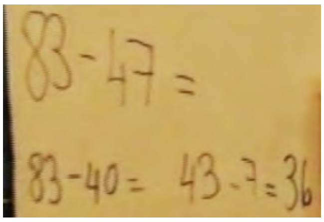


Figure 31 : retraits successifs (site de Pascale)

Bien que mentionné explicitement dans le texte de l'ingénierie (Berté, 1996) les élèves ne mettent à aucun moment leurs résultats à l'épreuve d'une vérification par addition. Si l'enseignante laisse bien un temps de recherche individuel, elle dirige le débat collectif et contrôle les interactions des élèves. De ce fait, ne leur laissant pas la possibilité de produire une erreur, les résultats n'ont plus besoin d'être prouvés. La position topogénétique haute de l'enseignante a pour conséquence de porter la séance sur un autre enjeu de savoir : contourner une soustraction difficile à effectuer, soit par la recherche du complément (ajouts successifs) soit par décomposition du second terme (retraits successifs).

La séance suivante éclaire la raison de l'introduction tardive de la preuve par addition.

2.2.3.1.3. Séance 15

L'ingénierie (leçon 11) indique qu'il s'agit de « permettre à tous les enfants de trouver un premier nombre, de le mettre à l'épreuve par l'addition, puis de réajuster le cas échéant, c'est-à-dire d'arriver en un ou plusieurs essais à trouver la solution. » (Berté ; p.35). Il s'agit de plus, pour ceux qui pratiquent déjà cette technique de l'améliorer en « réduisant le nombre d'essais » (*Ibid.*).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0:00 2:11	Col.	Rappeler les étapes de résolution d'un problème.	Appel à la mémoire didactique : « *qui est-ce qui peut un petit peu nous redire pour nous remettre en mémoire les différentes manières* ». P oriente sur les informations utiles dans le problème et la question à se poser : « *est-ce que c'est mon tout ou est-ce que c'est une partie de mon tout ?* »	Thomas : « on additionnait la dizaine et puis après on additionnait l'unité et on trouvait ce que ça faisait » Léon : « on a appris à calculer en ligne »
3 20	**Problème 1 :** J'ai 94 cubes dans la boite. J'en enlève 29. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boite ?			
	Col.	Lire le problème	P : « *vous allez faire ça à votre place en écrivant évidemment* ***comment*** *vous faites pour résoudre le problème* ». Distribution de la fiche de travail.	Lecture du problème par Léon et Diane
3:49	Ind.	Résoudre	P circule dans les rangs.	Thomas : « *est-ce qu'on peut faire 94 moins 20 moins encore 9 ?* »
10:37	Col.	Répondre avec une opération	P relit le problème puis « *alors déjà j'vais réfléchir dans ce problème à quoi ?* » P fait rechercher les données du problème « *quel est mon tout,* […] *qu'est-ce qu'on enlève ? […] tu poses quelle opération ?* »	Lara énonce les données ainsi que l'opération « soustraction » sans en donner plus de détails.
11:47		Effectuer 94 – 29	Interroge Thomas, puis « *comment j'peux faire rapidement dans ma tête 74 – 9 ?* » P tente de faire comprendre qu'on peut enlever 10 puis rajouter 1. Sans succès, elle bifurque sur un décomptage à partir de 74.	Thomas : 94 – 20 = 70 se reprend 74, puis 74 – 9. Maéva propose 65
15:58			P demande de prouver la réponse 65 « *par une addition* ». L'addition n'est pas effectuée.	Schoen : effectuer 29 + 65.
17:29		Utilisation de l' addition lacunaire : Faire une addition en colonne	Bifurcation : suite à l'intervention de Marie-Laure P écrit l'addition lacunaire en colonne : 29 +… = 94. « *Comment faire cette addition ? […] je vais mettre les unités ensemble et je vais mettre les dizaines ensemble* » Explication de P : « *quand j'calcule en colonne c'est exactement la même chose que quand on on faisait en ligne où on mettait ensemble les unités ensemble les dizaines seulement bah je les mets en colonne parce que comme ça je vois tout de suite où sont mes unités où sont mes dizaines d'accord* ? »	Marie-Laure énonce une procédure de recherche par complément : « *aller de 29 jusqu'à 94* »
19:36		Tester deux valeurs	P interroge sur les nombres possibles à la place des pointillés : 98, puis 80. P fait fonctionner le moyen de preuve (l'addition) pour 80.	Les élèves comparent spontanément au tout.
21:32		Vérifier le résultat 65	P : « *tu mettrais combien Alissa ?* » Vérification pour 65. P profite de l'opération pour travailler le fonctionnement de l'addition en colonne avec retenue puis revient sur la procédure de Thomas (enlever 20 puis enlever 9), la qualifiant de « *chouette* »	Les élèves ne savent pas faire une addition avec retenue.
24:00			Conclusion : « *quand j'ai trouvé mon calcul en faisant la soustraction, je fais la vérification (montrant l'addition au tableau)*	
24:28	**Problème 2 :** Dans un troupeau, il y a 43 moutons, des noirs et des blancs. Il y a 7 moutons noirs. Combien y a-t-il de moutons blancs ?			
	Col.	Lire le problème	P relit l'énoncé, puis recherche individuelle	Chloé lit l'énoncé. Réaction spontanée des élèves : c'est facile !
25:16	Ind.	Résoudre	P circule parmi les élèves	Les écritures produites par la majorité des élèves sont : 43 – 7 = 36 ou 36 + 7 = 4. Un élève écrit 43 + 7 ; un autre écrit la suite des nombres en comptant à rebours jusqu'à 37.
31:37	Col.	Poser une opération Effectuer 43 – 7	Recherche des informations (données) du problème puis, « *si j'enlève les sept moutons noirs au quarante-trois moutons je vais trouver des moutons blancs alors qu'est-ce que je peux poser comme opération ?* » P amène à effectuer 43 – 3 puis 40 – 4	Diane : « 43 – 7 »
34:45		Prouver le résultat 36. Poser une addition	P pose l'addition en colonne : 36 + 7 et demande où poser le 7, « sous le 6 ou sous le 3 ? ». conclusion : « *est-ce que 36 c'est juste ?* […] *j'ai prouvé par l'addition que j'ai fait juste ma soustraction.* » « *on n'a pas appris à faire les soustractions en colonne* […] *on va y aller progressivement* ».	Léon « *j'ai pas mis moins, j'ai fait par l'addition. 36 + 7 = 43* » 5 élèves ont écrit la soustraction, 6 une addition.
39 :54	**Contrôle :** Pierre a 35 billes et Jean a 65 billes. Jean dit à Pierre « j'ai 25 billes de plus que toi ». Jean a-t-il raison ?			
	Ind.	Résoudre	Lecture du problème. P circule dans la classe, aidant les élèves individuellement.	
50 :39	Col.	Traduire l'énoncé par une opération	Découragement « *bon c'est (soupir) depuis le début quand même on se pose toujours un peu euh les mêmes questions hein* » P reformule le problème en le racontant.	Les élèves ne savent pas, puis M-Laure : « *tu fais 35+25 et puis tu vas voir si ça fait euh 65* »
53 :51		Résoudre	P écrit le calcul de M-L en ligne et l'effectue sous la dictée des élèves	Les élèves réajustent spontanément : Pierre a 30 billes de plus
55 :45		Résoudre avec une soustraction	Nouvelles questions : « *Jean il en a 65 il en a combien de plus que Pierre ?* […] *est ce que je peux trouver le 30 en faisant une soustraction ?* » le calcul 65 – 35 est effectué en ligne : 60 – 30 = 30 et 5 – 5 = 0 donc 65 – 35 = 30. Conclusion : « *vous auriez fait directement la soustraction, vous auriez trouvé tout de suite 30 puis après on peut vérifier par l'addition* »	Schoen : « si je rajoute [30], c'est égal à 65 »
59 :49	Fin de la séance : pas de bilan			

Tableau synoptique 8 : séance 15, site Pascale (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Comme à l'accoutumée, dès le début de la séance, Pascale interroge les élèves sur la démarche : « *quand on a un problème à résoudre et qu'on lit le problème, qu'est-ce que comment vous allez penser dans votre tête ? Vous lisez la consigne, qu'est-ce que vous regardez…* » (min 2 :11). Il s'agit pour l'enseignante de faire formuler les premières étapes d'une démarche de résolution de problème, « *on a appris à retirer certaines informations* » *(Ibid.),* et de faire repérer les données du problème en terme de tout et de parties, « *est-ce que c'est mon tout ou est-ce que c'est une partie de mon tout ?* » *(Ibid.).*

- Un ajout mésogénétique technique : l'addition avec retenue

Pascale introduit l'addition en colonne lors de la recherche collective du premier problème en profitant de la réponse d'une élève, « aller de 29 jusqu'à 94 » (min17 :29), introduction qu'elle justifie à cette étape de l'ingénierie par l'impatience des élèves : « *alors moi je vais poser* [l'addition] *pour la première fois, enfin, après toutes ces semaines où vous réclamez ces additions en colonne* ».

Pour effectuer une addition, les élèves ont l'habitude de décomposer les nombres en dizaines et unités, d'opérer sur ces décompositions, puis de reconstituer le résultat (*cf.* Figure 32). En position topogénétique haute (*cf.* Figure 33), Pascale s'appuie sur la comparaison avec l'addition écrite en ligne pour montrer le fonctionnement de l'addition lorsqu'elle est posée en colonne : « *Je vais mettre les unités ensemble et je vais mettre les dizaines ensemble, hein.* […] *quand je calcule en colonne, c'est exactement la même chose que quand on faisait en ligne où on mettait ensemble les unités, ensemble les dizaines. Seulement, bein, je les mets en colonne parce que comme ça je vois tout de suite où sont mes unités, où sont mes dizaines. D'accord ?* » (min17 :29)

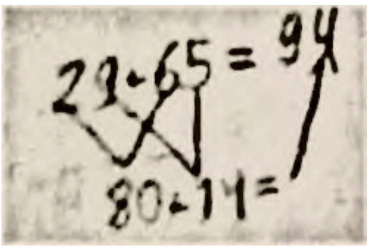


Figure 32 : exemple de décomposition/recomposition pour additionner deux nombres

Figure 33 : position topogénétique de l'enseignante

L'introduction de l'algorithme de l'addition lui donne ainsi l'occasion de provoquer une avancée chronogétique sur le plan de la preuve.

- Une avancée chronogénétique relative à la preuve faible

Pascale profite de l'ajout mésogénétique que nous venons de relever (l'addition posée en colonne) pour faire tester deux valeurs qu'elle choisit elle-même, 98 et 80. Ce faisant, elle remet sur le devant de la scène deux niveaux de preuve apparus à l'étape 1 : les niveaux de preuve NP1[77] et NP2[77].

Cependant, la position topogénétique haute de l'enseignante empêche les élèves de s'emparer de cet objet de savoir. Lors de la résolution du problème 2, Pascale conduit les élèves à effectuer l'opération 43 – 7 par retraits successifs : 43 – 3 puis 40 – 4 et prend en charge la vérification du résultat. En ne laissant pas les élèves agir par eux-mêmes, elle se prive d'erreurs : la Figure 34 représente par exemple une erreur d'un élève qui tente d'effectuer une soustraction en colonne en disposant les nombres comme pour une addition. Le troisième problème est lui aussi traité de la même façon : si les élèves ont bien eu un temps de recherche, Pascale ne profite pas de son tour dans la classe pour repérer des erreurs susceptibles d'être ensuite exploitées dans une activité de validation. Le calcul soustractif est effectué en ligne sous la direction de l'enseignante. En fin de compte, dans cette séance, seuls les résultats obtenus avec la maitresse auront été éprouvés. Or ceux-ci étant tous corrects, la justification de prouver ses résultats s'en est trouvée affaiblie.

Figure 34 : tentative d'effectuer une soustraction en colonne

- Une position topogénétique de l'enseignante plus haute

Nous observons dans cette séance l'enseignante tenir une position topogénétique plus haute. Cette position est particulièrement manifeste lors de la résolution du dernier problème (39 :54). Ce dernier problème est un problème de comparaison de deux quantités de billes. Jean prétend avoir 25 billes de plus que Jean, il s'agit de répondre à la question « Jean a-t-il raison ? ». Les élèves ont additionné 35 et 25 pour ensuite conclure par la négative. Pascale prolonge le problème, « [*Jean*] *en a combien de plus que Pierre ? »,* pour ensuite prendre à sa

[77] NP1 : la différence doit être inférieure au tout ; NP2 : si $a - b = d$ alors $d + b = a$

charge le calcul de la différence entre la quantité de billes de Pierre et celle de Jean : « ***je vais faire*** *65 – 35.* ***Ré-essayons en ligne*** *si ça marche. 60 – 30 = 30 […] puis 5 – 5, 0* » (min 58 :10). La conclusion « *vous auriez fait directement la soustraction, vous auriez trouvé tout de suite 30, puis après on peut vérifier par l'addition* » (min 55 :45), nous laisse supposer qu'en réalité l'objectif de Pascale était de résoudre avec une soustraction, pour ensuite vérifier le résultat par l'addition. Cette procédure n'ayant pas été effectuée par les élèves, elle n'a pas eu d'autre choix que la prendre à son compte.

Pour conclure, nous pointons dans cette séance une inflexion dans la mise en œuvre de l'ingénierie sur plusieurs plans :

- Sur le plan des objets de savoirs

L'enseignante se rapproche du texte de l'ingénierie en introduisant l'algorithme de l'addition, élément mésogénétique nécessaire à la vérification des résultats des problèmes de la séance.

Nous faisons l'hypothèse que c'est l'ingénierie elle-même qui influe sur les choix de l'enseignante. En page 53, la leçon de l'ingénierie précise en majuscule « nous allons poser l'addition en colonne pour bien comprendre » (p.53). Lors d'un entretien rétrospectif, Pascale nous déclare « *pour l'ingénierie, j'ai suivi* [le déroulement de l'ingénierie]. *J'apprenais ma leçon, et j'essayais de tout bien faire.* » (Pas-entr-6/03/2017). Pour autant, nous observons qu'elle ne continue pas dans même sens que l'ingénierie qui oriente vers une méthode de résolution par essais successifs (*cf.* section 1.1), mais poursuit la résolution des problèmes par retraits successifs, procédure initiée lors de la séance précédente. Une explication se trouve dans les propos de Pascale : *« mes élèves, ils étaient très éloignés de cette méthode-là, c'est pour ça que moi je privilégiais la méthode en ligne, je ne voulais pas précipiter avec cet algorithme* [de l'addition] *parce que je voyais bien qu'ils étaient pas prêts à… à…. Pour comprendre aussi l'histoire des retenues, il faut que la numération, qu'il y ait en partie un bagage qui soit constitué quoi… tu comprends ? »* (Pas-entr-6/03/2017).

Nous comprenons ici que lorsque Pascale dit « *j'essayais* », elle exprime sa volonté de rester au plus près de l'esprit de la séance tout en restant conforme au PER.

- Sur le plan de la position topogénétique de l'enseignante

Nous observons que dans cette séance, Pascale prend beaucoup plus en charge l'avancée du savoir que dans les précédentes. Lors les deux premières étapes, nous avions constaté que les élèves étaient en position topogénétique haute : l'enseignante ne répondait pas directement aux questions des élèves, choisissant de les relancer dans le milieu didactique sous une autre forme (*cf.* séance 13, p.241). Dans cette séance, Pascale explique comment effectuer une addition avec retenue (*cf.* supra) puis effectue elle-même les additions.

Nous interprétons cette inflexion comme une volonté de rester proche de l'esprit de l'ingénierie : si la technique de résolution par essais successifs n'émerge pas au profit d'une autre technique, soustractive, les résultats sont maintenant en mesure d'être vérifiés par addition.

2.2.3.2. Conclusions à propos de la quatrième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Pascale

Comme nous l'avons fait pour l'étape précédente, nous synthétisons les données des trois séances mises en œuvre par Pascale lors de l'étape 5 sous forme de deux tableaux. Le premier s'intéresse aux caractéristiques mésogénétiques tels que observables au fil de l'étape. Le second ramasse les points essentiels de l'évolution du savoir relatif à la construction d'une technique de la soustraction.

Sur le plan mésogénétique

L'analyse des différentes séances fait émerger des modalités récurrentes de définition et de régulation des milieux didactiques « empruntés » à l'ingénierie. Nous en décrivons les principaux traits ci-après en mentionnant entre parenthèses les séances d'où ils sont extraits :

– **Un appel systématique à la mémoire didactique servant de milieu didactique primitif à l'étape**

Chaque séance débute, selon le contrat pérenne identifié en début d'observation, l'enseignante fait appel à la mémoire didactique en posant une question rituelle : « *est-ce que quelqu'un peut nous rappeler ce qu'on a fait et pourquoi est-ce qu'on a trouvé difficile ?* » (Pas-S13.min 00 :04), « *vous vous souvenez de ce qu'on a fait la dernière fois, ou plus ?* » (Pas-S14.min 00 :00), « *qui est-ce qui peut nous redire, pour nous remettre en mémoire, les différentes manières… ?* » (Pas-S15.min 00 :10). Cet appel à la mémoire didactique (dont on peut penser qu'il appartient aux façons de faire de Pascale) est l'occasion de poser les premiers éléments du milieu didactique : les différentes procédures de résolution rencontrées lors des séances précédentes, la schématisation des problèmes en « parties – tout ».

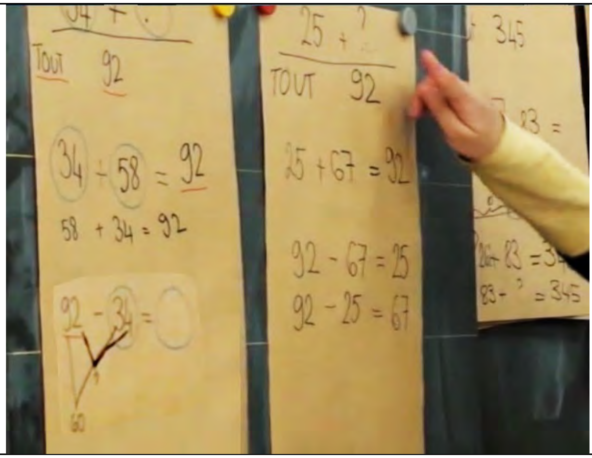
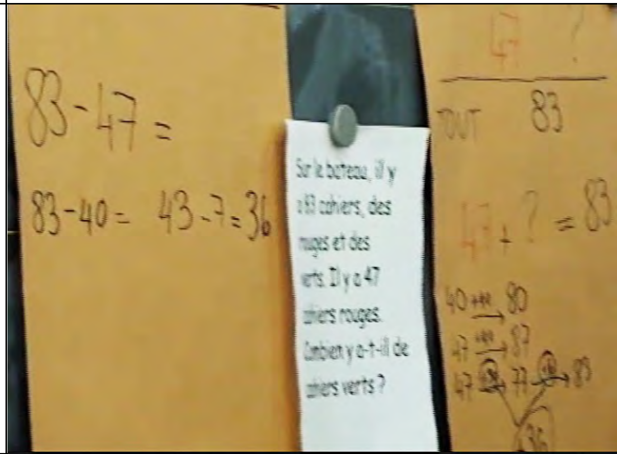
	Séance 13	Séance 14	Séance 15
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel
Catégorie de problèmes	Combinaison e E e (avec mot induisant une addition)	Combinaison e E e Transformations E t+ e (avec mot inducteur induisant une addition)	Combinaison e E e Transformation e t- E Comparaison e e | C+
Variables numériques			
Traces au tableau			
Matériel	Fiche de travail Cahier pour illustrer	Fourre (équivalent ardoise) Contrôle sur fiche.	Fiche de travail Contrôle sur fiche.
Savoirs et/ou techniques mathématiques mobilisés	Nombres et propriétés du système décimal Décomposition d'un nombre, Preuve par addition, Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité, Répertoire Calcul réfléchi : procédures « jump » et « split » (*cf.* 2.2.2.1 du chapitre 1 de la partie 1)	Nombres et propriétés du système décimal Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité, Répertoire Décomposition d'un nombre, Soustraction par décomposition du second terme	Nombres et propriétés du système décimal Addition lacunaire, Décomposition d'un nombre, Soustraction par décomposition du second terme, Preuve d'un résultat

Tableau 18 : Synthèse des trois séances de l'étape 4 –« stratégies des essais » – du point de vue mésogénétique (Site de Pascale)

– Une ostensif scriptural pour soutenir la mémoire didactique collective

Tout au long de l'étape, une affiche au tableau (*cf.*

Figure 35) fait office de mémoire collective. L'enseignante s'appuie sur cette trace pour introduire deux éléments dans le milieu didactique :

- Une schématisation en termes de « *parties* » et de « *tout* » (*cf.* Figure 35) le but est d'une part d'aider à la reconnaissance d'un problème soustractif et d'autre part de produire une écriture soustractive
- une schématisation linéaire qui oriente vers l'écriture d'une addition lacunaire. Cette trace écrite permet à l'enseignante de revenir sur les différentes « méthodes » (Pas-S13-min 1 :39) ou « genres de calculs » (Pas-S15-min 1 :46) mis en œuvre.

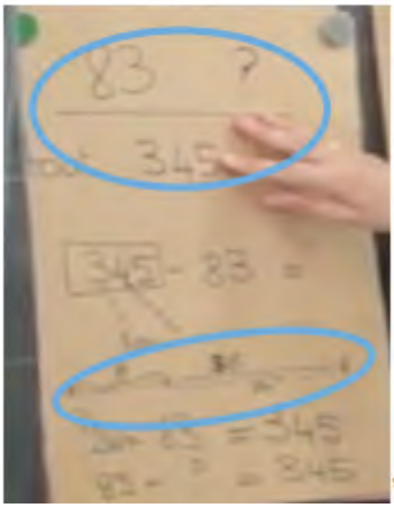


Figure 35 : traces écrites faisant office de mémoire collective

Cette trace écrite, issue d'une séance de l'étape précédente, reprend des éléments de l'ingénierie de Berté (1995), ce qui est pour nous un indice de la compatibilité de l'ingénierie avec les usages de Pascale quant à la résolution des problèmes soustractifs. Pascale nous confirme en entretien rétrospectif s'aider de schémas similaires pour introduire en parallèle l'addition lacunaire et la soustraction : « *La schématisation n'était pas une nouveauté pour moi. On travaillait l'addition et la soustraction en parallèle.* » (Pas-entr-20/07/2017).

– L'addition avec retenue

Les élèves de Pascale n'ont jamais rencontré l'addition posée en colonne. Ainsi que le dit Pascale, les calculs rencontrés en 4P ont lieu « *sans échanges dizaines-unités* » (Pas-entr-16/11/2016), mais complétant son propos par *« cela dit, nous faisons les additions avec retenue en sensibilisation en fin d'année* » (*ibid.*). Les moyens COROME soulignent que la disposition en colonne peut être présentée « à partir de suggestion d'élèves », suggestions pouvant « être induite par la pratique sociale de l'algorithme : les parents, les journaux, les bulletins de commande de tout genre, la serveuse au restaurant [*sic*], etc. ». Les propos de l'enseignante nous laissent à penser que, dans cette étape, c'est le texte de l'ingénierie didactique qui a incité l'enseignante à introduire l'algorithme de l'addition : « *pour l'ingénierie, j'ai suivi* » (Pas-entr-6/03/2017). Par ailleurs, il est possible que l'enseignante ait aussi voulu, dans un mouvement d'anticipation, rendre disponible cette technique pour l'étape suivante qui expose les procédures des Schtroumpfs avec des additions posées en colonne.

- **Un milieu didactique ordonnancé par l'enseignante**

Rappelons que le débat collectif a lieu « en réunion » devant le tableau et autour de l'enseignante, selon un format pédagogique décrit en section 1.2. Les productions écrites des élèves sont posées à leurs pieds, ce qui permet à l'enseignante d'y avoir accès facilement. L'enseignante sollicite systématiquement quasiment tous les élèves sur leurs procédures de résolution. Pour autant, elle ne retient de leurs propositions que certaines d'entre elles qui, de ce fait, modifie progressivement dans l'action conjointe certaines dimensions mésogénétiques non toujours en adéquation avec les visées des situations de l'ingénierie : par exemple, en séance 13, pour le calcul de 92 – 34, alors que les élèves surcomptent de 10 en 10 jusqu'à 94 puis enlèvent 2 unités, elle privilégie un sur-comptage jusqu'à 84 puis un ajout de 8 unités. De même, en séance 14, pour le calcul de 83 – 47, lorsque Diane propose d'enlever d'abord 43, Pascale ne suit pas et transcrit 83 – 40. La procédure introduite par Diane reste inexplorée. En séance 15, elle amène elle-même le calcul 65 – 35, calcul effectué en ligne par traitement des dizaines puis des unités. Nous faisons l'hypothèse que les procédures retenues par l'enseignante sont pilotées par sa volonté d'entrer rapidement dans un processus tendant vers l'émergence d'un algorithme : « *j'enlève d'abord mes dizaines et ensuite j'enlève mes unités* » (Pas-S14-min 27 :37). Alors que l'ingénierie a pour visée de faire émerger une « stratégie des essais », ce qui est explicitement précisé dans l'ingénierie (« certains enfants n'imaginent pas que des essais peuvent amener à la solution » (Berté, p.34), l'enseignante privilégie une procédure de résolution par soustractions successives, ce qui ne la met en contradiction ni avec le PER, ni avec ses propres convictions : « *Oui, là avec les essais, il y avait un problème. Mais je te l'ai déjà dit Michèle, que les additions en colonne avec retenue, c'est en cinquième, c'est pas en quatrième. Du coup, j'étais aussi un petit peu embêtée par rapport au programme. Moi, en plus je suis assez d'accord avec ce choix* [celui du PER]. […] *Donc du coup, j'étais en porte à faux parce que je voyais bien dans l'ingénierie que l'objectif c'était de les amener à l'algorithme, mais dans le programme de 4P, ça fait pas partie.* » (Pas-entr-6/03/2017). Aussi, bien que les interactions soient nombreuses et donnent l'illusion d'une recherche collective, l'étape est en réalité dirigée par l'enseignante qui, prenant une position topogénétique haute, ordonnance le milieu didactique et son évolution de manière à rester en conformité avec le plan d'étude romand. Pour ce faire, elle infléchit la chronogenèse vers la recherche d'une procédure autre que la procédure par essais successifs : celle par décomposition du second terme.

Sur le plan chronogénétique

- **Un basculement de la reconnaissance d'un problème soustractif à la recherche de procédures numérique pour effectuer une soustraction « difficile ».**

Dès le début de la séance 13, les remarques des élèves portent sur des difficultés opératoires : « *le calcul, il était assez dur… parce qu'on pouvait pas faire 4 dizaines – 8 dizaines* » (Pas-S13-min1 :02). Implicitement, élèves et enseignante s'accordent sur le fait que le savoir enjeu d'étude n'est plus la reconnaissance du type de problèmes, mais la recherche de techniques opératoires permettant d'effectuer des soustractions difficiles. On note cependant que Pascale devient davantage explicite, en fin de séance 13, lorsqu'elle énonce : « *c'est bien ce calcul-là* [92 – 25] *qui me pose problème, pour trouver 67. Parce qu'à 2, je n'arrive pas à enlever 5. Aïe aïe aïe, comment je vais faire ?* » (min51 :18).

Nous avons récolté dans le Tableau 19 les procédures les plus significatives de ce que nous avons pu voir sur la vidéo. Elles montrent leur évolution au fil de l'étape : si une procédure par dessin (procédure 5) persiste encore à la séance 13, elles sont toutes numériques lors des deux séances suivantes. Deux procédures relèvent du comptage (procédures 8 et 14), les autres montrent une recherche d'un algorithme de résolution en ligne. Nous concluons de ces observations que la bascule de la reconnaissance de problèmes soustractifs relevant de diverses catégories (e E e, E t+ e, e t- E, e e | C+) à la recherche d'une technique algorithmique de résolution a bien eu lieu, ce qui correspond au projet de l'ingénierie didactique.

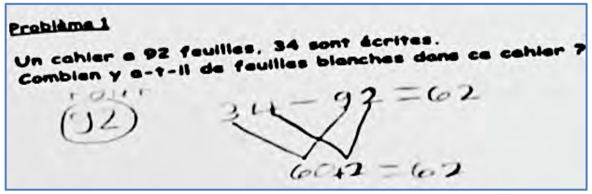
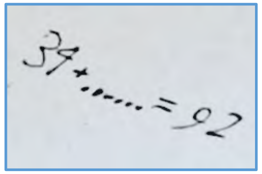
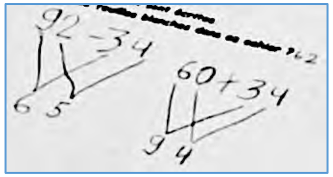
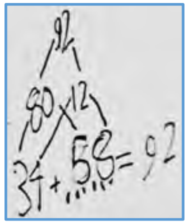
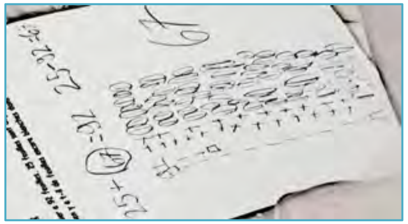
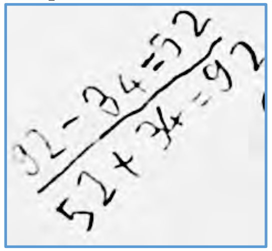
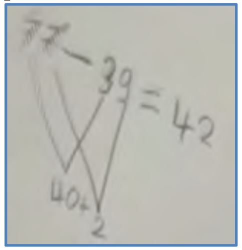
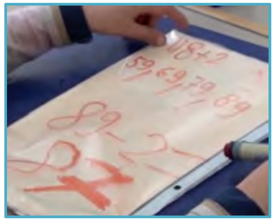
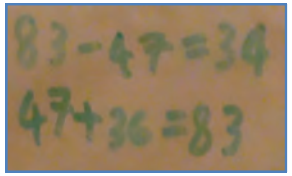
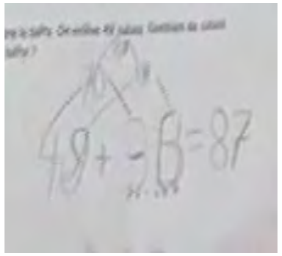
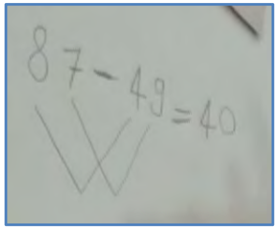
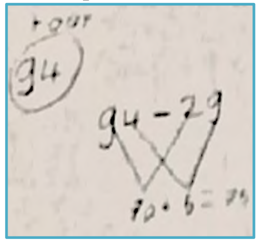
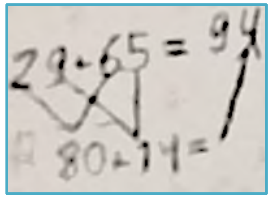
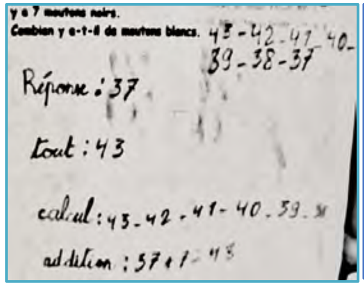
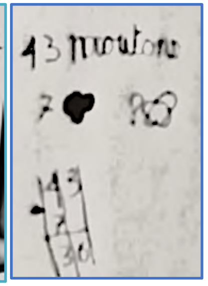
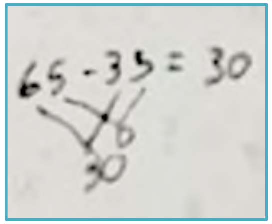
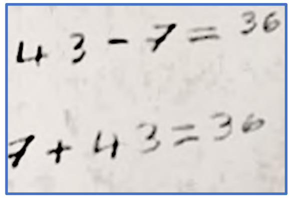
	séance 13	séance 14	séance 15
Simulation des problèmes avec cubes	oui	non	non
Reconnaissance d'un problème soustractif	Pb 1 : oui Pb 2 : oui	Pb 1 : oui Pb 2 : oui	Pb 1 et 2 : oui Pb3 : oui
Procédures élèves lors de la recherche individuelle	Dessin puis recomptage / calcul par décomposition du second terme / ajustement après 1[er] essai / recherche du complément. Tentative d'effectuer une soustraction posée. Utilisation du résultat du premier problème pour résoudre le second : recherche de l'écart entre 25 et 34, puis ajout à 58.  Procédure 1   Procédure 2 Procédure   Procédure 4 Procédure 5	Dessin puis recomptage / calcul par décomposition du second terme / essais successifs / recherche du complément / soustraction posée   Procédure 6 Procédure 7   Procédure 8 Procédure 9   Procédure 10 Procédure 11	Calcul par décomposition du second terme /recherche du complément /soustraction   Procédure 12 Procédure 13   Procédure 14 Procédure 15   Procédure 16 Procédure 17
Vérification empirique	Non		
Niveaux de preuve	/	/	NP1 ; NP2 ;
Émergence de propriétés mathématiques	Non commutativité de la soustraction. Relation « a + b = c ⇔ b = c – a »	« a + b = c ⇔ b = c – a »	
Procédures de résolution en collectif	Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité.	Recherche du complément : utilisation du répertoire pour déterminer l'ordre de grandeur à la dizaine près par défaut de la solution, puis ajustement à l'unité. Soustraction avec décomposition du second terme.	

Tableau 19 : Synthèse des trois séances de l'étape 4 – « stratégies des essais » – du point de vue chronogénétique (Site de Pascale)

- **Deux procédures de résolution : la recherche du complément et la soustraction par décomposition du second terme.**

L'analyse des productions des élèves au fil des trois séances de l'étape montre les élèves à la recherche d'un algorithme de la soustraction : si certains calculent une différence en s'appuyant sur une addition lacunaire (procédures 2, 4, 10 et 13), une majorité tente d'effectuer une soustraction (procédures 1, 3, 6, 7, 11, 12 et 15). Ces traces montrent des erreurs « classiques » telles que rapportées dans la section 3.1 sur l'analyse épistémique de l'ingénierie (*cf.* Titre 1 de ce chapitre) : la procédure 12 montre une adaptation du schème opératoire « soustraire le petit nombre du plus grand » à l'opération 94 – 29. En effet, 9 dizaines – 2 dizaines = 7 dizaines puis 9 unités – 4 unités = 5 unités, d'où un résultat égal à 75. Rappelons que les variables numériques des problèmes de l'ingénierie didactique ont justement été choisies pour ne pas laisser sous silence ces adaptations de schèmes opératoires mais pour au contraire s'appuyer sur les erreurs de façon à initier et donner sens à un algorithme de la soustraction. Néanmoins, l'enseignante ne relève pas ces erreurs et bifurque vers des procédures plus conformes à celles des préconisations institutionnelles : la recherche du complément ou la soustraction par décomposition du second terme.

- **Une apparition fugace de la notion de preuve.**

Rappelons que la mise en œuvre de la deuxième étape n'avait pas vu l'émergence de la preuve telle que visée par l'ingénierie : les problèmes étaient résolus selon deux procédures, la comparaison des résultats suffisant à valider la réponse au problème. L'addition à retenue, introduite dans le milieu didactique lors de la dernière séance de cette étape, lui permet de remettre en scène la preuve d'un résultat : les deux derniers problèmes, résolus par une procédure soustractive, sont vérifiés par addition. Pour autant, la preuve n'est pas utilisée pour mener la « stratégie par essais » prévue dans cette étape par l'ingénierie.

Au final, nous observons une enseignante bifurquer à nouveau sur un enjeu de savoir autre que celui visé dans l'étape. Si la « stratégie des essais » est une étape tournée vers la construction d'un algorithme de la soustraction, elle demeure pour l'enseignante une étape de résolution des problèmes soustractifs, comme les précédentes. Nous faisons l'hypothèse que l'enseignante ne poursuit pas, de manière volontaire, dans le sens voulu par l'ingénierie pour rester en conformité avec le plan d'étude romand : dans nos entretiens, Pascale rappelle très souvent dans nos entretiens que les algorithmes opératoires ne sont pas au programme de 4P : « *On leur demande de résoudre les problèmes comme ils veulent, mais pas par l'algorithme* *justement. On voit très très tard l'addition en colonne. La soustraction, ce n'est même pas le programme de quatrième en fait* » (3 mai 2016). Les moyens COROME indiquent : « Le champ de l'addition englobe les deux opérations réciproques. […] On ne trouvera donc pas de module sur la «soustraction», celle-ci étant intégrée aux activités sur l'addition, envisagée dans l'acception large du terme. » (p.181)

Par ailleurs, certains propos renforcent nos interprétations en terme du rôle joué par son épistémologie pratique. Ainsi, Pascale déclare avoir « *introduit mais le plus tard possible et sans trop insister sur cette méthode* [l'algorithme de l'addition] *car pour moi la priorité c'était de comprendre la logique. L'addition en colonne est utile avec des grands nombres ou les retenues. Pour les petits nombres, il y a d'autres façons de calculer. C'est la boîte à outil qui me semble importante* » (Pas-entr-16/11/2016), propos qu'elle complète plus tard par « *tu peux leur apprendre l'algorithme, mais au niveau de la retenue, ça ne veut pas dire qu'ils ont compris ce passage entre unité et dizaine, entre la dizaine et la centaine, tu vois. Donc moi, ça me gênait de leur apprendre une méthode alors qu'ils étaient pas encore heu… comment dire mûrs pour l'entendre cette méthode* » (Pas-entr-06/03/2017).

Pour conclure, nous déduisons de l'analyse de cette étape, que l'enseignante a interprété et remanié le texte de l'ingénierie au regard d'une part, des préconisations institutionnelles et d'autre part au regard de ses propres convictions par rapport à l'enseignement/apprentissage d'une technique de calcul. Si Pascale a bien maintenu le cadre du plan d'étude romand quant à la résolution des problèmes, elle a toutefois fait un pas de côté en introduisant la vérification d'un résultat. Nous poursuivons l'analyse afin de voir comment elle poursuit cette négociation avec le texte de l'ingénierie.

2.2.4. Analyse de l'étape 5 « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »

L'ingénierie didactique introduit dans cette cinquième étape les procédures de personnages fictifs (les Schtroumpfs), alors que jusqu'à présent les élèves ont travaillé sur leurs propres procédures de résolution. Il s'agit pour les élèves d'analyser les procédures de résolution des Schtroumpfs et pour l'enseignante de faire en sorte que « toutes les stratégies convergent vers celles donnant la réponse un en coup » (Berté, p. 38).

Conformément au texte de l'ingénierie qui prévoit deux leçons à cette étape, Pascale la conduit selon deux séances (*cf.* Tableau 11)

2.2.4.1. Analyse condensée de chacune des deux séances

Nous avons vu dans les étapes précédentes que les élèves de Pascale n'ont pas été confrontés, et donc pas mis en œuvre une stratégie par essais successifs pour résoudre les problèmes proposés. Rappelons que les problèmes ont été précédemment résolus soit recherche du complément avec écriture d'une addition lacunaire, soit par recherche du reste avec écriture de soustractions successives. Si la preuve par addition a émergé lors de la séance précédente, celle-ci n'a pas été formellement institutionnalisée.

2.2.4.1.1. Séance 16

Le texte de l'ingénierie (Leçon 12) indique que l'objectif est « d'améliorer le nombre d'essais en travaillant encore le choix du premier nombre et de limiter les erreurs de calcul » (Berté, p.39). Pascale modifie de manière importante la structure de la séance, modifications que nous présentons dans le synopsis de séance que nous présentons en pages suivantes.

Le premier problème présenté, appartenant à la catégorie « e t- E »[78] :

Ce matin le facteur avait 93 lettres à distribuer. Il en a déjà distribué 56. Combien en a-t-il dans sa sacoche maintenant ?

Ce problème est résolu par trois schtroumpfs. Il s'agit d'analyser collectivement les procédures de résolution.

- Le Schtroumpf Bricoleur (SB) teste les nombres 10, 20, 30 décrétant que 40 est trop grand. Sa procédure met en exergue l'ordre de grandeur à la dizaine près d'un résultat.
- Le Schtroumpf Musicien (SM) teste directement 30 et ajuste en sur-comptant de un en un jusqu'au tout.
- Azraël additionne les deux nombres du problème, démontrant sa non reconnaissance d'un problème soustractif.

L'analyse de ces procédures conduit à travailler la notion d'ordre de grandeur. Un moment particulier, « entraînement à l'ordre de grandeur » (Berte, p.40) lui est consacré.

Le second problème appartient à la catégorie « e E e[78] ». Il est résolu individuellement par les élèves puis corrigé collectivement. Le texte de l'ingénierie didactique le qualifie « d'application ».

Pascale modifie de manière importante la structure de la séance, modifications que nous présentons dans le synopsis de séance ci-après.

[78] e t- E : problème appartenant à la catégorie transformation d'états. Il s'agit ici de déterminer l'état final d'une collection dont on connaît l'état initial et la transformation.

e E e : problème appartenant à la catégorie composition d'états. Il s'agit ici de déterminer un état connaissant deux états. (Vergnaud, 1990)

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les propos, attitudes et procédures des élèves
0 :00	Problème 1 : ce matin le facteur avait 93 lettres à distribuer. Il en a déjà distribué 56. Combien en a-t-il dans sa sacoche maintenant ?			
02 :12	Col.	Lire l'énoncé	P fait raconter le problème : « *on va dans sa tête imaginer le film de ce problème. Qu'est-ce qu'on va imaginer en premier ? […] ensuite qu'est-ce que j'imagine encore dans ma tête ? […] Et puis quelle est la question ? […] qu'est-ce qu'on cherche ?* »	Les élèves racontent le problème. Maéva se trompe sur l'objet de la question. Diane désigne ce que l'on cherche en terme de partie : « *il a 93 lettres, et puis il en a distribué 56, dont on cherche l'autre moitié.* »
04 :28	Ind.	Résoudre	P circule dans les rangs et aide, encourage certains	Les procédures se partagent entre recherche du complément et tentative d'effectuer la soustraction 93 -56. Maéva effectue l'addition 56 +93, Jules dessine
10 :41	Col.	Analyse les essais de schtroumpfs	P recueille les réponses des élèves : 37 / 30 / 43 / 42 / 5 puis refait formuler les données du problème. « *les schtroumpfs vont essayer de résoudre le problème* »	
13 :32			**Présentation du 1^er^ essai de Schtroumpf Bricoleur :** 56 + 10 « *Pourquoi est-ce qu'il a écrit çà ? Qu'est-ce que vous en pensez ? est-ce que c'est juste, et pourquoi ?* »	Thomas : « *c'est pas juste parce que 56 +10 ça t'es pas dans 90 donc on sait déjà qu'on peut pas trouver 93* ».
14 :49			**Présentation du 1^er^ essai de Schtroumpf Musicien :** 56 + 30 = 86 « *Alors le calcul que le Schtroumpf Musicien a écrit, est juste, mais est-ce qu'il correspond au problème ?* »	Jules : « *C'est trop parce que 56 + 30, déjà ça fait 96* » E : « *parce qu'on cherche 93, on cherche pas 86* »
16 :34			**Présentation de Schtroumpf Maladroit :** *et écrit 56 + 20 =*	Thomas : « *s'il est maladroit, il a pas raison* ». Es : « *56 + 20 = 76* » !
17 :39			P : « *comment est-ce qu'on pourrait aider nos schtroumpfs à résoudre ce problème ?* » P approuve les deux écritures 56 + ••• = 93 et 93 – 56 mais les remet à plus tard : « *avant de faire ça, je voudrais qu'on fasse quelques entrainements de calcul* »	Maéva propose d'écrire 93 – 56. Diane pense que « *en fait, moins il est plus efficace que le plus parce que on pourra toujours vérifier si c'est juste en faisant l'addition* » Lara est gênée par les chiffres des unités pour effectuer la soustraction, et opte pour l'addition.
21 :07		S'entrainer à effectuer des soustractions	**Calcul de 65 – 39.** P écarte le cassage et demande une autre technique : « *on avait parlé d'une autre méthode quand on était bloqué* »	60 – 30 = 30 puis les élèves évoque le cassage d'une barre de 10, mais ne savent pas où : tous les chiffres des nombres 56 et 93 sont énoncés. Thomas : « *tu pouvais faire 65… 65 moins 30 moins encore 9* »
			P essaie de provoquer une procédure de calcul, enlever 9, c'est enlever 10 puis rajouter 1 avant de faire compter à rebours à partir de 35.	Difficultés pour enlever 9 à 35 Incompréhension des élèves relativement à la procédure proposée par P.
25 :39			**Calcul de 84 – 18** P reprend : « *on va partir du tout, d'abord enlever 10 et ensuite on va enlever 8* »	Marie-Laure : 80 -10 puis 4 + 8 = 12 et 70 – 12 Chloé : 84 – 10 = 74 puis 74 – 4 = 70 puis 70 – 4 = 66
			Calcul de 71 – 34. P reprend : 71 – 30 = 41 puis comptage à rebours jusqu'à 37	Barnabé : 70 – 30 = 40, les élèves comptent en rebours en même temps que P
31 42		Résoudre le problème du facteur par addition puis par soustraction	Retour au problème du facteur : calcul de 93 – 56. → par addition : P aide Thomas en comptant sur les doigts de 86 à 93 → par soustraction : sollicite Lara pour le calcul en ligne. P écarte le calcul en ligne avec traitement des dizaines puis des unités au profit de soustractions successives **Conclusion :** « *maintenant on va de plus en plus s'entrainer à compter soit en montant soit en descendant* »	Thomas : déclare que 56 + 30 = 86 mais ne sait continuer Lara : 93 – 50 – 6. Marie Laure propose l'écriture usuelle et effectue 6 – 3 pour le calcul des unités Tous les élèves font le calcul en même temps que l'enseignante.
39 :23	Problème 2 : dans une boite il y a 91 cubes, des rouges et des bleus. Il y a 28 cubes bleus. Combien y a-t-il de cubes rouges ?			
39 :41	Col.	Comprendre l'énoncé,	« *on va se faire le film… première information ?* […] *ensuite qu'est-ce qu'on nous dit d'autre ?* […] *et puis qu'est-ce que je cherche ?* »	Lecture du problème. Repérage des données du problème.
40 :42	Ind.	Résoudre	Distribution des feuilles puis P circule dans les rangs	Écritures soustractives : 91 – 28 = 69 / 90 – 20 = 70 puis 8-1 =7 Écritures additives : 28 + 60 + 3 = 91/ Algorithme de la soustraction : (conservation des écarts) : Lara
47 :36	Col.	Corriger	P à propos de la réponse de Lara : « *pourquoi est-ce que c'est juste d'avoir posé le calcul comme ça ?* » Analogie avec une boite de 91 chocolats : peut-on en manger 28 ?	Lara : 91 – 28 Marie-Laure n'est pas d'accord parce qu'on ne peut pas enlever 8 à 1
50 :38			« *cette soustraction je sais pas comment la calculer, alors on va : pas faire la méthode croisée puisqu'on voit qu'on peut pas enlever 8 à 1, mais on va faire une autre méthode qui marche : où on enlève d'abord les dizaines et ensuite les unités* »	Lara : *91 – 20 – 8* Léon, qui résout par l'addition, ne comprend pas la suite des calculs
52 :04			P aide les élèves à effectuer le calcul : « *91 moins 10* […] *encore moins 10* […] *vous enlevez encore 8, vous enlevez un* […] *vous allez enlever encore 7*	Les élèves comptent à rebours en s'appuyant sur les doigts de l'enseignante.
53 :13			P demande de vérifier « *par l'addition* » le résultat 63 et pose l'addition en colonne	Les élèves dictent : « *ça fait 11* […] *tu mets 1 et puis la retenue*
55 :32			À Maéva : « *il faut imaginer que chaque fois que tu arrives à 10, tu es obligée de construire un nouveau groupe de dix, ça va te construire une nouvelle dizaine* »	Maéva ne comprend pas le fonctionnement de la retenue, dans une addition posée en colonne.
56 :39	Fin de la séance			

Tableau synoptique 9 : séance 16, site Pascale (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

Comme les précédentes, cette séance est structurée en une alternance de moments collectifs (lecture des problèmes et débat) et de moments individuels (recherche de la solution du problème). Toutefois, alors que la séance est prévue comme une séance d'analyse et de formulation, celle-ci bifurque vers une séance consolidation d'une procédure de résolution apparue en étape 4. Nous pointons ci-après un trait saillant dans la conduite de cette séance par Pascale.

- **Une bifurcation : s'entrainer à soustraire un nombre en le décomposant en dizaines-unités**

Nous constatons que les procédures des schtroumpfs ne sont que partiellement présentées aux élèves (min 13 :32 ; 14 :49). Ainsi, pour le schtroumpf bricoleur, seul le premier essai 56 + 10 = 66 est analysé, les deux suivants 56 + 20 puis 56 + 30 étant ignorés. De même, pour le Schtroumpf Musicien, le premier essai 56 + 30 = 86 est présenté alors que la « musique » 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93 est elle aussi ignorée. Il s'agit ici de vérifier si les écritures sont « justes » (min 13 :32 ; 14 :49 ; 16 :34) puis *« d'aider [les] schtroumpfs à résoudre ce problème »*. Pascale oriente alors la séance vers l'apprentissage d'une technique opératoire.

L'enseignante bifurque vers l'apprentissage de la procédure de résolution initiée à l'étape précédente : la décomposition du second terme de la soustraction en dizaines-unités. Ainsi par exemple, soustraire 56 revient à soustraire 50 puis 6. Nous formulons deux hypothèses expliquant cette bifurcation :

- La première hypothèse est que l'enseignante ne reçoit pas les productions des Schtroumpfs comme prétexte à faire analyser des procédures mais comme un prétexte à faire corriger et résoudre des problèmes. Lors des entretiens rétrospectifs, elle déclare « *L'histoire des Schtroumpfs, ça tombe un peu du ciel aussi. Pourquoi ne pas dire directement, « écoutez on va faire un problème pour la classe d'à côté » plutôt que de parler de Schtroumpfs ?* » (Pas-entr-11/12/2014). Dans cet entretien, elle compare « *l'histoire des Schtroumpfs* » à une activité habituellement menée dans sa classe : « *l'objectif était de résoudre le problème. Un peu un défi d'aller donner la solution à l'autre classe pour voir si c'est juste ou faux. C'était un jeu.* […] *C'est plus des modalités, tu établis un cadre de travail qui est différent.* » (Pas-entr-30/03/2017). Le rapprochement des deux questions « *Avec les Schtroumpfs, c'était aussi des modalités de travail non ?* » (*Ibid.*) et « *Alors comment est-ce qu'on pourrait aider nos*

Schtroumpfs à résoudre ce problème ? » (Pas-S16-min17 :39), montrent que Pascale ne reconnait pas dans cette séance l'enjeu didactique de la séance, ne percevant en « l'histoire des Schtroumpfs » qu'une modalité de travail, qu'elle semble rattacher au format pédagogique d'échanges plusieurs fois relevé depuis le début de notre analyse.

- La seconde hypothèse, qui n'exclut pas la première, est que l'enseignante poursuit le travail entrepris lors de la séance précédente. Rappelons que jusqu'à présent, les élèves effectuent les calculs en ligne selon une méthode que l'enseignante nomme « méthode croisée », en opérant séparément sur les dizaines puis sur les unités (*cf.* Figure 36). L'étape précédente avait montré l'inefficacité de celle-ci lorsque le chiffre des unités du second terme est supérieur au chiffre des unités du premier terme. Par ailleurs, un élève, Thomas, avait initié une technique par retraits successifs. (Tableau synoptique 8, min 11 :45).

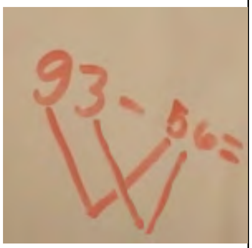


Figure 36 : tentative d'effectuer une soustraction en ligne

En position topogénétique haute, l'enseignante, dans le droit fil de la séance précédente, justifie l'abandon de cette technique pour une autre technique en reprenant une élève : « *Lara me disait mais je ne peux pas enlever six à trois. Elle a entièrement raison, donc puisque je suis bloquée, je ne peux pas enlever un plus grand nombre à un plus petit nombre.* [Montrant la méthode par retraits successifs, *cf.* Figure 37], *je vais faire avec cette méthode.* » (min 31 :42)

Ce choix est d'autant plus facile qu'il n'est pas en contradiction au regard de la situation issue de l'ingénierie, avec certaines des procédures utilisées par les schtroumpfs qui opèrent d'abord sur les dizaines, puis sur les unités. Les exercices d'entrainement qui visaient initialement à faire émerger l'ordre de grandeur à la dizaine près (« Entrainement à l'ordre de grandeur » (Berté, 1995, p.40) deviennent alors des problèmes d'entrainement à cette nouvelle technique.

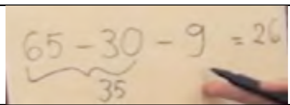
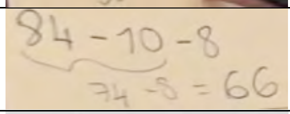
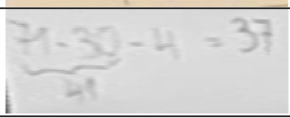
<table>
<tr><td>65 – 39</td><td>
</td></tr>
<tr><td>84 – 18</td><td>
</td></tr>
<tr><td>71 – 34</td><td>
</td></tr>
</table>

Figure 37 : entraînement à effectuer des calculs en ligne

Remarquons que cette bifurcation sur l'apprentissage de cette technique a pour conséquence de modifier la place de la résolution des problèmes au sein de la séance : celle-ci est reléguée après l'apprentissage d'une nouvelle technique, ce qui corrobore notre interprétation d'une distance prise avec l'ingénierie.

2.2.4.1.2. Séance 17

La leçon 13 de l'ingénierie didactique est structurée comme la précédente autour de deux problèmes appartenant à la catégorie eEe[79]. Le premier problème est résolu des schtroumpfs et il s'agit d'analyser leurs procédures de résolution. Le second est à résoudre individuellement par les élèves. Le texte de l'ingénierie précise que « selon la classe et les productions antérieures, le maitre peut introduire les schtroumpfs qu'il veut (Frileux fait le dessin, Farceur joue la règle plus grand, plus petit, mais un peu au hasard, Grognon, Cuisinier, etc.). Cependant, la séance doit finir [en présentant] quatre procédures importantes » (Berté, p.42), celles de Schtroumpfette, Schtroumpfissime, Super Schtroumpf et Grand Schtroumpf.

- Les procédures de Schtroumpfette et Schtroumpfissime permettent d'obtenir la solution en deux coups : par ajustement des dizaines puis des unités pour la première procédure, et par ajustement des unités puis des dizaines pour la seconde.
- Super Schtroumpf et Grand Schtroumpf obtiennent la solution en un coup, l'un avec l'addition lacunaire, l'autre avec une soustraction.

Une première analyse globale de la séance montre que si l'enseignante retient les problèmes de l'ingénierie, elle n'introduit aucune de ces procédures. La séance est en réalité remaniée en une séance de vérification de résultats obtenus par des personnages fictifs. Ceci conforte l'hypothèse que nous avions émise lors de l'analyse de la séance 16 : Pascale reçoit l'introduction des Schtroumpfs comme une modalité de travail et non comme « un apprêt didactique », qui dans le cadre d'une situation de formulation, prépare la construction de l'algorithme de la soustraction. Lors de la séance précédente, il s'agissait d'aider les Schtroumpfs à résoudre les problèmes, dans cette séance-ci il s'agit de vérifier leurs résultats.

[79] eEe : problème appartenant à la catégorie combinaison d'états. Il s'agit ici de rechercher l'état d'une partie, connaissant deux parties.

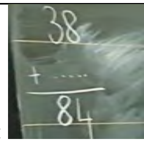
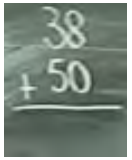
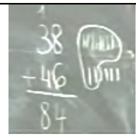
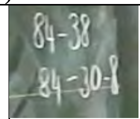
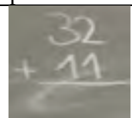
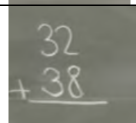
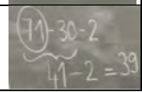
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	**Problème 1 :** Dans les deux classes de 3P 4P, il y a 84 enfants. Nous avons compté 38 filles. Combien y a-t-il de garçons ?			
1 :15	Col.	Lecture du problème	P fait énoncer les données importantes du problème : « *qu'est-ce qu'on cherche Lara ? […] quelle information on nous donne ? […] est-ce qu'il y a une information dont vous n'aurez pas besoin ?* »	Barnabé : « *on a compté 38 filles* » Lara : « *mon tout, c'est 84* » information inutile : le niveau des classes
3 :07	Ind.	Résoudre le problème	P circule parmi les élèves.	Léon et Marie-Laure : 84 – 30 – 8 accompagné d'un comptage sur les doigts / Maéva : dessin / écriture soustractive : 84 – 38 = 46 / Lara : 84 – 30 – 8 = 54
7 :34	Col.	Écrire l'addition lacunaire	P demande une écriture additive en colonne : « *alors si je reprends l'idée que les schtroumpfs apprennent à faire les additions en colonnes, hé bien avant cela, je voudrais juste que vous me disiez,* ***si vous savez quelle addition en colonne*** *je pourrais poser à partir de cet énoncé là ?* » A Maéva : « *alors tu vas pas me dire ton résultat, tu vas me dire ce que t'as posé comme addition, qu'est-ce que t'as écrit comme addition ?* »	Maéva dicte : 
9 :39		Effectuer + 38 50 puis conclure	P présente la solution de **Schtroumpf Bricoleur :** « *il s'est dit, ah bien tiens, je vais faire 38 + 50 […]* **ça marche ou pas ? »** P : « *alors si je pose en colonne, comment est-ce que je calcule ?* » P porte l'attention des élèves sur la manière d'effectuer une addition en colonne : « *mais quand je fais en colonne je vais regarder quoi en premier les unités puis ensuite les dizaines, et quand ça continue les centaines* » 	Les élèves s'esclaffent. Jules « ça fait 88 et nous on cherche 84 » Explication de Jules : 30 + 50 = 80 et 80 + 8 = 88 » Chloé effectue l'addition en colonne. Les élèves s'accordent pour dire que le schtroumpf bricoleur n'a pas trouvé la solution, et pensent qu'il en faut « *4 de plus* » Seul Thomas à ajuster « *4 de moins* », mais se perd dans les explications.
13 :14		Effectuer + 38 46 puis conclure	Présentation du **Schtroumpf Cuisinier :** « *il s'est dit ha ben j'ai mes 38 filles, moi je dis qu'il y a 46 garçons* ***est ce que c'est juste ?*** » P s'attache à faire dire la raison de la retenue. P dessine 8 traits et 6 traits puis explique le groupement par 10 pour obtenir une dizaine. P : « *est ce que schtroumpf cuisinier a trouvé le nombre de garçons ?* 	Marie-Laure : oui. Maéva fait l'addition en colonne : « *8 et 6 ça fait 14 […] tu mets le 1 dans les dizaines* » Marie Laure : « *pour faire 14, on doit faire 10 + 4, et le 10, tu vas le mettre dans la colonne des dizaines* » Les élèves acquiescent
16 54			P revient sur la discussion avec Thomas à propos du Schtroumpf bricoleur (ajustement)	Thomas change pour 54 (il avait ajouté 4 et non retranché 4 à 50)
18 :15		Résoudre par soustractions successives	P : « *certains ont fait 84 – 38. […] comment est-ce que je calcule 84 – 38 ?* »P reprend Jules pour effectuer 84 – 30 – 8 puis lance le comptage à rebours en l'accompagnant d'un comptage sur doigts : 74, 64, 54 **Conclusion :** « *vous pouvez maintenant résoudre en faisant une soustraction, vous pouvez résoudre en faisant l'addition. Vous pouvez résoudre par les deux manières* » 	Jules : 80 – 30 Diane : « *54 – 4, on arrive à 50. 50 – 4 = 46* »
20 :20	**Problème 2 :** Dans un troupeau, il y a 71 moutons. Des noirs et des blancs. Il y a 32 moutons noirs. Combien y a-t-il de blancs ?			
21 :02	Col.	Lecture de l'énoncé	« *qu'est-ce qu'on a comme information Thomas […] qu'est-ce qu'on cherche ?* »	Maéva et Alissa lisent. Thomas indique les informations importantes
21 :31	Ind.	Résoudre le problème	P circule dans la classe ;	Écritures soustractives en ligne : 71 – 32 / 71 – 30 – 2 = 39 / 70 – 40 + 1 – 2 / dessin (Maéva) Écriture additive : 32 + 39
25 :53	Col.		P fait repérer le « tout » puis dire les procédures utilisées par les élèves. Interroge Lara puis Alissa	Lara : 71 – 30 – 2 Alissa écrit l'addition lacunaire en colonne.
27 :30		Effectuer + 32 11 puis conclure	Présentation du **Schtroumpf à Lunettes :** « il a posé [P pose l'addition en colonne] **est-ce que c'est juste ?** » P interroge Thomas. Reprise de la correspondance entre nombres, moutons blancs, moutons noirs. « *hé, demandez-vous où est mon tout et qu'est-ce que je cherche, hein, dans le problème* » 	Thomas effectue oralement l'addition mais ne sait pas à quoi pourrait correspondre le nombre 43. Les élèves sont perdus et ne savent plus ce que représente les nombres
29 :25		Effectuer + 32 38 puis conclure	Présentation du **Schtroumpf Musicien :** P : « *c'est 32 moutons noirs plus les blancs que je cherche […] et puis je suis sensée trouver 71, mon tout, alors comment je fais, Marie-Laure ?* » P provoque l'ajustement en interrogeant Thomas 	Marie-Laure effectue oralement l'addition en gérant bien la retenue lors du calcul des unités. Mais n'en tient pas compte lors du calcul à l'ordre des dizaines. Les élèves effectuent l'addition en colonne 32 + 39 (gestion de la retenue)
35 :11		Résolutions par soustractions successives	« *Par la soustraction, […], je pars de mon tout et j'enlève mes 32 moutons noirs, mais je sépare mes dizaines et mes unités, donc je fais 71 moins 30 et encore moins 2* » 	Les élèves calculent mentalement (appui sur les doigts)
	Fin de la séance : « qui trouve encore très dur, de résoudre des problèmes ? » → réponses : « *comme-ci, comme ça / le calcul quand c'est des grands nombres* »			

Tableau synoptique 10 : séance 17, site Pascale (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

Trois traits saillants ressortent de cette séance :

– **Le repérage des données du problème selon un contrat didactique pérenne**

Comme pour les séances précédentes, l'enseignante fait repérer et interpréter les données des problèmes de terme de parties et de tout : « *quelles informations on nous donne Barnabé ?* […] *Est-ce qu'il y a une information dont vous n'aurez pas besoin ?* […] *Tu vas dire que ton tout c'est 84, d'accord.* » (min01 :18). Cette manière d'initier la séance conduit la plupart des élèves à réagir selon le contrat didactique en vigueur initié dans la séance précédente : la vidéo montre tous les élèves, excepté une élève en grande difficulté, désigner les problèmes relevant d'une différence et les traduire selon une addition lacunaire ou une soustraction.

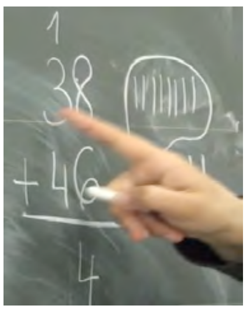
– **Une séance de vérification et non d'analyse**

La séance prévue par l'ingénierie est une séance d'analyse de procédures. Pour autant, comme pour la précédente, la séance réalisée n'est pas une séance d'analyse et de formulation mais une séance de vérification des résultats des schtroumpfs. L'enseignante fait vérifier les réponses proposées par chaque Schtroumpf : « ça *marche ou ne marche pas ?* » (Schtroumpf Bricoleur, min 09 :39), « *est-ce que c'est juste ?* » (Schtroumpf Cuisinier et Schtroumpf à Lunettes, min 13 :14 et min 27 :30), « *qu'est-ce que vous en pensez ?* » (Schtroumpf Musicien, min 29 :25). Pour répondre aux questions de l'enseignante, les élèves sont alors obligés d'effectuer les additions posées en colonne ce qui, nous en faisons l'hypothèse, est en fait l'objectif de l'enseignante.

– **La poursuite de l'apprentissage de l'addition en colonne avec ou sans retenue**

Alors qu'à la séance précédente, l'enseignante avait plutôt entrainé les élèves vers une résolution par soustractions successives en décomposant le second terme, cette séance la voit poursuivre l'apprentissage de l'addition de deux nombres nécessitant la gestion d'une retenue. Nous illustrons par un court extrait :

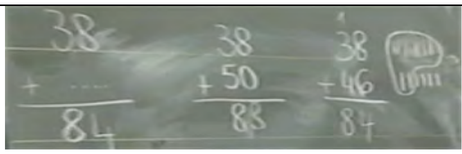
P : 4 unités, et mon p'tit groupe de 10 je vais le rajouter aux autres groupes, hein, quand tu calcules, imagine des p'tits… Soit des cubes soit des barres dans ta tête, et tu vas faire des groupes de 10 quand tu fais 8 plus 6 et ben t'as bien un groupe de 10 plus 4 unités. C'est ce que t'as écrit ici [montre au tableau] 4 unités un petit groupe de 10 que tu rajoutes [montrant la retenue] aux autres que t'as pas encore calculé et après on va voir combien ça fait de groupes de 10 en tout, hein…



Extrait 52 : Pascale – séance 17 – étayage relatif à une addition avec retenue (min 13 :14)

L’entretien rétrospectif du 31 mars 2017 nous éclaire sur les raisons de cette bifurcation. Cette séance a eu lieu peu après les congés de Pâques. Or, l’enseignante déclare ne commencer habituellement à faire des additions engageant des retenues qu’à Pâques : « *d’habitude, à Pâques, on commence à faire des additions en faisant des paquets de 10. Tu vois, 33 + 59, tu fais 30 + 50, et 9 + 3. Et le 9 + 3, ils le transforment en 10 + 2. Mais tout est fait en ligne. Après Pâques, je leur montre la même chose, mais en colonne.* […] *et c’est une sensibilisation.* » L’enseignante déclare par ailleurs « *avoir fait beaucoup de régulations vers la fin de l’ingénierie* » pour rendre accessible l’algorithme de l’addition aux élèves. Cet enseignement étant récent, nous déduisons que l’enseignante fait le choix de prendre en charge l’avancée du savoir, guidant de manière serrée, la pose en colonne d’une addition à retenues. La figure ci-dessous représente deux extraits du tableau noir lors de la résolution de chacun des problèmes.

Problème 1



[1] [2] [3]

Problème 2

Figure 38 : gestion de la retenue dans une addition

Nous constatons que chaque problème est traité selon un même déroulement : d’abord l’écriture de l’addition lacunaire [1], ensuite la vérification d’un premier essai par une addition simple sans retenue [2], ensuite la vérification d’un deuxième essai engageant une addition avec retenue [3]. Par ailleurs, les essais n’ont aucun lien les uns par rapport aux autres. Ces constats nous amènent à penser que sous couvert d’une résolution d’un problème soustractif, l’algorithme de l’addition est dans cette séance un enjeu de savoir.

– **Une résolution des problèmes par soustractions successives**

Bien qu’ayant principalement porté cette séance sur l’apprentissage de l’algorithme de l’addition posée en colonne, Pascale conforte la résolution par soustractions successives s’attachant à décomposer le second terme en dizaines-unités : « *alors 84 j’enlève 30* […] *et puis à partir de 54 j’enlève 8* » pour le premier problème (min19 :00) et « *je pars de mon tout (entoure 71 au tableau) et j’enlève mes 32 moutons noirs. Mais… je sépare mes dizaines et mes unités pour pouvoir faire le calcul… Donc je fais 71 moins 30 et encore moins 2* » pour le second problème (min35 :11).

En conclusion, cette séance montre donc enseignant et élèves engagés dans la co-construction d'un savoir relatif à l'algorithme de l'addition. La vérification des résultats des Schtroumpfs est exploitée pour donner sens à cet algorithme. Néanmoins, cet apprentissage n'est pas exploité pour initier la technique de résolution par addition lacunaire, telle qu'elle illustrée dans le texte initial par Schtroumpfissime (*cf.* séance 17). L'enseignante clôt la séance par « *vous pouvez maintenant résoudre en faisant une soustraction… Vous pouvez résoudre en faisant l'addition, d'accord ? Vous pouvez résoudre par les deux manières… Est-ce que j'ai oublié quelque chose, ça joue pour tout le monde ?* » (min 18 :15), propos que nous assimilons ici à une micro-institutionnalisation en fin de séance et nous dévoile l'enjeu d'étude visé par l'enseignante : résoudre des problèmes en additionnant ou en soustrayant.

2.2.4.2. Conclusions à propos de la cinquième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Pascale

Comme pour les étapes précédentes nous synthétisons dans deux tableaux, l'un portant sur les dimensions mésogénétiques, l'autre sur l'évolution des savoirs, les éléments sur lesquels nous concluons l'analyse de cette étape dans le site de Pascale.

Sur le plan mésogénétique

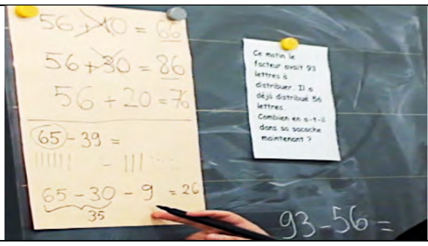
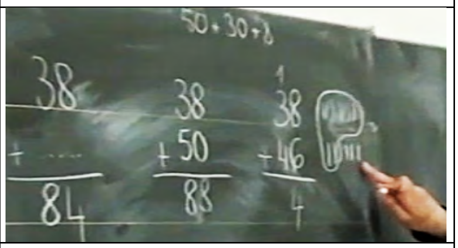
	Séance 16	Séance 17
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel
Catégorie de problèmes	Transformation : e t- E Combinaison : e E e	Combinaison : e E e
Traces au tableau		
Matériel	Fourre / Fiche de travail	Fiche de travail
Savoirs et/ou techniques mathématiques mobilisés	Recherche du complément Soustraction par décomposition du second terme en nombre de dizaines et d'unités.	Additions posées en colonne, avec ou sans retenues Soustraction par décomposition du second terme en nombre de dizaines et d'unités.

Tableau 20 : Synthèse des deux séances de l'étape 5 – « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » - du point de vue mésogénétique (Site Pascale)

- Des récurrences dans l'introduction des séances (des gestes naturalisés d'introduction dans le milieu didactique)

Contrairement aux autres étapes, Pascale fait dans cette étape des appels à la mémoire didactique brefs, se contentant de poser la question « *Où est-ce que on en était resté ?* » *(Pas-S16-min00 :10).* Par contre, nous observons dans cette étape une récurrence dans la manière dont elle introduit les problèmes dans le milieu didactique : Pascale insuffle, par un jeu de questions, une méthodologie de lecture de l'énoncé. Nous dressons ces récurrences dans le tableau ci-dessous :

Séance 16	Problème 1 (min 1 :15)	« *qu'est-ce qu'on va imaginer en premier ?* […] *quelle est la question ?* […] *qu'est ce qu'on cherche ?*
	Problème 2 (min 39 :41)	« *on va se faire le film* […] *première information ?* […] *ensuite qu'est-ce qu'on nous dit d'autres ?* […] *et puis qu'est-ce que je cherche ?* »
Séance 17	Problème 1 (min 02 :12)	« *Qu'est-ce qu'on cherche ?* […] *Quelle information on nous donne* […] *Est ce qu'il y a une information dont vous n'aurez pas besoin ?* »
	Problème 2	« *qu'est-ce qu'on a comme information Thomas* […] *qu'est-ce qu'on cherche ?* »

Tableau 21 : récurrence d'entrée dans les problèmes

Nous rapprochons ces récurrences des préconisations développées dans les moyens COROME de 2P[80], référence institutionnelle des enseignants en Suisse romande. Un module est entièrement consacré à la thématique « Apprendre à sélectionner et organiser des informations, à comprendre des énoncés » (Moyens COROME, 1998, p.37). L'objectif indiqué est « d'exercer son raisonnement au travers d'activités qui demandent de lire, mettre en relation, classer, organiser des informations et utiliser des représentations personnelles pour se rappeler ou communiquer des informations. » (*Ibid.*) Aussi, nous interprétons la manière de faire de Pascale dans cette étape, comme une manière habituelle, voire naturalisée dans sa pratique professionnelle, d'introduire des éléments d'ordre méthodologique dans le milieu didactique.

- Certains éléments de l'ingénierie retenus, d'autres sont écartés

Pascale retient bien les énoncés de problèmes proposés par l'ingénierie didactique. Par contre, elle ne retient pas les procédures de résolution des Schtroumpfs. Pour préciser notre propos, nous mettons en regard, dans le tableau ci-dessous, les procédures à analyser telles que prévues par l'ingénierie et ce que propose en réalité l'enseignante aux élèves.

[80] Nous rappelons que les moyens COROME de 4P-Harmos n'étant pas parus, les enseignants fonctionnent avec les moyens COROME 2P.

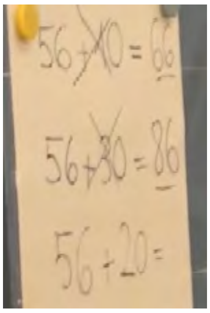
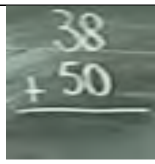
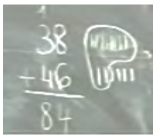
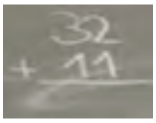
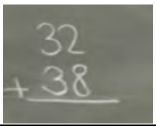
	Les procédures telles que présentées dans l’ingénierie	Les procédures posées dans le milieu didactique
Séance 16	1- Schtroumpf Bricoleur 56 + ... = 93 ; 56 + 10 = 66 ; 56 + 20 = 76 ; 56 + 30 = 86 je n’essaie pas 40 c’est trop	 *«**Le Schtroumpf Bricoleur a écrit ceci :** 56 + 10. Pourquoi est-ce qu’il a écrit çà ? Qu’est-ce que vous en pensez ? est-ce que c’est juste, et pourquoi ? »*
	2- Schtroumpf Musicien 56 + ... = 93 ; 56 + 30 = 86 ; 87 88 89 90 91 92 93 ; 56 + 37 = 93 Le maître cache la dernière opération avec le 37	*«**Le Schtroumpf Musicien a une autre idée :** 56 + 30 = 86 Alors le calcul que le Schtroumpf Musicien a écrit, est juste, mais est-ce qu’il correspond au problème ? »*
		« Le Schtroumpf Maladroit a fait : *56 + 20 =… »*
	4- Azraël 56 + 93 = 149	***Comment est-ce qu’on pourrait aider nos Schtroumpfs à résoudre ce problème ?***
Séance 17	1- Schtroumpfette 38 + ... = 84 ; 38 + 50 = 88 ; 38 + 46 = 84	 **Schtroumpf Bricoleur :** *« il s’est dit, ah bien tiens, je vais faire 38 + 50* […] ***ça marche ou pas ?»***
	3- Super Schtroumpf 38 + ... = 84 ; 38 + 46 = 84 Il fait l’addition à trous	 **Schtroumpf Cuisinier :** *« il s’est dit ha ben j’ai mes 38 filles, moi je dis qu’il y a 46 garçons **est ce que c’est juste ?** »*
	2- Schtroumpfissime 38 + ... = 84 ; 38 + 6 = 44 ; 38 + 46 = 84	 **Schtroumpf à Lunettes :** *« il a posé **est-ce que c’est juste ?** »*  **Schtroumpf Musicien : «** *lui, il a peut être fait un peu mieux* **»**
	4- Grand Schtroumpf 84 - 38... = 46 Que fait-il ? Attente : il ne sait pas faire mentalement, il fait une soustraction en colonne.	***« certains ont fait 84 – 38. […] comment est-ce que je calcule 84 – 38 ? »***

Tableau 22 : mise en regard des procédures à analyser proposées par l’ingénierie et celles mises à l’étude dans la classe

Ce tableau montre que si le texte de l’ingénierie présente des procédures à analyser, Pascale transforme les deux séances : la séance 16 devient une séance de vérification de certains résultats tandis que la séance 17 devient une séance de résolution. Dans un entretien rétrospectif, Pascale rapproche ces séances d’une activité ordinaire en usage dans sa classe : *« nous inventions des problèmes pour la classe d’à côté, et la classe d’à côté devait le résoudre. C’était pour que cela soit quelque chose de concret, qu’il y ait un destinataire, pour donner plus de sens à l’activité.* […] *Plus on met les élèves dans des situations concrètes,* *plus l'enjeu est facile à comprendre.*» (Pas-ent-06/03/2017). Admettant ensuite que, « *ne voyant pas moi-même le sens, j'ai de la peine à le transmettre aux élèves en fait* », elle ne conçoit « *l'histoire des Schtroumpfs* » que comme un « *cadre de travail différent* », une modalité de travail relevant d'une gestion de classe.

Sur le plan de la chronogénèse

Le tableau suivant nous permet de synthétiser l'avancée du savoir lors de cette étape.

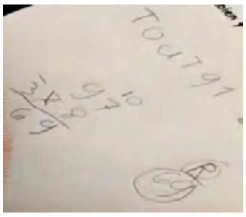
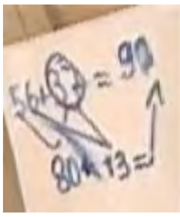
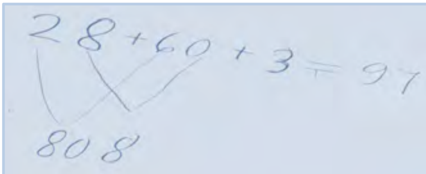
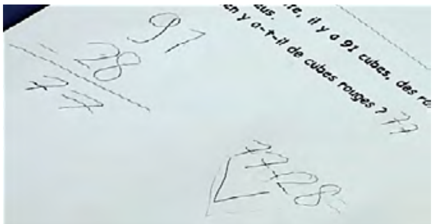
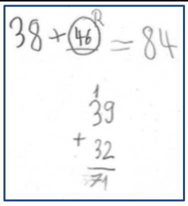
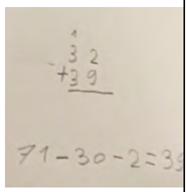
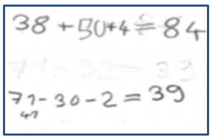
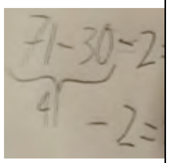
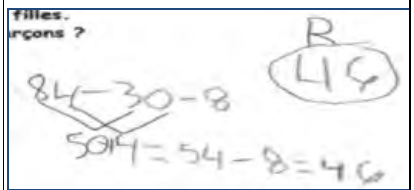
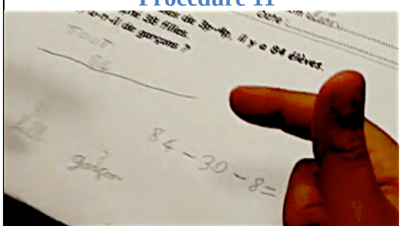
	Séance 16	séance 17
Simulation des problèmes avec cubes	non	non
Reconnaissance d'un problème soustractif	oui	oui
Procédures élèves lors de la recherche individuelle	 **Procédure 1**  **Procédure 2**  **Procédure 3**  **Procédure 4**  **Procédure 5**  **Procédure 6**	 **Procédure 7**  **Procédure 8**  **Procédure 9**  **Procédure 10**  **Procédure 11**  **Procédure 12**
Vérification empirique	non	non
Niveaux de preuve apparaissant au fil de la séance	-	-
Émergence de propriétés et/ou savoirs mathématiques	Décomposition du second terme de la soustraction en dizaines et unités	Algorithme de l'addition posée en colonne
Procédures de résolution	Recherche du complément Soustraction avec décomposition du second terme.	Recherche du complément Soustraction avec décomposition du second terme.

Tableau 23 : Synthèse des deux séances de l'étape 5 - « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » - du point de vue chronogénétique (Site de Pascale)

- Deux techniques opératoires menées en parallèle : l'addition avec retenue et la soustraction par décomposition du second terme.

L'enseignante poursuit l'étude des deux procédures initiées lors de l'étape 4.

En séance 16, la résolution par soustractions successives en décomposant le second terme en dizaines-unités est consolidée. L'interrogeant sur cette technique qui n'est pas explicitement mentionnée dans les textes officiels, nous relevons dans les propos de Pascale un argument révélateur de son épistémologie pratique : « *Pour la soustraction, c'est pas dans le PER, ni dans les moyens COROME, c'est moi ! (rires) Et ça marche bien ! Je décompose pour l'addition et je suis la même logique pour la soustraction. Et puis moi, je préfère ça parce que ça montre qu'il a compris…* » (*Ibid.*).

En séance 17, Pascale introduit les additions avec retenue : la vérification du résultat du Schtroumpf Cuisinier demande une explication quant à la gestion de la retenue (min 13 :14). Aussi Pascale s'appuie sur une schématisation (Cf. Extrait 52) pour expliquer son fonctionnement. Nous retrouvons ici une pratique ordinaire de l'enseignante : « *j'utilise les multicubes et souvent les post'it pour découper la dizaine et la mettre en retenue*» (Pas-ent-06/03/2017). Pour autant, l'introduction de l'algorithme de l'addition n'amène pas la classe sur le terrain de l'ingénierie telle qu'initialement prévue. En effet, si l'introduction de l'algorithme de l'addition peut laisser penser que Pascale remet en scène la notion de preuve, il n'en est rien. Les termes « preuve », « prouver », « vérifier » ainsi que leurs mots dérivés ne sont jamais utilisés. De même, lorsqu'un embryon d'ajustement apparaît en séance 17 (min 9 :39), celui-ci n'est pas exploité, ne laissant pas la méthode de la fausse position[81] émerger. Enfin, une construction algorithmique de l'addition lacunaire n'est pas ébauchée.

Au final, la conclusion nous est donnée par Pascale elle même lorsqu'elle déclare à ses élèves : « *vous pouvez maintenant résoudre en faisant une soustraction, vous pouvez résoudre en faisant l'addition, vous pouvez résoudre par les deux manières* » (min 18 :15). Les traces écrites des élèves montrent que les résolutions se partagent entre recherche d'un complément et soustractions successives. Si quelques élèves dessinent encore (procédure 1), ils sont maintenant peu nombreux, la majorité faisant appel à des procédures numériques. Les traces vidéos permettent de voir que les procédures sont partagées entre la recherche d'un complément (procédures 4, 5, 11 et 12) et la recherche par soustractions successives (procédures 8, 9 et 10). Pour autant, quelques procédures montrent une recherche d'un

[81] La méthode de la fausse position consiste à proposer une réponse que l'on pense proche de la solution puis, après vérification, à la corriger en tenant compte de l'écart constaté entre le résultat obtenu et le résultat attendu.

algorithme opératoire de la soustraction : les procédures 2 et 6 montrent une recherche d'un algorithme propre à la soustraction.

Pour conclure, il ressort de l'analyse de cette cinquième étape que : d'une part, elles relèvent d'une intention didactique assumée de l'enseignante de ne pas poursuivre dans l'esprit de l'ingénierie didactique mais de bifurquer sur l'apprentissage de deux procédures, l'une « *en montant* » (Séance 16 min 39) c'est-à-dire en recherchant le complément par additions successives, l'autre en « *en descendant* » (*Ibid*.) c'est-à-dire en soustrayant successivement les dizaines puis les unités. Les propos de l'enseignante en entretien rétrospectif nous conduisent à interpréter sa prise de distance vis-à-vis de l'ingénierie comme indice de son épistémologie pratique doublé d'un assujettissement institutionnel : « *les additions en colonne avec retenue c'est en cinquième, c'est pas un quatrième.* [...] *Donc du coup j'étais un petit peu aussi embêtée par rapport au programme. C'est que je ne voulais pas leur apprendre un truc trop précipité, de manière précipitée, juste pour répondre à l'ingénierie.* » (Pas-entr-30/03/2017).

Apparaît donc ici, la prégnance des déterminants institutionnels qui amènent Pascale lors de l'implémentation du prototype didactique qui lui est fourni, à jongler avec les différentes contraintes du programme et sans doute de ses propres options épistémiques quant à l'enseignement de la soustraction. C'est à la discussion de ces interprétations, dont nous avons vu qu'elles se renforçaient au fil de l'analyse des différentes étapes que nous concluons l'analyse de l'étape 5, d'autant que dans ce site, l'étape 6 de l'ingénierie n'a pas été mise en œuvre. Ce point est important, car comme nous l'indiquions en méthodologie, nous ne conduirons pas l'analyse de cette étape 6 pour les deux sites français.

Après avoir conduit, sur la base de l'analyse mésodidactique de chacune des séances constitutives des principales étapes de l'ingénierie (étapes 1, 2, 4 et 5) telle que mise en œuvre par Pascale dans sa classe, nous sommes en mesure de produire une interprétation macrodidactique du processus d'implémentation de cette ingénierie dans le site suisse. Nous revenons pour ce faire, à la lumière des constats établis dans les sections précédentes, sur les deux principales questions qui orientent notre travail de recherche, à savoir démêler ce qui dans la pratique observée, relève des influences du curriculum genevois et ce qui relève des déterminants liés à l'épistémologie pratique de Pascale

3. Réflexions conclusives sur la mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans le site de Pascale : synthèse macrodidactique

Dans cette section, nous revenons sur les deux questions de recherche qui sous-tendent notre problématique : dans la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Pascale, qu'est-ce qui relève des influences des pré-construits institutionnels et qu'est-ce qui ce qui relève de déterminants liés à son épistémologie pratique ? Pour soutenir notre propos, nous mettons en regard dans la figure ci-dessous la mise en œuvre de l'ingénierie par Pascale avec l'ingénierie telle que prévue initialement.

Étape 1 : **L1, L2, atelier, C1**	**Étape 2 :** **L3, L4, L5**	**Étape 3 :** **L6 & C2, L7, ateliers, L8**	**Étape 4 :** **L9, L10, L11**	**Étape 5 :** **L12, L13**	**Étape 6 :** **L14, L15**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**« L'addition comme moyen de preuve d'un résultat. »**	**« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signe + et – Calcul mental »**	**« La stratégie des essais »**	**« Réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs »**	**« La soustraction »**

Tableau 24 : vue synthétique de l'ingénierie didactique (Berté, 1996)

Étape 1 : 5 séances	**Étape 2 :** 3 séances	**Étape 3 :** 4 séances	**Étape 4 :** 3 séances	**Étape 5 :** 2 séances	**Étape 6 :**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**Vérification d'un résultat par comparaison des résultats obtenus selon deux procédures**	Techniques de calcul mental Introduction du codage des opérations. Différentes écritures pour un même nombre. (principaux constats sur cette étape, analyse détaillée, non présentée)	**Calcul d'une différence : - par retraits successifs - ajouts successifs**	**Introduction de l'algorithme de l'addition** **Brève apparition de la preuve d'un résultat**	Non réalisée

Tableau 25 : vue synthétique de la mise en œuvre de l'ingénierie par Pascale

Cette mise en regard présente un premier fait remarquable : la sixième étape de l'ingénierie didactique n'est pas mise en œuvre par l'enseignante. Cette étape a pour principal objectif de « présenter une soustraction en colonne ». Or, ainsi que le précise Pascale, les algorithmes de l'addition et de la soustraction ne sont pas inscrits dans les programmes au niveau 4P.

Un deuxième fait remarquable nous est dévoilé lors des entretiens rétrospectifs. Faisant le constat que les élèves manquaient de base en numération, Pascale incorpore « *Tous* *les jours, 15 minutes entre deux séances* […] *je mêlais opérations et numération dans les régulations, parce que ça aidait après au moment de la résolution de*(s) *problèmes.* » Elle glisse entre les séances des activités non prévues par l'ingénierie, qu'elle convoque à partir de son expérience professionnelle. (Jeu de plateau ; fiche Freinet). Elle considère en effet que ces activités facilitent et rendent accessible aux élèves la résolution des problèmes soustractifs. Ses usages professionnels viennent prendre ici le devant de la scène didactique, d'autant que les problèmes qu'elle propose aux élèves sont compatibles selon elle avec les visées de l'ingénierie.

Pourtant, malgré ces régulations au long cours, l'analyse de la séquence mise en œuvre par Pascale montre une bifurcation importante dans la mise en œuvre de l'ingénierie didactique.

Lors de la première étape de l'ingénierie, la dévolution du projet d'apprentissage de la soustraction a bien eu lieu. Pascale intervient peu ou indirectement, laisse les élèves résoudre les problèmes proposés selon leurs propres procédures et délègue aux élèves simulation les problèmes. En nous déclarant *« je pars du principe que ce n'est pas moi qui détiens le savoir. Le savoir il va se construire aussi entre pairs, entre eux tu vois. Donc il y a ce moment vraiment bouillonnant, on est là, on est tous ensemble, on cherche et c'est pour ça que je cherche avec eux. Ils me disent un truc, et puis c'est pas ce que j'avais prévu au départ, mais hop ! Je les suis dans leur truc* » (Pas-entr-03/05/2016), l'enseignante contribue à confirmer une facette de son épistémologie pratique, telle qu'identifiable au niveau de son action didactique avec les élèves relativement à sa vision de l'enseignement apprentissage : le savoir se co-construit entre les tous les acteurs du système didactique, élèves et professeur. Lors de cette première étape, l'enseignante n'amène ni les solutions ni les procédures à mettre en œuvre, mais fait en sorte que le projet d'apprentissage de la soustraction prenne forme dans les interactions entre élèves.

Néanmoins, nous observons dès la seconde étape une inflexion radicale tant dans les enjeux d'études que dans la manière de faire. Ainsi, alors que la deuxième étape de l'ingénierie construit la preuve par sur-comptage ou par addition en délaissant progressivement la preuve empirique, Pascale dirige les élèves vers la recherche d'un complément en introduisant dès le début de l'étape l'addition dans le milieu didactique. Prenant une position topogénétique haute, nous avons vu que ses demandes se font plus directes : « *je veux une addition pour arriver à 45* » (Étape 2 - séance 6). « *Est-ce que quelqu'un a trouvé cette addition ? 46 plus quelque chose pour trouver 75 ?* » (Étape 2 - séance 8). La validation des résultats des élèves a ainsi lieu par comparaison avec le résultat obtenu par recherche du complément. Plus tard, lors de la quatrième étape, Pascale installe deux procédures de résolution, l'une par recherche du complément par ajouts successifs, l'autre en effectuant des soustractions par retraits successifs (*cf.* Figure 30 et Figure 31, supra) pour ensuite les officialiser lors de la cinquième étape : « *vous pouvez maintenant résoudre en faisant une soustraction, mais vous pouvez résoudre en faisant l'addition. Vous pouvez résoudre des deux manières* » (Étape 5 - séance 17). Pascale avance deux arguments justifiant son choix de ne pas se maintenir dans l'esprit de l'ingénierie didactique. Le premier argument se réfère au plan d'étude romand : « *les algorithmes opératoires, de l'addition et de la soustraction, ne sont pas étudiés en 4P mais en 5P.* ». Elle sous-entend par là qu'elle ne pouvait mettre en œuvre la stratégie des essais développée dans l'étape 4 de l'ingénierie didactique, qui demandait une maitrise de la technique opératoire de l'addition. Le second argument se réfère à un usage préconisé dans les moyens COROME : « *À Genève, nous travaillons en 4P l'addition et la soustraction en parallèle… par la recherche du complément. C'est dans nos moyens d'enseignement. Et je suis d'accord avec ça, d'ailleurs…* ». Cet argument se trouve confirmé dans le livre du maitre des moyens d'enseignement : « le "champ de l'addition" englobe les deux opérations réciproques […] la soustraction est intégrée aux activités sur "l'addition", envisagée dans l'acceptation large du terme […]. En fait l'algorithme est au programme de 3P, on le mentionne toutefois dans ces pages, car il *pourrait* apparaître en deuxième année déjà. » [82] (COROME pp. 181-187). En confrontant par triangulation les éléments de discours (issus des entretiens) aux observations, ainsi qu'aux directives institutionnelles nous pouvons conclure que Pascale justifie, sous couvert des préconisations institutionnelles, l'écart qu'elle introduit dans la mise en œuvre de l'ingénierie didactique et dans l'usage qu'elle fait de cette ressource didactique.

Cependant, les productions de quelques élèves montrent dès l'étape 4 des habiletés opératoires, en particulier des additions par décompositions - recompositions des nombres en jeu dans l'opération qui auraient pu permettre à Pascale de tenir le cap et les enjeux de l'ingénierie. Pour illustrer notre propos, nous renvoyons le lecteur aux procédures 4, 10, 13 relevées lors de l'étape 4. Nous nous sommes alors posé la question de savoir si les raisons d'ordre institutionnel évoquées par Pascale suffisaient à justifier qu'elle ne se soit pas emparée de ces productions pour introduire dans le milieu didactique la preuve d'un résultat, puis la stratégie de résolution par essais. Nous obtenons dans les entretiens rétrospectifs quelques éléments permettant d'affiner notre interprétation : « *Ici, on n'a pas l'habitude de*

[82] Nous rappelons que ces moyens COROME sont écrits pour le niveau 2P, qui correspond maintenant au niveau 4P-Harmos.

vérifier. On est plutôt dans l'action. Ce qui compte c'est d'avoir des moyens de résoudre. […] *À 7 /8 ans, tu as envie d'être dans l'action, de calculer, t'as pas forcément envie de vérifier, de prouver* » (Pas-entr-18/06/2016), Nous tenons ici des arguments non plus d'ordre institutionnel, mais relevant nous semble-t-il de son épistémologie pratique : (i) il n'est pas dans les habitudes de Pascale de demander à un élève une preuve d'un résultat. Du reste, les observations *in situ* ont montré que seuls les niveaux NP1 et NP2 ont été utilisés ; (ii) elle attribue aux élèves une faible envie « de prouver ». Cet argument subjectif indique selon nous, une mécompréhension des enjeux épistémiques qui président à l'apprentissage de la soustraction, et une forme de croyance personnelle qui, on l'a vu, influencent ses décisions et ses actions en classe.

Pour autant, Pascale maintient toutefois une certaine proximité avec l'ingénierie didactique. Elle initie l'algorithme de l'addition en fin d'étape 4, pour ensuite approfondir son apprentissage en étape 5. Cette introduction, dont on a vu au fil de l'analyse qu'elle relevait d'actions mésogénétiques, lui permet alors d'aborder la preuve d'un résultat en faisant vérifier certains résultats.

Pour conclure notre analyse, nous pouvons résumer les modalités d'implémentation observées dans le site genevois, comme la mise en œuvre de compromis permettant à cette enseignante de finement négocier les exigences des préconisations institutionnelles et des visées de l'ingénierie didactique. Si le sens des algorithmes opératoires n'a pas émergé, l'activité de résolution de problème, telle que valorisée par les pré-construits institutionnels genevois, a permis de rendre saillants pour les élèves, les différents sens d'une différence. Qu'en est-il dans les sites français ? Nous étudions successivement dans les deux sections qui suivent les mises en œuvre des deux enseignantes en France.

Titre 3. ANALYSE DES PRATIQUES D'UNE ENSEIGNANTE CHEVRONNEE EN FRANCE

Nous développons le même type d'analyses que celui conduit dans le site de Pascale, en examinant étape par étape les manières dont une enseignante chevronnée française met en œuvre le texte de l'ingénierie didactique de la soustraction à l'école primaire. Comme précisé en méthodologie, nous nous appuyons sur les données collectées en première main dans le cadre d'une « recherche collaborative » financée par l'ESPE de Midi-Pyrénées, et comportant les documents vidéographiques de toutes les séances, les traces écrites des élèves et des entretiens, notamment ante et post leçons avec l'enseignante.

1. Contexte de l'observation

1.1. Caractéristiques de l'enseignante et de la classe observée

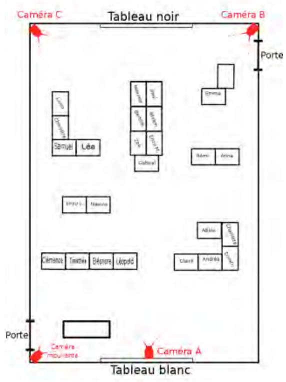
L'enseignante (Valentine) a une vingtaine d'années d'expérience en tant que Professeure d'École. Elle a d'abord occupé durant 14 ans un poste de Directrice d'école. Durant cette période, elle a suivi de nombreux stages professionnels pour la plupart à dominante scientifique. Obtenant le Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maître Formateur (CAFIPEMF), elle est depuis 4 ans « maitre-formateur », ce qui lui permet d'intervenir dans des stages ou des sessions de formation continue auprès de ses collègues du département, ainsi que d'accueillir dans sa classe des étudiants en formation initiale se préparant au professorat des écoles. Ces éléments nous permettent de considérer que Valentine est une enseignante chevronnée, tout en pointant certains traits communs avec le parcours professionnel de Pascale dont nous venons d'analyser les mises en œuvre.

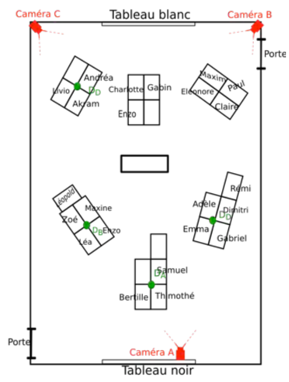
La classe observée est un cours élémentaire 1 (CE1) situé dans une école de centre-ville, caractérisée par un niveau socio-économique aisé. Il s'agit d'un cours simple, c'est-à-dire composé d'un seul niveau. Composée de 27 élèves (13 filles et 14 garçons), la classe est décrite par Valentine comme ayant un niveau hétérogène mais avec une bonne tête de classe : « *il y a de bons élèves et des élèves plus faibles, mais avec une bonne tête de classe qui tire* » (Val- Entr.notes au vol).

1.2. Caractéristiques du fonctionnement pédagogique de la classe

Le travail « en îlots » caractérise le fonctionnement pédagogique dans cette classe : l'enseignante fait travailler sa classe en groupes, groupes qu'elle reconstitue à chaque retour de vacances en fonction du niveau des élèves, ainsi que du climat de la classe. Les élèves coopérant au sein des îlots sont hétérogènes entre eux de façon à provoquer stimulation et émulation : « *Même les enfants qui peuvent avoir des difficultés au départ vont vite être stimulés par les autres. Il y a une émulation naturelle qui se fait.* » (S1-Entr.ante-Val-04/10/2013)

Nous présentons ci-après deux organisations spatiales de la classe représentatives :





Une deuxième caractéristique du fonctionnement de la classe est la place donnée à l’oral. Pour l’enseignante, il est important que les élèves s’expriment. À propos de la mise en œuvre de l’ingénierie didactique, elle déclare : « *C’est vrai que les mettre en situation orale, c’est important quoi… qu’il soit en production, en émetteur ou en récepteur. Je trouve que c’est bien de faire ça. Je pense que ça aura un impact après.* » (Val-S1-Entr.post-). Pour autant, l’écrit n’est pas négligé, mais sa fonction sera essentiellement une fonction de suivi pour l’enseignante. Dès les premiers entretiens, elle déclare : « *c’est un appui, quand même, pour voir l’évolution des procédures chez les élèves.* »

La troisième caractéristique est relative à la résolution de problème. L’enseignante présente l’activité de recherche en mathématique comme une activité régulière : « *on pratique souvent les situations-problèmes. On fonctionne comme ça* (dans les diverses activités scolaires). *Les enfants ont l’habitude de chercher et ils savent qu’il peut y avoir plusieurs solutions pour trouver la même réponse* » (Val-S1-Entr.post-). Elle ne prévoit donc pas de difficultés importantes qui conduiraient les élèves à ne pas proposer une réponse aux problèmes mathématiques.

Comme nous l’avons précédemment fait pour l’analyse du site genevois, nous poursuivons en décrivant les différentes étapes mises en place dans la classe de Valentine, puis nous faisons émerger les traits caractéristiques du déroulement de l’ingénierie dans ce système.

2. Descriptions synoptiques des différentes étapes dans la classe de Valentine

2.1. Modalités temporelles de mise en œuvre de l'ingénierie didactique

La figure ci-après synthétise les modalités temporelles d'implémentation de l'ingénierie didactique par l'enseignante. Le tableau de gauche rappelle le déroulé des leçons de l'ingénierie présentée dans le document de Berté (1996) ; le tableau de droite indique le déroulé des séances observées. Le jeu de couleurs, blanc et beige, délimite chaque étape comme définie par l'ingénierie initiale.

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique « la soustraction à l'école élémentaire »	Leçons
1	Dévoluer l'apprentissage de la soustraction	Leçon 1
		Leçon 2
		Ateliers de soustraction
		Contrôle 1
2	L'addition comme moyen de preuve	Leçon 3
		Leçon 4
		Leçon 5
3	Sens et vocabulaire de la soustraction Introduction des signes « + » et « - » Calcul mental	Leçon 6 et contrôle 2
		Leçon 7 et contrôle 3
		Ateliers Jeu de la boîte
		Exercices sur les écritures
		Leçon 8
4	La stratégie des essais	Leçon 9
		Leçon 10
		Leçon 11
5	Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs	Leçon 12
		Leçon 13 et contrôle 4
6	La soustraction	Leçon 14 et contrôle 5
		Leçon 15

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique implémentée par Valentine — Séances	
1	Séance 1	1 h 08 min
	Séance 2	1 h 13 min
	Séance 3	1h 47 min
2	Séance 4	1h 10 min
	Séance 5	1h 07 min
	Séance 6	1 h 19 min
	Séance 7	57 min
	Séance 8	1h 01 min
3	Séance 9	2h 02
	Séance 10	1h 46 min
	Séance 11	n. d.
	Séance 12	1h 37 min
	Séance 13	1h 21 min
	Séance 14	1h 13 min
4	Séance 15	1 h 07 min
	Séance 16	1h 16 min
	Séance 17	1 h 16 min
	Séance 18	1 h 06 min
5	Séance 19	2 h 01 min
	Séance 20	1 h 11 min
6	Séance 21	1 h 21 min
	Séance 22	45 min

n. d. : vidéos non disponibles

Tableau 26 : Vue synoptique des séances mises en œuvre dans la classe de Valentine au regard de l'ingénierie initiale

Remarquons tout d'abord que si l'ingénierie didactique initiale est structurée en quinze leçons, deux ateliers et une séance d'exercices sur des écritures additives, l'enseignante l'adapte en l'étendant sur 21 séances. Les séances ont lieu le plus régulièrement possible à raison d'une séance par semaine. Parmi les quatre étapes qui font l'objet de l'analyse (étape 1, 2, 4 et 5), deux étapes ont nécessité des développements : celle relative à l'installation de l'addition comme moyen de preuve d'un résultat (Étape 2 : 3 leçons dans l'ingénierie, 5 séances dans le site de Valentine) et celle relative à l'étape 4 des essais. Par ailleurs, nous constatons une grande variabilité dans les durées des séances. Si habituellement les séances de mathématiques durent environ 45 minutes à l'école primaire, les séances observées relatives à l'ingénierie s'étendent de 45 minutes à 2 heures.

2.2. Analyse des étapes de l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Valentine

Nous procédons à l'analyse de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique comme nous l'avons conduite pour le site genevois : une analyse mésodidactique des séances de chaque étape de façon à obtenir *in fine* une analyse macrodidactique de la mise en œuvre de l'ingénierie. À la différence de l'analyse précédente, nous disposons des données d'entretiens *ante* et *post* séance que nous mobilisons par triangulation pour conforter ou infirmer les constats séance par séance. C'est au fil des récurrences observées que nous finalisons les interprétations lors de la section conclusive à l'étape.

2.2.1. Analyse de l'étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »

Rappelons que l'enjeu principal de cette étape est d'outiller les élèves afin qu'ils résolvent des problèmes soustractifs. Il s'agit de « leur donner la possibilité de modéliser les problèmes avec une boite et des cubes » (Berté, 1996, p.3).

2.2.1.1. Analyse mésodidactique des séances

Dans cette étape, nous cherchons à suivre l'évolution de l'appropriation par les élèves de l'outil {boite ; cubes} pour simuler ou pour vérifier une réponse personnelle aux problèmes proposés par Valentine. Les synopsis condensés de chacune des séances permettent d'en suivre le déroulement et d'en formuler une brève interprétation. Comme pour Pascale, nous nous appuyons aussi sur des extraits relatifs aux traits saillants de l'action de l'enseignante.

2.2.1.1.1. Séance 1

Le synopsis ci-après présente le déroulement de la séance telle que mise en œuvre. L'objectif avancé par Valentine pour cette première séance est que les élèves repèrent que tous les problèmes proposés dans la séance relèvent du champ additif : « *que les enfants repèrent qu'on enlève ou on rajoute* ». (Val- S1-Entr.ante).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves.
0 :00			Le professeur présente la séance : Résoudre des problèmes	
4 :34	**Problème 1 :** Dans un parking il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?			
			Le professeur lit le problème deux fois.	
7 :48	Individuel	Résoudre	Le professeur récolte les réponses :	- **sur-compter** - **compter** avec les doigts, **dessiner**
10 :06	Collectif	Vérifier les réponses Écouter / observer le professeur	P : « *Comment faire pour vérifier ces réponses ?* » Présentation de la boite pour vérifier par le professeur : « *Je vais vous trouver une solution* » Le professeur joue la situation en dictant les manipulations à une élève : l'élève met 14 cubes accrochés dans la boite puis rajoute un à un des cubes jusqu'à 32.	L'élève compte les cubes « libres »
19 :33	**Problème 2 :** Il y a 16 cubes dans la boite. L'enseignante ne le dit pas aux élèves, montre rapidement le contenu de la boite et demande : « combien y en a-t-il ? »			
	Collectif		Élimination des propositions 70 et 4. Vérification en ouvrant la boîte.	- **Incompréhension** des élèves - proposent des nombres au **hasard**
25 :15	**Problème 3 :** il y a 16 cubes dans la boite. L'enseignante en enlève une poignée et demande : « combien en ai-je pris dans ma main ? »			
	Collectif	Débat / Résolution collective	P : « deuxième problème bizarre ».	- proposent des nombres au **hasard** **- réfutent certaines réponses : 18, 16**
27 :30			Discussion sur les valeurs possibles	Bertille → 4 Autre élève → 73
30 :34			P : « *est-ce que je vous ai gêné quand je vous ai posé ces petits problèmes ? Qu'est-ce qui vous dérangeait ?* »	Un élève : « *ça dépend de la main* »
34 :09	**Problème 4 :** il y a 16 cubes dans la boîte. J'en enlève 8. Combien en reste-t-il ?			
	Individuel	Lire puis chercher la solution	Le professeur prépare le matériel (16 cubes dans une boîte) puis lit le problème. P circule dans la classe	Réaction des élèves : « c'est **trop facile** »
36 :26	Collectif	Vérifier la réponse	Le professeur relève les réponses et demande à un élève de vérifier avec la boîte. **P enlève** 8 cubes, un élève compte ceux qui restent.	Utilisation du **répertoire :** 8 + 8 = 16 **Calcul réfléchi** (non abouti) :« 16-10 =6 et après j'ai fait 9 »
39 :38	**Problème 5 :** je mets 5 cubes dans la boîte combien faut-il que j'en mette encore pour qu'il y en ait 16 en tout ?			
	Individuel	Lire puis résoudre	P lit le problème	
41 :27			Recense les réponses	É réponse : 11 et 12
43 :37 44 :42	Collectif	Modéliser et vérifier	Léopold dit ce qu'il faut faire, Claire manipule, P écrit au tableau. Claire met 5 cubes dans la boite, et rajoute un à un jusqu'à 16. P conclut « *une fois de plus, on a utilisé la boîte pour vérifier* »	**Sur-comptage** : « On part de 5 on va jusqu'à 16 » Amorce d'un **calcul réfléchi** avec appui sur la numération : 5+5 =10 et on fait le 6 de 16
45 :24	**Problème 6 :** il y a 16 cubes dans la boîte, j'en enlève 14. Combien en reste-t-il ?			
	Individuel	Lire puis résoudre	P lit le problème puis circule dans la classe	Élèves agités
46 :24	Collectif		P recense les réponses.	Réponses proposées : 1 et 2
47 :13		Modéliser et vérifier	Akram dit à Andréa ce qu'il faut faire : 16 cubes dans la boite puis enlever 14 cubes.	
49 :08	**Problème 7 :** il y a 16 cubes dans la boite j'en enlève 2, combien en reste-t-il ?			
	Individuel.	Lire puis résoudre	P lit le problème, attend les réponses	« c'est facile, c'est le même, sauf que c'est l'inverse »
51 :03	Collectif	Modéliser et vérifier	Vérification avec la boîte : Paul dit à Emma ce qu'il faut faire : mettre 16 cubes puis en enlever 2. P écrit au fur et à mesure les données au tableau.	Tous ont trouvé 14 et ne semblent pas trouver nécessaire de vérifier avec la boite.
55 :20	Bilan : « Qu'avez-vous appris ? »			
59 :07			« *nous travaillerons sur des nombres plus grands et nous travaillerons sur le même genre de problèmes* […] *Et on continuera à vérifier avec la boîte parce que visiblement à Dimitri ça l'a aidé, hein ?*	Compter plus vite
	Fin de la séance			

Tableau synoptique 11 : séance 1, site Valentine (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Dans l'entretien post, l'enseignante déclare « *mon objectif c'était ce qu'on a eu un peu à la fin sur le bilan, c'est-à-dire que certains enfants ont soulevé le fait qu'ils avaient appris quelque chose* » (Val-S1-Entr.post). dévoilant ainsi son doute quant à l'apport cognitif de cette séance : « *il est vrai que les situations proposées par rapport à la classe que j'ai, bon en fait ils ont pratiquement tous trouvé, à quelques enfants près on va dire, les réponses. Parce que je pense qu'ils sont déjà outillés au niveau méthode procédure* » (Val-S1-Entr.post). Ces propos nous donnent une première indication sur l'enjeu d'étude : l'enseignante perçoit cette séance comme une séance de résolution de problème (au sens générique) et non comme une séance destinée à dévoluer aux élèves, par le biais de la variable didactique de la boite et des cubes, la responsabilité de simuler une situation ou de vérifier une réponse.

Dans cette séance, le matériel {boite, cubes} a principalement pour Valentine deux fonctions. Il est d'abord une aide pour illustrer, donner du sens au problème : « *Le fait de mimer, de faire mimer la situation à l'aide de la boite pendant que je retranscrivais au tableau, et le fait de le faire aussi à l'oral, le fait de le faire verbaliser par l'enfant aussi à l'oral, je trouve que ça permet, comment dire… de parler vraiment du problème, de le comprendre, de me mettre du sens dans le problème. Le fait de mener, tu vois, les deux-là, la confrontation entre l'oral, entre l'enfant qui va donner l'ordre, en fait, au deuxième gamin, de mimer et de dire ce qu'il doit faire, je trouve que c'est pas mal. Ça renforce le sens, tu vois, que l'on peut donner à la situation. Voilà. Ça accompagne, en fait.* » (Val-S1-Entr.post). Il est ensuite perçu comme un outil de validation d'une réponse : la boite est utilisée systématiquement après la recherche individuelle des élèves (min 19 :33, 36 :26, 43 :37, 47 :13). D'autre part, durant la séance, l'enseignante utilise à plusieurs reprises (15 fois) le terme « *vérifier* » alors que les termes se rapportant à la modélisation n'apparaissent qu'à trois reprises : « *jouer la situation* » (min 42 et min 51) « *mimer le problème* » (min 46). Par ailleurs, Valentine se positionne fortement en surplomb lorsque les élèves manipulent les cubes, les guidant pas à pas dans la simulation de la situation. En concluant la séance par « *on continuera à vérifier avec la boîte* » (Val-S1-1 :03 :29), l'enseignante conforte l'usage de la variable didactique matérielle {boite, cubes} dans une fonction de vérification.

2.2.1.1.2. Séance 2

Nous poursuivons l'analyse de la mise en œuvre de l'étape 1. La séance 2 débute par un appel à la mémoire didactique : « *qui se souvient de ce que l'on avait fait de ce que l'on avait dit ? Pour que l'on puisse continuer et se remettre tout ça en mémoire, d'accord ?* » (Val-S2- 0 :00 :19).

Temps	Modalité le travail	Découpage selon tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Col.		Le professeur interroge sur ce qui a été fait à la séance précédente : problème vs devinette Rôle de la boite : « elle nous sert à trouver pour voir si c'était la bonne réponse »	Le rôle de la boite ne semble pas perçu par tous. « On comptait pour voir si on avait la réponse »
4 :34	Problème 1 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse-t-il à la maison ?			
	Individuel	Lire et résoudre.	Distribution d'une fiche de problèmes. Lecture du problème P circule dans la classe	
10 :25	Col.		P recense les réponses : 13, 12, 15, 18, 23.	
12 :59		Modéliser et vérifier	Vérification avec la boîte : Akram manipule sous la dictée de Claire. Influence de P sur la façon de mimer la situation par son propos (« Tu prends quoi ? ») et par ses gestes (couvercle de la boite tenu en hauteur). P élude la proposition de Rémi et conclut « Nous avons résolu donc le premier petit problème que nous avons pu vérifier avec la boîte. »	Akram met d'abord 45 cubes, puis change d'avis et en met 58 cubes dans la boite puis en enlève 45. Rémi propose de mimer autrement. (du **sur-comptage** en partant de 45)
18 :25	Problème 2 : Un autre enfant a 58 billes à la maison. Cette fois-ci, il en amène 4 à l'école. Combien en a-t-il laissé à la maison ?			
	Ind.	Lire et résoudre.	Le professeur lit le problème. P circule dans la classe	**Compter sur les doigts / Dessiner / Répertoire** (4 + 4 = 8)
20 :15	Col.		P recense les réponses : 55 ; 54 ; 51	
21 :05		Modéliser et vérifier	P appelle Clémence pour mimer la situation. Cette fois-ci, P ne s'engage pas dans la manipulation mais intervient oralement. P oriente la simulation de la situation.	Clémence ne semble pas comprendre la fonction de la boite : elle met directement 54 cubes dans la boite. (puis, sous la direction de P, 58 cubes et enlève 4 cubes)
23 :31	Problème 3 : Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et il y a des maillots de basket. On nous dit qu'il y a 10 maillots de basket. La question est combien y a-t-il de maillots de rugby.			
	Ind.	Lire et résoudre.	P reformule (2 fois) le problème : et écrit les données au tableau	
26 :46	Col.		P recense les réponses : 48 ; 10	
27 :53			Modélisation et vérification avec la boîte effectuée par Timothée	Timothée répond par **effet de contrat :** 58 cubes dans la boite et en enlève 10
31 :55	Problème 4 : J'ai 58 cubes et j'en enlève 57. Combien en reste-t-il ?			
	Ind.	Résoudre.		« Facile ! »
33 :09	Col.	Modéliser et vérifier	P recense les résultats : 1 et 51	Emma a fait une addition
36 :23			P demande à Emma d'aller mimer le jeu. P oriente fortement sur une procédure : « *comment tu vas faire pour en enlever 57* » ?	Emma met 58 cubes dans la boite (5 diz puis 8 u) puis enlève 5 diz puis 7 cubes
38 :38			P recense les procédures sans les discuter.	**Numération :** c'est presque pareil que 8 – 7 ; 58 est juste à côté de 57. **Numération :** 58 = 57 + 1. **Comptine :…** 57, 58.
40 :52	Problème 5 : j'ai 58 cubes dans ma boîte, alors je vais en enlever une poignée. Combien y en a-t-il dans la boite ?			
	Ind.	Résoudre	P recense les résultats	Les élèves répondent au hasard
44 :05	Col.	Débat collectif	**P amène les élèves à dire qu'il faudrait une information de plus pour pouvoir répondre**.	« Il n'y a pas d'indications »
45 :32			P compte dans sa main les cubes. Et demande de trouver combien il **reste** de cubes dans la boite. Même cheminement : recherche, vérification avec la boite	Une élève : on peut pas savoir combien il en reste.
49 :31	Bilan de séance			
			P veut savoir si certains élèves ont trouvé la solution avant la vérification Présente la séance suivante : ateliers avec petits problèmes à résoudre avec la boite ou sans la boite.	Léopold ne comprend pas cette question ….
53 :23	Contrôle : J'ai 58 cubes, j'en enlève 10. J'ai 58 cubes, j'en enlève 57. J'ai 58 cubes, j'en enlève 4. J'ai 58 cubes, j'en enlève 20. J'ai 58 cubes, j'en enlève 50			
	Ind.		P enchaine les calculs rapidement. Elle rajoute deux : 58 – 20 et 58 -50	Une élève pleure, se plaignant de la rapidité
58 :48	Col.	Vérifier	Vérification avec la boite : toujours de la même façon : 58 cubes dans la boite, puis retrait.	Un élève (par calcul) vérifie avec les cubes
1 :05 :42			Recense le nombre d'erreurs faites par les élèves : « qui a fait 1erreur ? 2 erreurs ? »	
1 :06 :46	Ressenti des élèves sur l'activité			
			« Est-ce que c'était difficile ? »	Certains préfèrent enlever des petits nombres, d'autres des grands nombres

Tableau synoptique 12 : séance 2, site Valentine (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Dans le droit fil de la première séance, le système {boite, cubes} est conforté dans sa fonction de vérification d'un résultat : « *ah elle nous sert à trouver pour voir si c'était la bonne réponse, tu as raison Dimitri, alors en fait on dit qu'elle nous sert à vérifier hein à trouver la bonne réponse, à vérifier d'accord ?* » (Val-S2-min 03 :21).

Par ailleurs, lors des vérifications, tous les problèmes sont joués de la même manière : tous les cubes sont placés dans la boite puis on enlève (min 21 :05, min 27 :53, min 36 :23, min 45 :32). Pour autant, les élèves proposent d'autres manières de faire. Ainsi, pour le problème 1, (un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse-t-il à la maison ?) les élèves proposent de mettre dans la boite 45 cubes puis de compléter à 58. Nous présentons ci-après un échange emblématique de la manière dont les situations sont jouées lors de cette séance (min12 :59) :

P : […]
Akram : 20 30 40, 41, 42, 43, 44, 45,
P : Qu'est-ce qu'elle t'a dit Claire, elle a dit il y a 58 billes à la maison, est-ce que tu les as tes 58 billes à la maison ?
Akram : non
P : et bien alors qu'est-ce que
E : (Inaudible)
P : 47, 48, est-ce que tu en as 58 ?
Akram compte silencieusement
P : chut, tu en as combien ?
E : 48
P : 48 et nous on n'en veut 58 donc qu'est-ce qu'il faut que tu rajoutes ?
Akram : encore un paquet de 10
Akram ajoute une barre de 10
P : hé oui, bon alors dans la boîte, Akram a mis ses 58 billes à la maison d'accord ? Alors maintenant il en… Il emmène 45 billes à l'école. Alors comment tu vas faire ?

Extrait 53 : Valentine – Séance 2 – simulation du Problème 1 (min 12 :59)

Les propos de l'enseignante nous éclairent sur une première raison qui l'a poussée à ne pas suivre les élèves : « *Si tu veux, j'en ai 58, j'ai 58 billes à la maison, j'en amène 45 à l'école. Donc automatiquement les enfants qu'est-ce qu'ils vont faire, et ils vont enlever les 45 de la boîte. Donc même si celui qui a écrit 45 plus 10 et plus 3 il trouve et il trouve le 13 tu vois à l'envers, avec la manipulation de la boîte, je pense qu'ils vont être coincés.* » (Val-S2-Entr.post). L'enseignante exprime ici clairement ne pas envisager faire simuler un problème soustractif autrement que par un retrait dynamique. Une deuxième raison nous semble pouvoir être avancée. Lors de l'entretien *ante*, l'enseignante déclare « *on travaille la numération entre les séances, ce qui fait le lien, dire qu'on en a besoin pour traiter justement des problèmes* ». Dans le bilan de cette séance, Valentine valorise les propos de Rémi, qui a bien réussi le contrôle de fin de séance et qui déclare s'être servi des « paquets de 10 » :

P : *Pourquoi ça été facile pour toi pourquoi tu as fait tout juste par exemple ?*
Rémi: *Par ce que j'ai compté j'ai d'abord commencé par les paquets de 10 et après j'en ai enlevé des paquets de 10 et des tout seuls*

Extrait 54 : Valentine – Séance 2 – Bilan de séance – 1 :06 :46

Ces éléments nous amènent à considérer que Valentine cherche à réinvestir les savoirs relatifs à la numération, ce qui formellement ne relève pas des visées des situations à cette étape de l'ingénierie.

2.2.1.1.3. Séance 3

Rappelons que la leçon 3 dans l'ingénierie est une mise en ateliers des élèves, suivi d'une courte évaluation individuelle de leurs acquis. C'est ce que propose Valentine à ses élèves. En ateliers, ces derniers travaillent en binôme, les uns utilisant la boite et les cubes, les autres des procédures numériques. Pour l'enseignante, « *il s'agit de mettre en situation le problème et comment il* [l'élève] *va le mettre. Ce qui va être intéressant, quelquefois, dans certains problèmes c'est de savoir comment il va mettre en situation les données du problème. Est-ce que la solution de celui qui travaille sans cube et celui qui travaille avec les cubes sera la même ? ça va être un moment intéressant de comparer les procédures utilisées. Voilà* » (Val- S3-Entr.ante). Le synopsis (en pages suivantes) synthétise les différents temps de cette séance 3.

Dans un premier temps, l'enseignante s'attache à faire exprimer les différentes procédures de simulations des problèmes. Ainsi le problème « la maitresse a porté 27 boites de jus d'orange. Elle en distribue 23. Combien en reste-t-il ? » (min12 :21) est simulé de deux façons : (i) Akram place 27 cubes sont placés dans la boite puis en retire 23, (ii) Maxine mets 27 cubes dans la boite puis enlève jusqu'à ce qu'il n'en reste que 23.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes élèves et procédures des élèves
0 :00	Collectif		Présentation de la séance : « des enfants vont travailler avec des cubes et la boîte d'autres enfants vont travailler avec leurs feuilles et sans les cubes.	
12 :21	**Problème 1 :** La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Elle en distribue 23. Combien en reste-il ? **Problème 2 :** Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 9 filles. Combien y a-t-il de garçons ?			
	Binôme	Résoudre.	P circule dans les rangs	Certains élèves délaissent la boîte et les cubes.
23 :14	Collectif	Débat / Résolution collective	Rappelle la consigne : il faut mimer le jeu avec la boîte et les cubes P fait exprimer, les procédures numériques des élèves pour mimer le jeu avec la boite et les cubes.	Pb 1 : **décomptage** de 27 jusqu'à 23 (**recherche de l'écart entre 23 et 27**) Pb 2 : **retrait** => défaire une barre de 10 pour pouvoir enlever 9 unités (**numération**) →**Décomptage** en s'aidant des doigts.
31 :12			Appelle Akram pour mimer le problème 1 P fait exprimer une autre procédure	→ **retrait dynamique :** Akram mets 27 cubes dans la boite puis enlève 2 barres et 3 cubes → **Décomptage :** Dimitri et Maxine mettent 27 cubes dans la boite puis en enlèvent 9
35 :36			P fait exprimer des procédures de calcul pour le problème 2	→ **retrait et calcul réfléchi :** 27 – 7 =20 puis 20 – 2 =18
45 :57	**Problème 3 :** La maitresse a porté 27 boîtes de jus d'orange. Elle lui en reste 8. Combien en a-t-elle distribué ? **Problème 4 :** Dans une classe, il y a 27 élèves. Il y a 13 filles. Combien y a-t-il de garçons ?			
	Binôme	Résoudre	P circule dans les rangs	
57 :33	Collectif	Débat / Résolution collective	P recense les réponses du 1er problème : 18 / 19 / 20 Ne s'attarde pas sur l'explication des erreurs.	Erreurs de manipulation avec la boite ?
1 :00 :39			Interroge sur l'utilité de la boîte.	Dimitri : « j'ai vu que ça allait **plus vite sans la boite que avec la boîte** » Zoé : la boite pour **vérifier**
1 :05 :13	**Contrôle : 8 problèmes à résoudre sur fiche.**			
	Individuel			
1 :11 :57	Correction collective	Débat collectif Les élèves vérifient empiriquement	Pb1 : P recense les réponses : 16 / 15 / 17 Explication des procédures puis vérification avec la boite : retrait dynamique	Confusion entre prendre et enlever → reculer de deux : 18, 17, 16
1 :18 :08			Pb2 : P recense les réponses : 13 Vérification avec la boîte (P n'intervient pas)	→ Sur-comptage en passant par la dizaine : 5 + 5 + 8 (**addition à trous)** → Clémence aide Livio : prendre 18 cubes, en mettre 5 de côté et compter le reste (**partition**)
1 :25 :21			Pb3 : tous les élèves trouvent 1	→ 8 c'est après 7 (**numération**) Andréa : « on enlève une diz…. »
1 :26 :57			Pb4 : P recense les réponses : 8 / 14 Demande d'expliquer les procédures	Confusion : rajouter / enlever / prendre → **Décomptage** sur les doigts de 11 à 8 (écart) → **Sur-comptage** en utilisant le répertoire : 3 + 3 + 3, pas assez. Ajustement : 3 + 4 + 4 = 11 (**addition à trous et répertoire**)
1 :32 :35			Pb5 : P recense les réponses : 4 / 2 / 1 / 20 Explication des procédures Vérification avec la boîte : retrait dynamique	→ soustraction et calcul réfléchi :10 – 9 =1 et 1 +1 = 2 → sur-comptage en passant par la dizaine : 9 + 1 +1 =11 (**addition à trous**)
1 :36 :08			Pb6 : inaudible	
1 :37 :11			Pb7 : réponses : 20 / 10 / 19 Explication des procédures Vérification avec la boîte : retrait dynamique	→ 6 – 6 = 0 et je mets 2 devant (retrait)
1 :40 :46			Pb8 : réponses : 6 / 5 Explication des procédures Ne revient pas sur la réponse 5	→ pour aller à 26, il faut que ce soit 6 (numération orale) (**addition à trous**) → équivalence entre 26 – 6 =20 et 26=20 + 6 (arithmétique)
1 :44 :30P	BILAN.			
	P : « On peut trouver de différentes façons et s'aider de la boite si on sait pas faire autrement. » P conclut la séance en annonçant la suite : chercher une autre façon de vérifier sans la boîte			

Tableau synoptique 13 : séance 3 « ateliers », site Valentine (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Dans un second temps, l'enseignante cherche à mettre en tension la simulation avec le matériel et l'utilisation du nombre pour calculer, interrogeant des élèves habiles en numération (Tim, Adèle, Claire) et des élèves plus fragiles (Zoé, Gabin). Cette volonté est manifeste dans l'échange ci-dessous :

Tim:	*Moi j'ai été plus rapide*
P :	*tu as été plus rapide d'accord euh Timothée* ***est-ce que toi la boîte elle t'a été utile*** *ou tu aurais pu trouver la réponse sans la boîte ?*
Tim :	*(Inaudible)*
P :	***tu aurais pu trouver la réponse sans la boîte****. Adèle et Claire même question est-ce que vous auriez trouvé la réponse sans la boîte ?*
Adèle :	*Oui*
P :	*oui alors* ***quels sont les groupes ou les enfants pour qui il n'est pas possible de trouver la réponse sans la boîte ?*** *[gestion de classe]*
Zoé:	*Au 2 moi, j'avais compté faux et après avec la boite je savais que c'était pas vrai.*
P :	*ah alors Zoé elle dit le elle dit quelque chose d'intéressant par ce qu'elle dit moi quand j'ai trouvé la réponse du numéro quatre j'ai trouvé 25 c'est ça ? hein et alors que quand j'ai vérifié avec la boîte et j'en suis sûre j'ai trouvé la bonne réponse* ***donc que ça veut dire que la boîte elle t'a été utile pour vérifier ?*** *d'accord ? donc ça* ***c'est intéressant aussi la boîte elle peut être utile pour vérifier mais qu'est-ce qu'elle t'a empêchée de chercher, de trouver une réponse ?*** *non elle t'a aidée à quoi la boîte ?*
Zoé :	***à chercher*** *la solution.*
P :	***oui à vérifier*** *hein d'accord ?*

Extrait 55 : Valentine – Séance 2 – mise en tension résolution empirique et résolution numérique – 1 :07 :23

Les deux dernières répliques indiquent deux perceptions de la fonction du matériel : pour Zoé, le matériel permet de chercher la solution alors que pour l'enseignante il s'agit de vérifier. En reprenant Zoé, se trouvent confirmées ici nos interprétations : l'enseignante montre qu'elle cherche à installer le nombre pour résoudre des problèmes, la variable didactique matérielle servant ensuite à vérifier.

Par ailleurs, nous notons que dans cette séance, Valentine continue à réinvestir des connaissances et savoirs appris auparavant lors de la construction du nombre : la numération décimale, l'oralité des nombres, les relations entre les nombres, par exemple. Les deux extraits ci-après exemplifient comment l'enseignante « fait dire » à ses élèves deux procédures de résolution :

- la première, en s'appuyant sur la numération :

P : *[…] Léopold comment tu as fait pour trouver, pour résoudre ce problème-là ?*
Léo: *Ben en en fait*
P : *chut*
Léo : *en fait je savais déjà que six euh que **26 – 6 ça faisait euh euh 20** et en même temps euh euh euh euh **6 – 6 ça fait zéro et si je rajoute un 2 euh devant, ça fait 20***
P : *D'accord donc en définitive tu as enlevé quoi ? oui et six c'est dans ce nombre ça représente quoi ? bon oui ben oui c'est un peu… heu… un peu ça bon parfait on reviendra dessus… heu qui a fait autrement ?*

Extrait 56 : Valentine – Séance 3 – résolution par soustraction – 1 :38 :05

- la seconde en s'appuyant sur les relations arithmétiques entre les nombres en jeu entre les problèmes :

P : *Bertille tu es partie tout à l'heure en **expliquant tu t'es servie du problème qu'il y avait au-dessus***
Bertille : *(Inaudible) 26 dans la boîte et j'en prends 6 et là je sais euh le dernier c'est (inaudible) dans la boite j'en veux 26*
P : *Chut*
Bertille : ***c'est le contraire***
P : ***C'était le contraire alors vous avez vu Bertille elle est maline** parce qu'elle a utilisé*
E : *Je le savais*
P : *Comme un peu la dernière fois quelqu'un avait dit, hein c'était Gabriel, qui avait dit sur l'inverse de notre problème eh bien **elle a utilisé les données pour trouver le nombre***

Extrait 57 : Valentine – Séance 3 – résolution par observation d'une relation arithmétique – 1 :43 :42

Notre constat est conforté par l'entretien post séance. Revenant sur le bilan de fin de séance, Valentine observe que « *beaucoup d'enfants ont leur procédure et n'ont pas besoin en principe de la boite. Donc, ce à quoi nous allons travailler la prochaine fois c'est la vérification par sur-comptage.* » (Val-S3-Entr.post-). Le synopsis de séance montre à quel moment l'enseignante tente de faire basculer la résolution des problèmes soustractifs du versant empirique au versant numérique : au bout d'une heure (min 59 :40), elle interroge les élèves sur l'utilité de la boite et des cubes : « *j'ai juste une question à poser avant que vous ne sortiez euh est-ce que vous pensez, Gabin, **est-ce que tu penses que la boite t'a été nécessaire, t'a été utile ou non** pour trouver le résultat des problèmes ?* » (Val-S3-min59 :40). Rebondissant sur les réponses des élèves qui la déclaraient utile pour vérifier (ce qui relève à la fois selon nous des stratégies qu'ils ont mis en œuvre, mais aussi du contrat didactique de vérification progressivement installé lors de cette étape), l'enseignante conclut par « *la prochaine fois et ben on essayera de faire la même chose, on travaillera sans la boîte, on essaiera de vérifier sans la boîte, et en dernier dernier ressort on essaiera on vérifiera avec la* *boîte.* » (Val-S3-1 :03 :16). Ce « *en dernier ressort* » nous semble relever d'un indice implicite préparant une institutionnalisation à venir, à savoir indiquer aux élèves que la variable didactique matérielle {boite, cubes} doit à plus ou moins court terme disparaître, au bénéfice d'un contrôle numérique.

2.2.1.2. Conclusions à propos de la première étape de l'ingénierie mise en œuvre par Valentine

Le tableau suivant synthétise les trois séances mises en œuvre par Valentine relativement à cette étape au regard :

- de la fonction de la boîte et des cubes
- de la manière dont le problème est « joué » avec la boîte (qui modélise ? Comment le problème est-il simulé ?)
- des procédures numériques engagées par les élèves lors de la résolution des problèmes.

	Séance 1	Séance 2	Séance 3
Fonction prédominante de la boîte et des cubes	**Simuler** le problème pour trouver une réponse. **Valider ou invalider** les réponses	**Vérifier :** « *Nous avons résolu donc le premier petit problème que nous avons pu vérifier avec la boîte.* »	**Simuler et vérifier** : la moitié des élèves résolvent avec le matériel l'autre moitié résout numériquement.
Jeu de la boite : qui simule ?	Pb 1, 4 → l'enseignante pb 5 → un élève pb 6 → 2 élèves (l'un donne les ordres, l'autre fait, l'ens. surveille la manipulation) pb 7 → 2 élèves (l'un donne les ordres, l'autre fait, l'ens. écrit au tableau les données)	pb 1 → deux élèves (L'un sous la dictée de l'autre) pb 2 → un élève pb 3 → un élève pb 4 → un élève pb 5 → un élève	En ateliers : tous les élèves Lors de la correction du contrôle : les élèves prennent en charge collectivement la simulation du problème
Jeu de la boite : comment le problème est-il simulé ?	Lecture linéaire du problème : tous les problèmes sont joués en suivant chronologiquement les informations données dans le texte.	Les problèmes sont joués suivant les informations induites par la transcription du problème au tableau.	- partition - sur-comptage - prise en compte chronologique des informations du problème
procédures numériques de résolution repérées	**Dessin** **Sur-comptage** Utilisation du **répertoire** Utilisation du système de **numération** **Arithmétique :** équivalence entre **a – b = c et a - c = b**	**Dessin / Sur-comptage** Utilisation du **répertoire** Utilisation de la **comptine** Utilisation du système de **numération** pour **retirer**	**Dessin / Décomptage** **Retrait / numération** **Retrait / numération** **Sur-comptage / addition à trous** **Comptine** (oralité du nombre) **Arithmétique :** équivalence entre a + b = c et a = c – b

Tableau 27 : Synthèse des trois séances de l'étape 1 « dévolution de l'apprentissage de la soustraction » (Site Valentine)

Ce tableau fait ressortir deux constats essentiels :

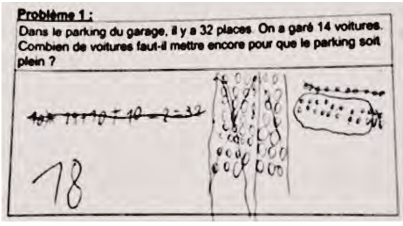
- Si les élèves n'ont pas encore construit le sens de la soustraction, ils ne sont pour autant pas dénués de connaissances pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés, y compris lorsque ceux-ci relèvent de la soustraction. Les élèves utilisent tout autant les moyens empiriques (comptage sur les doigts, dessins, manipulation du matériel boite et cubes), que des outils conceptuels tels que le nombre et ses propriétés dans le système de numération décimal, de savoirs acquis dans la classe précédente (cours préparatoire), ou encore de certains résultats du répertoire[83] par exemple.

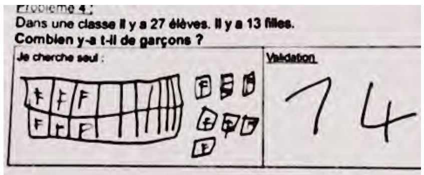
- Les données analysées confirment l'idée que l'enseignante tente de dévoluer la simulation des problèmes, mais selon une approche qui rompt avec la visée des situations de l'ingénierie. Nous avons pointé qu'au fil des trois séances de l'étape, elle garde une position surplombante amenant les élèves à « jouer » les problèmes selon sa propre vision : pour la plupart simulés comme des retraits c'est-à-dire selon le principe « d'un tout auquel on soustrait une partie ». Le problème 4[84] de la deuxième séance en est révélateur : alors que les élèves font référence à la suite numérique, « *après 57, il y a 58* » (min 39 :26), et donc le reste est 1, l'enseignante incite à jouer le problème comme les autres, c'est-à-dire comme un retrait : « *comment tu vas faire pour en enlever 57 ?* » (Val-S2-min36). Cette manière de faire révèle que Valentine ne perçoit pas, dans cette étape, la visée initiale de l'ingénierie c'est-à-dire celle de la recherche du sens d'une différence. Elle est déjà sur une perspective dans laquelle prévaut la représentation de la soustraction.

D'un point de vue mésogénétique, nous avons observé que le « milieu didactique primitif » (Amade-Escot, 2014) est constitué du cadre matériel {boite, cubes} prévu par l'ingénierie didactique mais aussi, de l'injection très tôt et selon un topos surplombant, des connaissances antérieures des élèves. Rappelons aussi que les programmes du cycle 2 de 2008 (cours préparatoire et cours élémentaire 1ère année) mettent l'accent sur la construction du nombre par la « résolution de problème » et par le calcul réfléchi. Aussi, les élèves ont-ils des habiletés calculatoires qui leur permettent de proposer une solution aux problèmes proposés. Par exemple nous avons vu que, dès la première séance, certains élèves utilisent le répertoire

[83] Répertoire : ensemble des faits numériques construits dans la classe : par exemple, les doubles, les compléments à dix.
[84] Problème 4 : « J'ai 58 cubes, j'en enlève 57. Combien en reste-t-il ? »

(problème 4 : « *8 + 8 = 16* »), le sur-comptage (problème 5 : « *on part de 5 et on va jusqu'à 16* ») ou un calcul réfléchi (problème 5 : « *5 + 5 =10 et on fait le 6 du 16* »). D'autres utilisent leurs doigts ou font des schémas :





Ces différents éléments peuvent expliquer les raisons qui font que l'enseignante introduit sciemment dans le milieu didactique des savoirs relatifs à la numération décimale : les cubes sont agencés en dizaines et en unités, incitant les élèves à utiliser leurs connaissances en numération décimale. Dans l'entretien post de la séance 3, elle déclare « *Déjà, on a introduit les barres, donc c'est déjà bien de parler de dizaines. Donc je sais que les enfants feront comme ça.* » (Val-S3-entr.post). Ce propos indique que l'enseignante intègre la construction du nombre dans le déroulement initial de l'ingénierie ce qui en modifie la dynamique. Il soutient aussi notre interprétation à savoir que si le système matériel {boite, cube} permet de poser, au travers du premier problème, l'enjeu d'étude, sa fonction didactique de simulation du problème évolue rapidement vers celle de vérification empirique d'une réponse. D'autant plus que d'un point de vue chronogénétique, nous constatons au fil de l'étape que la recherche d'une solution a lieu dans un premier temps de manière empirique pour ensuite évoluer vers des procédures numériques. Cette évolution est largement due à l'enseignante, qui en surplomb durant toute l'étape, incite fortement les élèves à présenter leurs procédures numériques, s'appuyant sur la numération (*cf.* Extrait 56, p.284), sur les similitudes entre les problèmes (*cf.* Extrait 57, p.288), ou encore sur l'oralité des nombres (Val- S3-1h42min). Une première hypothèse est donc de considérer que ce choix est lié à l'épistémologie pratique de ce professeur. Mais cette interprétation, pour être confirmée, nécessite de poursuivre l'enquête.

2.2.2. Analyse de l'étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »

Rappelons que cette étape vise à ce que les élèves soient capables de prouver leurs réponses sans avoir à ouvrir la boite. L'ingénierie didactique prévoit trois leçons dans cette étape. La première amène les élèves à agir en sur-comptant les cubes sortis aux cubes supposés restants ; la seconde oblige les élèves à formuler des hypothèses de vérification d'une réponse ; enfin, la troisième institutionnalise l'addition comme moyen de preuve.

Le « pari », central dans l'étape 2, relève d'un « apprêt didactique » (Brousseau, 1986), sorte de sous-couche du milieu didactique dont la fonction est de préparer l'élève à reconnaitre l'addition comme moyen intellectuel de preuve d'une réponse à un problème posé aux dépens de la vérification empirique.

2.2.2.1. Analyse mésodidactique des séances

L'enseignante déploie l'étape 2 en cinq séances : les séances 4, 5 et 8 correspondent aux leçons de l'ingénierie, alors que les séances 6 et 7 sont des ajouts de l'enseignante.

2.2.2.1.1. Séance 4

La quatrième séance est constituée de cinq problèmes appartenant tous à la catégorie[85] « transformation d'état », avec recherche de l'étal final (e t- E) : « il y a *x* cubes dans la boite, j'en sors *y*, combien en reste-t-il ? ». L'analyse de la littérature indique que les problèmes soustractifs de cette catégorie sont les mieux reconnus et résolus par les élèves. L'objectif principal de la séance ne porte pas sur la notion de différence mais sur le concept de preuve. Dans cette séance, la preuve est introduite, de manière collective, par sur-comptage des cubes sortis à partir de la réponse proposée.

Lors de l'entretien *ante*, l'enseignante déclare « *L'objectif par rapport à la dernière fois, où on mettait tout en œuvre pour que les enfants puissent trouver une solution et retarder la vérification avec la boite… Aujourd'hui, on va la retarder encore plus, justement en donnant la possibilité aux enfants de mettre en œuvre une autre stratégie… en fait de vérification, avant même de vérifier le contenu de la boite. Donc la stratégie que l'on va utiliser, ça va être le sur-comptage, voilà. Et on va utiliser quand même la boite, pour mettre en situation* » (Val-S4-Entr.ante). À propos du pari, Valentine le considère comme « *l'enjeu un peu de la situation pour* amener *les enfants à mettre tout en œuvre pour trouver une solution avant même l'ouverture de la boite* » (*Ibid.*). En déclarant « *on va parler de sur-comptage, on va parler d'addition. Au tableau je vais… on va visualiser la chronologie du problème et faire en sorte que la solution à trouver, c'est ce nombre que l'on va ajouter au nombre de cubes sortis. La preuve par addition quoi… ça va ressortir dans le tableau.* » (*Ibid.*), elle

85 Selon la typologie de Vergnaud (1990)

montre qu'elle poursuit déjà l'idée de faire émerger l'addition comme outil de validation d'un résultat, ce qui modifie la situation d'action (au sens de la TSD) qui est prévue en début d'étape.

Les données vidéographiques de séance (synopsis de séance en page suivante) montre une enseignante menant les cinq situations de la même façon : (i) lecture collective du problème (ii) recherche individuelle (iii) recensement des réponses par l'enseignante (iv) vérification de plusieurs réponses. Comme Valentine l'a déclaré dans l'entretien *ante*, « *on va la jouer peut-être sur trois coups, en prenant des résultats bien sûr faux* […] » (Val-S4-Entr.ante), l'enseignante mène la vérification en choisissant de faire parier tour à tour des élèves qui proposent une valeur trop grande, puis trop petite, puis correcte. Les paragraphes ci-après dégagent certains traits pérennes de la mise en œuvre.

- Prégnance du contrat didactique pérenne

Nous avons vu supra (*cf.* section sur les caractéristiques du fonctionnement pédagogique dans le site de Valentine) que cette enseignante chevronnée, maître formateur, s'appuie sur un contrat didactique générique, selon lequel les élèves sont habitués à résoudre des problèmes en échangeant à leur propos. Dans cette séance du fait de sa prégnance, les élèves ne perçoivent pas le glissement du contrat didactique pérenne « expliquer sa procédure de résolution » vers le contrat didactique plus spécifique à cette étape : « vérifier sa réponse ». Cette prégnance du contrat pérenne est manifeste lorsqu'à la question (min52 :22) « *qu'est-ce que tu as fait comme calcul ?* », Rémi répond par une explicitation de sa procédure de calcul : « *J'ai d'abord commencé par les paquets de 10 que j'ai enlevés et après j'ai enlevé les tout seuls* ». (Val-S4- min0 :59). Lors du bilan de fin de séance (1h07min), les élèves ne sauront répondre à la question « *qu'est-ce qu'on a fait aujourd'hui, qu'est-ce qu'on a appris ?* » (Val-S4-1h :07 :00) ce qui aura pour conséquence d'amener l'enseignante à conclure elle-même : « *quelquefois les réponses elles peuvent être fausses parce qu'on s'est trompé, en calculant, mais moi, ce que j'ai voulu montrer aujourd'hui c'est qu'avec la boîte, et en utilisant çà, une addition qu'est-ce qu'on utilise là, c'est bien une addition ?* […] *hein et bien on arrivait au résultat, d'accord ? Et la prochaine fois on va essayer de systématiser çà. C'est-à-dire que je vais vous amener à utiliser çà* » (Val-S4-1h :13 :41).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00 4 :57	collectif		Rappel à la mémoire didactique : « *Donc, qui serait capable en quelques mots de nous dire où on en est resté avant les vacances ?* » »*On a appris à trouver une solution sans forcément utiliser la boite pour faire et résoudre notre problème* » Présentation de la séance : « *on va essayer de vérifier la réponse sans utiliser la boîte. Sans ouvrir la boîte en fait* »	Les élèves ont du mal à s'exprimer mais rappellent les situations des ateliers. Maxine : la boite sert à vérifier
5 :26	Problème 1 : Dans la boîte, j'ai 45 cubes, j'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ? (réponse 27)			
	collectif		Le problème est affiché au tableau. P lit le problème. P demande à Andréa de relire le problème et transcrit en même temps les données au tableau	Livio simule la situation sous la direction de P
9 :05	individuel	Résoudre	P circule dans les groupes, d'élève en élève.	Les élèves cherchent individuellement sur feuille
14 :21		Vérifier	P recense les réponses : 30 / 32 / 26 / 51 / 36 / 52 / 25 / 27 / 37 /	
15 :52	collectif		P demande à Rémi puis Maxine s'ils veulent parier : si "gagné" gagne un jouet, si "perdu" rien ne se passe.	Explications entre pairs : que veux dire parier ?
			La décision de parier a lieu avant la vérification sous la direction de P : « *bon alors Maxine tu vas compter à partir de ces 36 dans la boîte, et on va **ajouter** nos 18, d'accord ? Et en principe on devrait trouver combien en tout ?* » (P montre le tableau). P donne un à un les 18 cubes à Maxine qui compte. P arrête de donner les cubes lorsque Maxine arrive à 45 et montre les cubes restants : « *qu'est-ce qu'il se passe ?* » Le jeu s'arrête là, sans proposition de parier sur 36.	Rémi ne veut pas parier Maxine parie sur 36 Presque tous les élèves veulent parier : plusieurs proposent 27, mais P les évite ostensiblement.
20 :22			Comme pour Maxine, position en surplomb de l'enseignante : Gabriel prend les cubes un à un dans la main de P	Gabriel parie sur 25 Enzo parie sur 27 et gagne.
24 :41			P cherche à faire exprimer la preuve : « *alors quel est le calcul que l'on a fait, quelle est la preuve qu'on a utilisée ?* » P conclut par « *c'était votre réponse **plus** les cubes de sortis égal 45, c'est compris ?* »	Les élèves expriment **des procédures de résolution**. (Dimitri / Léopold / Clémence)
28 :22			P demande la vérification empirique à Livio	
29 :03	Problème 2 : Dans la boîte, j'ai 72 cubes, j'en sors 34. Combien en reste-t-il ? P ne demande pas à Maxine si elle veut parier sur sa réponse maintenant dans la boîte ? (réponse 38)			
	individuel	Résoudre	P écrit les données sur l'affiche sous la dictée d'un élève, puis prépare le matériel (3 barres de 10 et 8 cubes dans la boite et 3 barres de 10 et 4 cubes sur le couvercle de la boite) ; P circule dans les groupes	les élèves cherchent
33 :53		Vérifier	P recense les réponses : 38 / 36 / 32 / 46 / 48 /	Presque tous les élèves veulent parier
	collectif		P demande à Samuel, puis Léopold, puis Enzo, puis Bertille s'ils veulent bien parier. P en surplomb pour amorcer l'addition / « *46, bon…. hé bien on va **ajouter** tout ce que j'ai dans la main, hein d'accord ?* » « *36, allez si je **rajoute** une barre de 10 à ça va faire…* » « *allez Bertille on **ajoute** 10 ça fait…* »	Samuel parie sur 46 Enzo parie sur 36 Bertille parie sur 38
42 :22	Problème 3 : Dans la boîte, j'ai 64 cubes, j'en sors 21. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
	individuel	Résoudre	P prépare le matériel (7 barres de 10 et 2 cubes dans la boite) ; les élèves cherchent	Léopold lit le problème.
44 :02		Vérifier	P recense les réponses : 70 / 43 / 41 / 39	
46 :32	collectif		La réponse 70 n'est pas discutée. P est toujours en surplomb. À Clémence : « *on **rajoute** ce que j'ai dans… ce qu'on a sorti ? c'est-à-dire les 21 ? d'accord* ». À Timothée : « *43, bon on **rajoute** les 21 alors 43 plus 10* […] ***43 plus 21 c'était bien égal à soixante****// quatre « il a dit que le nombre qu'il pensait 43* ***ajouté, plus*** *21 et bien il est bien tombé sur 64* »	Claire refuse de parier sur 70. Clémence parie sur 39. Paul parie sur 41 ; Timothée parie sur 43 Clémence parie sur 39
52 :22	Problème 4 : Dans la boîte, j'ai 60 cubes, j'en sors 15. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
	individuel	Résoudre	P écrit les données au tableau : 60 cubes et 15 cubes. P circule dans les groupes	les élèves cherchent
55 :57		Vérifier	P recense les réponses : 40 / 50 / 55 / 57 / 45 / 41 / 40	
56 :37	collectif		À Maxine : « *40, on **rajoute** les 15 que j'ai sortis ? d'accord ?* » À Rémi : « *Tu penses qu'il y en a 45, on **rajoute** les 15 oui* » P amorce une comparaison entre la procédure de résolution et la procédure de vérification	Maxine parie sur 40. Rémi parie sur 45 puis Rémi explique sa procédure de résolution : enlever les dizaines, puis les unités.
52 :22	Problème 5 : Dans la boîte, j'ai 61 cubes, j'en sors 41. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
			Même déroulement que pour les autres problèmes. Conclusion de P : « *on vient de prouver que **41 + 20 c'est égal à 61*** »	Charlotte parie sur 21. Akram parie sur 20
1 :07 :00	BILAN : « *aujourd'hui ce qu'il faut retenir c'est quoi ? Qu'est-ce que qu'est-ce qu'on a fait aujourd'hui, qu'est-ce qu'on a appris ?* »			
	Les élèves répondent en terme de procédures de résolutions de problèmes et ne semblent pas avoir perçu que l'objectif état de valider une réponse par un autre moyen que l'utilisation de la boite P : « *mais moi, ce que j'ai voulu montrer aujourd'hui c'est qu'avec la boîte, et en utilisant çà, une addition qu'est-ce qu'on utilise là, c'est bien une addition ? […] et bien on arrivait au résultat, d'accord ?* »			
1 :15 :00	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 14 : séance 4, site Valentine (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- Non-identification de la fonction didactique du « pari ».

Nous constatons que le rôle du pari, qui est de pousser l'élève à vérifier sa réponse à l'aide d'un moyen intellectuel, n'est pas pleinement identifié : l'enseignante lance le pari avant et non après que le sur-comptage ait lieu. Ce dernier ne peut donc pas être repéré par les élèves comme un procédé prouvant une réponse. De plus, le sur-comptage a lieu sous le contrôle de l'enseignante : elle manipule le matériel et, par de nombreux effets Topaze (min18 :14, min35 :42, min46 :32, min 57 :45, etc.), induit les réponses des élèves. De ce fait, l'activité de vérification intellectuelle n'est pas prise en charge par les élèves.

L'entretien post nous éclaire sur la dimension qu'elle donne au pari. À la question « le pari est-il essentiel dans cette séance ? », l'enseignante répond « *je sais pas …. C'est moteur quand même le pari. Il est moteur dans la mesure où il va inciter déjà les enfants à trouver une réponse par leur propres moyens* […] *Le pari, **c'est l'enjeu en fait, pour chercher une solution** et **trouver la bonne solution** aussi quand même. Même par leurs propres moyens quoi. C'est de trouver la réponse.* ». Les propos de Valentine nous laisse penser d'une part, que la fonction didactique du pari reste floue pour elle et d'autre part, que son topos reste, comme celui des élèves, pris dans le contrat usuel qui est au fondement de ses pratiques quelle que soit la discipline « trouver la solution au problème ».

- Accélération de la chronogenèse

Il ressort de la séance que Valentine, en introduisant dans les différents milieux didactiques les termes « *ajouter* » (8 fois), « *rajouter* » (19 fois), « *plus* » (34 fois), « *addition* » (3 fois) – autant de termes induisant l'opération – tente par des effets Topaze de « transmettre l'addition comme moyen de preuve » comme le montrent les extraits ci-après :

*Min 35 :42 : « 46, bon…. Hé bien on va **ajouter** tout ce que j'ai dans la main, hein d'accord ? »*
*Min 37 :50 : « 36, allez si je **rajoute** une barre de 10 à ça va faire… »*
*Min 51 :59 : « il a dit que le nombre qu'il pensait 43 **ajouté… plus** 21 hé bien il est bien tombé sur 64 »*
*Min 57 :45 : « 40, on **rajoute** les 15 que j'ai sortis ? D'accord ? Alors 40 **plus** 10 »*
*Min 35 :42 : « mais moi, ce que j'ai voulu montrer aujourd'hui c'est qu'avec la boîte, et en utilisant çà, une **addition** qu'est-ce qu'on utilise là, c'est bien une **addition** ? […] hé bien on arrivait au résultat, d'accord ? »*

Extraits 58 : Valentine – séance 4 – effets Topaze

Ces quelques répliques montrant l'enseignante usant régulièrement ces effets Topaze soutiennent l'interprétation d'une accélération de la chronogenèse relativement aux procédures d'établissement de la preuve.

2.2.2.1.2. Séance 5

Lors de la cinquième séance, Valentine propose trois problèmes, dont la structure est une transformation d'état avec recherche de l'étal final (e t- E). L'objectif est, à la différence de la séance précédente où la vérification était la même pour tous, le sur-comptage, de faire émerger les diverses procédures de vérification des élèves. Pour les obtenir, Valentine installe un temps de vérification intellectuelle, individuelle, sans manipulation de cubes où l'élève doit formuler de sa place les manipulations à effectuer.

Lors de l'entretien *ante*, l'enseignante déclare « *L'objectif est d'amener l'élève à se détacher du matériel, pour pouvoir vérifier leur réponse. C'est les amener à ça en fait… c'est-à-dire lorsque le pari va être mené, lorsque les solutions vont être recensées, l'enfant qui va venir vérifier, avant sur la leçon 3, il venait vérifier en sur-comptant les cubes à partir de son nombre. Là, on va lui demander de trouver une solution pour le sur-compter mais sans toucher les cubes. […] Dans la pratique, on donne un problème. Les enfants vont vérifier par leur propre moyen* ». (Val-S5-Entr.ante). L'objectif « obtenir différentes procédures de vérification », enjeu principal de la séance, n'est pas explicitement exprimé par l'enseignante. Le synopsis de séance (en page suivante) permet de voir quelles procédures vont apparaître et comment, elles sont résumées dans les sections qui suivent.

- L'appel à la mémoire didactique

Dès le début de la séance, l'enseignante fait appel à la mémoire didactique en questionnant les élèves sur « *ce que l'on a fait la dernière fois, ce que l'on a voulu faire en fait, ce que l'on a voulu apprendre* ». Rappelons que la fin de la séance précédente avait montré la faible efficience du pari tel qu'il avait été joué. Ce bref appel à la mémoire didactique confirme que les élèves, dans la grande majorité, n'ont retenu que l'aspect ludique (le pari) de la séance. Par ailleurs, seuls deux élèves, avec l'aide de l'enseignante, rappellent ensuite le sur-comptage comme procédure permettant de vérifier une réponse.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Collectif		Rappel de la mémoire didactique : « *vous allez euh expliquer rapidement ce que l'on a fait la dernière fois, ce que l'on a appris ce que l'on a mis ce, que l'on a voulu faire en fait, ce qu'on a voulu apprendre.* » L'affiche de la séance précédente est collée au tableau.	Les élèves n'ont principalement retenu que l'aspect ludique du pari. Léopold : « *on partait du nombre qu'on avait euh dit et on continuait à ajouter* ». Dimitri : « *ajouter les cubes sortis* »
03 :18	Problème 1 : dans la boîte, il y a 70 cubes. J'en prends 23. Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ?			
	Collectif		P écrit sur l'affiche les données du problèmes	Rémi lit le problème ; Gabriel manipule le matériel.
06 :05	Individuel	Résoudre	P circule dans les groupes	
08 :30			P recense les réponses : 40 / 47 / 57 / 53 /	
09 :59	Collectif		À Enzo : « *57 donc on va, qu'est-ce qu'on va faire ? on va les* ***on va les mettre ensemble*** *et en principe on va arriver à combien ?* […] *Alors est-ce que ton pari est bon ? Est-ce que ton nombre choisi est bon ?* » à Anna : « *On veut trouver combien en tout ? 70 c'est bien ça ?* » Pas d'allusion au pari	Enzo parie sur 57 Anna parie 47
12 :21			P : **micro-institutionnalisation** « *qu'est-ce qu'il faut faire donc pour vérifier ?* » P complète la réponse de Léopold « *ah oui mais à la boîte au nombre qu'elle pensait* »	Les élèves pensent à ouvrir la boite. Léopold exprime la preuve : « *Et ben elle a ajouté les cubes qu'on avait enlevés à la boite* »
13 :40			P : « *ben té Livio il va vérifier quelque chose, il va vérifier s'il y a bien 47 dans la boîte* »	Livio vérifie en comptant les cubes restants dans la boite.
14 :14	Problème 2 : dans la boîte j'ai 42 cubes. J'en sors 17. Combien y en a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Individuel	Résoudre	P manipule sous la direction d'Adèle. Les élèves recherchent la solution	Adèle lit le problème et dicte à P ce qu'il faut faire.
16 :47			P recense les réponses 35 / 25 / 27 / 59 / 39	
17 :57	Collectif	Débat / Résolution collective	P propose à Andréa de parier sur 59, puis accepte le pari de Gabriel (39) qui ne sait pas vérifier. P accepte l'aide de Bertille. P ne propose pas à Gabriel de maintenir ou pas son pari. P évite ostensiblement Adèle (25) et choisit Akram (30) ; Concluant les propos de Léopold : « ***donc tu as 30 et tu rajoutes les 17 qui sont sur le couvercle*** »	- André refuse de parier sur 59 (trop grand) – Gabriel veut compter dans la boite. - Zoé fait la somme de 42 et 39 - Bertille part de 39 puis ajoute la barre de 10, puis les deux cubes, puis la barre de 5. – Akram ajuste sa réponse par rapport à celle de Gabriel et propose 30. **Léopold aide pour la vérification : «** ***je ferai pareil qu'avec la boîte, mais au tableau*** **[…]** ***heu en fait… j'ai 30 et je rajoute les 17*** **»**
29 :05			Conclusion : P interroge et reformule les propos d'Adèle (25) : « tu **rajoutes** les 7, **plus** 10, **plus** 5, **plus** 2 et on arrive encore au même »	Adèle vérifie de sa place en s'appuyant sur le matériel : 25 et un paquet de 10 et 7
29 :46	Problème 3 : dans la boîte à j'ai 41 cubes. J'en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ?			
	Individuel		P relit le problème et modifie la consigne : « *cette fois-ci sur la feuille, je vous ai fait une petite place pour la réponse, parce que souvent vous écrivez le résultat. Au milieu je veux que vous fassiez le travail qu'a fait Adèle, c'est-à-dire « très bien, je pense que c'est ma réponse mais maintenant je vais vérifier de ma place »,* ***avant de dire à la maîtresse je vais parier****, donc je vous laisse au milieu, là, nous ce qui nous intéresse c'est ça* »	Timothée lit le problème
32 :11		Résoudre	P prépare la boite, circule dans les rangs et reprécise la question : « *ce qui m'intéresse maintenant de savoir, c'est comment vous faites pour vérifier que votre réponse elle est juste* »	Les élèves cherchent
36 :47			P recense les réponses : 18 / 15 / 28 /	
38 :10	Collectif	Débat / Résolution collective	P à Paul « *tu viens nous montrer de ce qui, qu'est-ce que tu as fait, d'accord, sur ta feuille* » ? P laisse Paul montrer sa procédure de résolution jusqu'au bout. 15 n'est pas la solution. RECRÉATION	Confusion entre vérification et procédure de résolution : Paul pariant sur 15, il dessine au tableau 4 dizaines et 1 cubes puis en efface 23 cubes.
43 :58			Retour sur le problème 3 : « ***il est parti de quel nombre*** *Paul pour vérifier ?* »	Les élèves discutent sur la procédure : dessiner ou utiliser les nombres.
47 :09			P demande à Maxine, Dimitri, Samuel, Léopold de « *prouver* » leur réponse (18) avant de « *vérifier* » dans la boite	Les quatre élèves expliquent une procédure de résolution
58 :35		Écouter Samuel	P appelle Samuel (élève « joker ») conclusion : **«** ***on a fait 18 de la boîte auquel on rajoute les 23 qu'on a sortis d'accord ?*** **»**	Samuel sur-compte en manipulant les cubes puis conclut par « *on doit rajouter 23* »
1 :02 :25	BILAN : P reprend l'exercice en retraçant tout ce qui a été fait : résoudre / vérifier en faisant une addition et vérifier en comptant dans la boite. Les élèves ne semblent pas comprendre.			
1:06:58	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 15 : séance 5, site Valentine (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- L’utilisation du premier problème comme situation de régulation

L’enseignante utilise le premier problème pour réguler l’apprentissage de la preuve d’un résultat. Pour ce faire plusieurs actions mésogénétiques sont produites par Valentine en :

– simulant la vérification. Bien que l’ingénierie didactique précise « chaque élève va devoir éprouver sa réponse à sa place », l’enseignante appelle deux élèves (min 9 :59) pour manipuler, le premier donne une réponse fausse ; le second, une réponse correcte.

– utilisant un vocabulaire proche du matériel. L’enseignante délaisse les termes relatifs à l’addition, utilisant un vocabulaire plus proche de la manipulation (min 09 :59) : « *on va les mettre ensemble* [les cubes] »

– usant de nombreux effets Topaze. Cherchant à provoquer la réponse attendue, « mettre les cubes ensemble », l’enseignante accompagne ses questions de gestes significatifs. Pour autant, ceux-ci ne sont pas suffisants, l’obligeant à formuler elle-même les réponses à ses questions. À titre d’illustration :

–

[…]
P : qu’est-ce qu’on va faire ? on va les… ? On va les mettre ensemble et en principe on va arriver à combien ?
Enzo L : euh…
P : À 70
[…]

Figure 39 : effet Topaze sans effet

- L’usage non assumé d’un topos surplombant

Lors de cette séance, l’enseignante mobilise différentes techniques pour peser sur la chronogenèse tout en donnant l’illusion de ne pas être aux commandes, selon une procédure d'ostension déguisée telle que décrite par Salin (1999, 2002). Nous en illustrons trois, autres que les effets Topaze déjà présentés.

– Feindre une incompréhension et reformuler à l'attention de toute la classe, sous le contrôle de l'élève : alors que Bertille montre la barre de 10 cubes et amorce un sur-comptage (min22 :27), Valentine l'interrompt puis prenant à partie le reste de la classe : « *Alors attends attends attends c'est intéressant ce qu'elle dit, mais alors à condition que tout le monde écoute, alors tu pars donc de 39 et tu dis que tu ajoutes 10 ?* ». En indiquant l'opération que Bertille fait implicitement, elle oriente les élèves vers l'addition.

– Anticiper un geste ou un propos.(min 11 :42) Alors que Anna n'a pas encore explicité sa procédure de vérification, Valentine approuve, faisant « comme si » l'élève s'était exprimé : « *on va les mettre, hein d'accord. On veut trouver combien en tout ? 70 c'est bien ça ? Bon très bien, donc on y va, donc 47. Si tu rajoutes…* ». Sous couvert d'un assentiment donné à l'élève (« *hein d'accord* ») ou d'une approbation anticipée de l'élève (« *c'est bien ça ?* »), l'enseignante effectue elle-même la procédure de vérification.

– Faire appel à un élève pour conclure. Pour autant, elle ne lui laisse pas l'entière responsabilité de la conclusion. Ainsi, pour le problème 1, elle dirige l'élève par un jeu de question : « *qu'est-ce qu'elle a fait ?* […] *elle a ajouté quoi à quoi ?* » (Léopold, min12 :44), pour le problème 2 elle reformule les propos d'une élève « *tu rajoutes les 7, plus 10, plus 5, plus 2* » (Adèle, min28 :57), enfin pour le problème 3 elle déclare « *mais en fait, ce qu'on a fait, on a fait 18 de la boîte auquel on rajoute les 23 qu'on a sortis, d'accord ?* » (Samuel, min60 :05). Nous constatons que, si l'enseignante semble donner la parole aux élèves pour conclure, en réalité c'est elle qui distille au fur et à mesure le savoir visé.

Bien que les termes « *ajouter* », « *rajouter* », « *plus* » soient introduits et utilisés tant par l'enseignante que par les élèves, le bilan de fin de séance fait apparaître que peu d'élèves réussissent à énoncer un moyen intellectuel pour prouver un résultat, ce qui oblige l'enseignante à revenir à convoquer le matériel pour procéder à un sur-comptage. Ce sont ces éléments qui amènent Valentine à justifier lors de l'entretien post séance le besoin d'un travail supplémentaire « *C'est trop rapide, enfin pour les enfants c'est trop rapide* » (Val-S5-Entr.post).

Elle propose donc d'intercaler deux séances supplémentaires avant de reprendre le cours de l'ingénierie didactique. Nous menons ci-après l'analyse de ces deux séances supplémentaires.

2.2.2.1.3. Séance 6

L'enseignante déclare « *reprendre en fait la leçon 4* » (de l'ingénierie) estimant que les élèves « *n'ont pas du tout intégré, maitrisé la notion de vérification.* […] *Donc je vais axer donc je vais vraiment moi aussi axer cette situation de recherche sur la vérification.* » (Val-S6-Entr.ante).

La séance 6 est composée de trois problèmes élaborés par Valentine. L'objectif de la séance est : « *vérifier la réponse et je vais vraiment axer là-dessus aujourd'hui. […] Je vais lancer les paris, et avant les paris je vais faire chercher la vérification. […] Et je vais vraiment axer, inciter les enfants, exiger des enfants cette vérification* » (Val-S6-Entr.ante).

Les trois problèmes qui composent la séance sont identiques à ceux de la séance précédente de par leurs structures (catégorie e t + E), le champ lexical utilisé (« *il y a* » ; « *j'en prends* »), les variables numériques (les nombres sont compris entre 20 et 80). La structure même des nombres choisis (le chiffre des unités du nombre représentant la quantité totale est inférieur au chiffre des unités représentant la quantité enlevée) est pour nous un indice que l'enseignante cherche à rester dans l'esprit de l'ingénierie. Ainsi, par exemple, alors que le dernier problème de la séance 5 (issu de l'ingénierie) est :

> « Dans la boîte, j'ai 41 cubes. J'en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ? » ;

le problème de la séance 6 (élaboré par Valentine) est :

> « dans la boîte j'ai 70 cubes, j'en prends 27 que je pose sur le couvercle combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ? ».

Les autres problèmes élaborés par l'enseignante sont construits de la même façon (*cf.* synopsis ci-dessous).

Comme dans les séances précédentes, nous dégageons du synopsis certains traits récurrents d'analyse de l'action enseignante.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	collectif		Rappel de la mémoire didactique : « *qu'est-ce qu'il s'est passé la dernière fois, en fait qui avait changé de la fois avant ? quand on venait faire le pari, Samuel* » P s'appuie sur l'affichage d'un problème précédent pour rappeler la vérification Présentation de la séance : « *aujourd'hui ce que l'on va surtout travailler c'est la vérification parce que en fait là c'est là qu'on y arrive pas trop donc je l'ai mise à part cette vérification […] tout le monde doit utiliser cette vérification c'est-à-dire que je pense à ma réponse […] je pars de ma réponse et je vais ajouter les cubes que j'ai sortis et je vais calculer pour voir si ça fait bien 70* [la quantité initiale] »	Plusieurs élèves rappellent leur procédure de résolution à l'aide de connaissances sur la numération décimale. Seul Samuel a de vagues souvenirs
07 :20	Problème 1 : dans la boîte j'ai 70 cubes, j'en prends 27 que je pose sur le couvercle combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ?			
	individuel	Résoudre	P lit le problème. P met en place la situation avec la boite et les cubes. Pendant ce temps, les élèves cherchent.	
12 :18	collectif	Vérifier	P recense les réponses : 57 / 43 / 54 / 50 / 42 / 53	
14 :19			P à Livio : « *avant de parier hein je te laisse la chance de vérifier si ça va être juste ou non […] on le vérifie en utilisant la procédure de la boite* ». P indique le procédure de vérification : « *si je rajoute les 23, pardon les euh les 27 que j'ai sortis, est-ce qu'on va arriver à 70 ?* » et autorise de poser l'addition en colonne.	Livio veut parier sur 53 puis change d'avis. Éléonore (53) indique sa procédure au lieu de la vérification. Éléonore pose ensuite l'addition 53 + 27
19 :32			Certains élèves veulent parier sur 43, mais P les évite et profite de l'hésitation d'Andréa pour l'inciter à vérifier d'abord son résultat. « *Andréa, les 57 auquel tu penses ils sont là, d'accord la de l'autre côté, j'ai les 27 que j'ai sortis, et si je mets mes 27 avec tes 57 on doit retrouver quel nombre ?* » P demande à Andréa s'il veut parier. (réponse négative). P l'envoie quand même au tableau, sans exploiter sa réponse. P ne redemande pas ensuite s'il veut parier.	Andréa veut parier sur 57, puis change d'avis : il n'a pas retrouvé 70 en faisant l'addition à sa place Andréa va vérifier au tableau.
24 :08			P aide Anna « *Anna toi tu penses que dans la boîte il y a 50 d'accord et plus si je rajoute ceux-là, que je les mets ensemble ça va faire en principe 70, c'est ce que tu veux. Bon hé bien on va vérifier si 50 plus 27 ça fait bien 70* » P : « *donc est-ce que ton nombre est bon ? il est trop petit ou trop grand ?* »	Anna propose 50 mais ne sait pas vérifier.
31 :09			P interroge Charlotte puis Bertille. P accompagne Bertille de question pour chaque étape : « *43, ça correspond à quoi ?* […] *qui correspondent à…* »	Charlotte propose 43 mais ne sait pas vérifier. Bertille va au tableau et pose une addition en colonne
34 :15			Vérification avec la boite (sur-comptage + numération) Pas de conclusion sur ce premier problème.	
35 :31	Problème 2 : dans ma boîte j'ai 57 cubes, j'en sors 28 alors j'ai combien de cubes dans ma boîte ?			
	individuel	Chercher	P lit le problème, les élèves cherchent la solution	
39 :16	collectif		P recense les réponses 29 / 49 / 26 / 45 / 30 / 58 /	58 est écarté rapidement.
		Vérifier	« *Clémence tu penses que c'est 30 donc je l'entoure eh bien tu vérifies d'abord sur ta feuille tu as le droit, tu as le droit de rechanger d'avis, tu vérifies si ta réponse est bonne* » P demande à tous de vérifier la valeur 30, puis interroge Samuel	Samuel vérifie à voix haute puis change sa réponse Plusieurs élèves vérifient puis modifie leur réponse.
45 :57			P interroge Gabriel : « *tu as vérifié avant de parier avec moi ?* » puis demande à tous de vérifier leur réponse avant de parier. P envoie Gabriel (45) au tableau puis fait appel aux élèves pour expliquer Gabriel. P interroge Akram (29)	Maxine : « *on part du nombre qu'on pense et on rajoute ce qu'on enlève* »
52 :52			P fait compter dans la boite. Et conclut par « *il en a trouvé dans la boîte en comptant donc 29, si je rajoute mes 28 qui sont sortis là, et bien on va retomber sur 57, donc Akram il a parfaitement trouvé la bonne réponse et il a su la vérifier* »	Akram (29) pose l'addition. Certains élèves pensent que c'est trop, d'autres pas assez (Gabriel)
56 :42	Problème 3 : dans la boîte j'ai 80 cubes, j'en prends 54 que je pose sur la boite là. Combien y a-t-il de cube maintenant dans la boîte, alors j'ai combien de cubes au départ ?			
57 :17	individuel	Résoudre	P circule dans les rangs et incitent à vérifier sa réponse.	
1:00:41	collectif		P recense les réponses : 34 / 26 / 37 / 44 / 24 / 30	
1:02:03		Vérifier	« *attention d'abord avant de venir parier avant de venir parier je vous laisse un peu de temps pour vérifier* »	
1:04:12			P réoriente Zoé sur la vérification mais lui fait vérifier la valeur 24	Zoé (26) explique une procédure.
1:08:09			P lui demande si elle veut parier. « *si je mets tout ça ensemble la si je mets tout ça ensemble, si je réunis tout ça d'accord et bien est-ce que ça fait 80 ?* »	Claire vérifie sa réponse 54 mais ne semble pas comprendre. Dimitri fait la vérification pour 26 : « *je mets mon nombre en premier et après 54 en dernier* »
1:16:59	BILAN : P : « *Qu'est-ce qu'on a appris aujourd'hui ? […] Alors est-ce qu'on a besoin de parier maintenant ?* »			
	P prend un exemple : « *J'ai 20 cubes dans ma boite. J'en enlève 12. Un enfant dit qu'il en reste 8. Est-ce qu'il a raison ou non ?* » Reprenant Samuel : « *tu as fait quoi comme opération, 8 +… ?* » […] « *8 + 12 est ce que ça fait 20 ?* »			Samuel : « *comme il a fallu que tu partes de 8, 8 + 2 = 10…* » début d'une recherche du complément ?
1:19:55	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 16 : séance 6, site Valentine (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- Un ajout dans le milieu didactique normalisant la procédure de vérification

Comme pour les séances précédentes, l'enseignante commence par remettre en mémoire la séance précédente. Elle utilise deux affichages : un premier affichage relatif à une procédure de résolution et un second relatif à la vérification (voir figures ci-après). Valentine justifie ces deux affichages en raison d'une confusion, perçue par elle lors des séances précédentes, que les élèves de la classe entretiendrait entre vérifier et refaire : « *la vérification, pour eux c'était refaire, voilà refaire la même procédure pour vérifier… heu voilà.* » (Val-S6-Entr.ante).

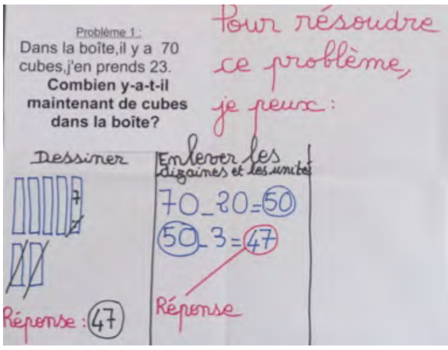


Figure 40 : séance 6 – affichage 1

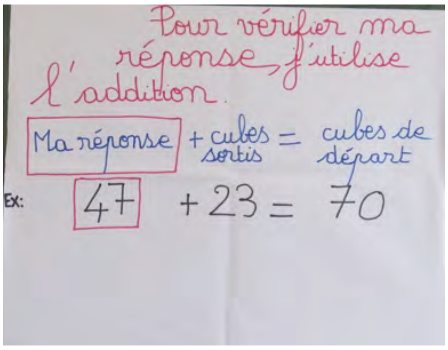


Figure 41 : séance 6 – affichage

Lors de la résolution des deux problèmes suivants (min 7 :20, min 35 :31) l'affichage 2 (*cf.* Figure 41, ci-dessus) reste présent au tableau et devient une référence : pour les trois problèmes, l'enseignante s'appuie sur cet affichage pour faire dire aux élèves l'opération qu'elle attend. Ainsi, s'adressant à Livio, « *maintenant que tu veux parier 53… avant de parier hein je te laisse la chance de vérifier si ça va être juste ou non d'accord pour vérifier* ***je rappelle pour vérifier on utilise ça*** », (Val-S6-min 13 :26) elle désigne l'affichage de référence, montrant explicitement ce qu'elle attend.

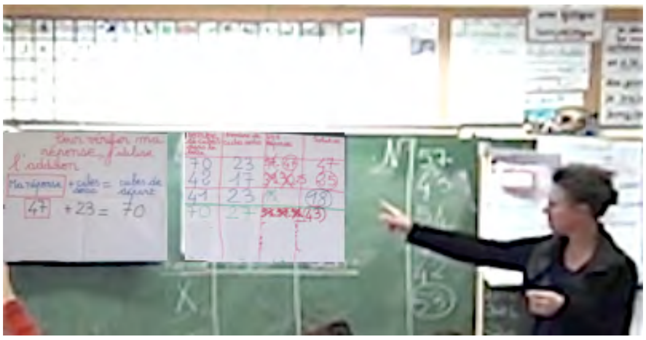


Figure 42 : séance 6 – position topogénétique haute de l'enseignante

Comme pour les séances précédentes, elle fait tester plusieurs réponses incorrectes avant d'indiquer la réponse solution. En position topogénétique haute, elle accompagne chacune des vérifications faite collectivement de questions fermées telles que : « *quel est le* *nombre auquel tu pensais ?* » (min 21 :37), « *tu ajoutes quoi ?* » (min 22 :12), « *on doit retrouver quel nombre ?* » (min 22 :39), « *43 ça correspond à quoi ?* » (min 33 :02), « *Est-ce que tu penses que ça peut être un nombre plus grand que 57 ?* » (min 41 :10). « *alors est-ce que c'est 73 que l'on veut ?* » (min 52 :07) « *en principe, je devrais trouver combien en tout ?* » (1h06min).

Nous pointons ici, la forte tension chez Valentine qui ne pouvant d'obtenir des élèves la procédure additive comme un moyen de preuve (tel qu'initialement pensé par cette étape de l'ingénierie) s'attache à la faire vivre sous une forme technicisée.

- Sur le plan de la chronogenèse : automatisation et effets de contrat

Nous décelons une progression des élèves dans les niveaux intermédiaires de preuves. En effet, les élèves réagissent spontanément à certaines propositions : « *c'est trop* » en réponse à la proposition « *58* » alors que la valeur du tout est 57, « *c'est trop* » (min 39 :16) lorsque la vérification les conduit à une somme est supérieure au tout.

Néanmoins, les expressions des élèves laissent penser que leurs réponses relèvent d'effets Topaze produits par les régulations de Valentine dans l'action conjointe (voir extraits du paragraphe précédent) : « *on part du nombre qu'on pense et on rajoute ce qu'on enlève* » (Maxine, min 49 :20), ou encore « *euh je vais partir de mon nombre* […] *et rajouter le 54* » (Claire, 1h08min) ou « *je mets mon nombre en premier et après 54 en dernier* » (Dimitri, 1h13min)

Pour autant, l'automatisme n'est pas compris de tous, certains élèves continuant d'agir sous le contrat pérenne en usage dans la classe (ils expliquent leur procédure de résolution et non de vérification) ce qui a pour conséquence une gestion des phases collectives en position topogénétique haute de la part de Valentine.

Ne pouvant obtenir ce qu'elle souhaite (la preuve par addition), elle produit par ses actions et ses attentes des accélérations chronogénétiques qui ne sont pas au cœur des enjeux de cette étape dans l'ingénierie. L'enseignante considère que « *c'est pas gagné ! Il va falloir* ***systématiser*** *ce moyen* […] *Il faut qu'il soit utilisé pour y mettre du sens. Ce qui était important de faire aujourd'hui, c'est de… d'amener les enfants à vérifier par le moyen de l'addition, quoi. Voilà. Et à verbaliser aussi, ce qu'ils faisaient.* » (Val-S6-entr.post). Ajoutant « *ce moyen il faut qu'il soit utilisé pour y mettre du sens* », elle prévoit à nouveau une séance supplémentaire.

2.2.2.1.4. Séance 7

Comme annoncé lors de l'entretien post de la séance précédente, l'enseignante intercale une seconde séance supplémentaire. Elle introduit dans le milieu didactique des productions d'« *enfants qui ont euh… résolu quelques problèmes et ils ont trouvé une réponse* » (Val-S7-Min 00 :29). La tâche des élèves de la classe est de vérifier la pertinence mathématique de ces réponses : *« nous, notre travail à nous, ça va être de vérifier si leur réponse elle est juste ou non* » (Val-S7-Min 00 :40)

Désignant l'affiche support de la séance (cf. ci-contre), elle ajoute « *çà, c'est pour s'entraîner à utiliser cet outil* [la preuve par addition]. » Le synopsis de la séance confirme le caractère d'« *entraînement* » de la séance.

La preuve par addition

Cubes dans la boite	Cubes sortis	Réponse donnée	preuve
56	13	43	
69	36	40	
71	25	41	
59	12	47	
60	45	15	
75	45	40	
87	65	32	
64	26	38	

Figure 43 : affichage 1

- Une séance de régulation.

L'entretien *post* éclaire la dimension régulatrice de cette séance : « *ce qui m'a semblé important au fur et à mesure dans la séance, c'était que cette maitrise soit faite par le plus grand nombre d'enfants. Parce que pour moi, c'était essentiel, de ne pas laisser faire que trois ou quatre enfants ayant compris et puis c'est tout, quoi. Donc c'était.. essayer de rassembler.* » (Val-S7-entr.post). L'analyse du synopsis soutient l'interprétation selon laquelle, dans cette séance, l'enseignante aborde deux difficultés séparément, de façon à rendre plus explicites ses attentes.

– différencier pas les problèmes relevant d'une somme ou d'une différence. Pour ce faire, elle profite d'erreurs de certains élèves (Enzo, min 10 :03 ; Gabin, min 21 :04) pour provoquer une discussion entre élèves ;

– distinguer procédure de résolution et procédure de vérification. Pour ce faire, elle interroge un élève, Andréa (min 3 :01), qui lors des séances précédentes, entretenait la confusion entre les deux procédures, puis Maxine et Léopold (min 5 :10), deux élèves performants, qui utilisent des procédures différentes de vérification (Maxine pose l'addition 43 + 13 tandis que Léopold effectue mentalement 43 + 3 puis 46 + 10).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Collectif		P présente une fiche « *alors regardez bien, il y a des enfants qui ont euh résolu quelques problèmes et ils ont trouvé une réponse, nous notre travail à nous ça va être de vérifier si leur réponse elle est juste ou non et on le sait maintenant on a un moyen de vérifier* »	
0 :54	Problème 1 : « *pour ce premier problème il y avait 56 cubes on en a sorti 13 et l'enfant il a cherché hein il a cherché combien il restait de cubes dans la boîte, d'accord ? il a cherché, il a trouvé 43, alors maintenant je vous demande par un moyen très rapide, par la… par la preuve on se rappelle de la preuve par l'addition, de vérifier si 43 c'est la bonne réponse ou non* »			
	Individuel		P lit le problème.	Les élèves cherchent et répondent sur ardoise.
03 :01	Collectif	Résolution collective	P : « *qui pense que l'enfant a la bonne réponse ? Vous avez une preuve de ce que vous avancez ?* »	Andréa : « *c'est euh 5 – 1 = 4, alors je fais 4 et après… […] j'ai fait euh 3+3 est égal à six* »
05 :10			P : « *Qui a trouvé un moyen de preuve ? Quelle était la preuve qu'on avait mise au point la dernière fois ?* »	Maxine : « *j'ai posé l'addition j'ai fait 43 je suis partie du nombre que pensait l'autre et ensuite j'ai rajouté les 13 sortis et j'ai vu que ça faisait 56* »
			Régulation : « *elle a dit on a on ajoute le nombre que l'on pense être dans la boîte avec le nombre de cubes sortis et en principe on arrive à […] à la totalité à 56, alors est-ce que c'était vrai ou non ?* ».	Léopold : « *euh moi en fait j'ai fait 43 plus 3 égal 46, après j'ai fait 46 plus 10 égal 56 et le 10 et le 3 c'est ça vient du 13* ». Beaucoup d'élèves ont résolu le problème. Quelques-uns ont effectué 56 + 13
			Conclusion : P écrit sur la fiche 43 + 13 = 56 « la réponse de l'enfant est bien »	
08 :05	Problème 2 : « *le deuxième exemple cette fois-ci j'ai 69 cubes en tout dans la boîte, d'accord on en sort 36 et l'enfant il pense que dans la boîte il en reste 40, alors et bien on essaye comme Maxine tout à l'heure de trouver la preuve, allez essayez de prouver est-ce que c'est vrai ou non* »			
08 :35	Col.	Vérifier	P lit le problème et demande de prouver	Les élèves cherchent et répondent sur ardoise.
10 :03			P fait réagir les élèves sur l'écriture 69+36 (Enzo) quel est le type de problème ?	Adèle pose 40 + 36 en colonne Enzo pose 36 + 69 en colonne
		Résoudre / vérifier	P fait chercher la solution collectivement et demande de la vérifier.	Dimitri veut ajuster : « enlever un petit peu ». Vérification (Samuel) 30 + 30 = 60 et 6 + 3 = 9
15 :56	Problème 3 : « *j'ai 71 dans la boîte, je sors 25 cubes et l'enfant il trouve comme réponse 41. Il pense qu'il y a 41 cubes dans la boîte qui sont restés. Est-ce qu'il a juste ou non ?* »			
	Individuel	Vérifier	P : « *Vous faites votre moyen de preuve* »	
21 :04	Collectif		Débats sur la reconnaissance du type de problème : additif ou soustractif ? 41 est-elle la bonne réponse ? P interroge Emma	Gabin ne reconnaît pas un problème soustractif : 71 + 25 Claire reconnaît le type de problème. Emma vérifie : 41 + 25, ça fait 66
21 :33	Individuel	Résoudre puis vérifier	P recense les réponses : 66 / 54 / 45 / 47 / 46 puis demande de vérifier les valeurs 54 et 45 : « *je pars du nombre pensé, ensuite qu'est-ce que tu fais ?* »	réponses par effet de contrat « partir du nombre qu'elle pensait (45) + le nombre de cube qui sont sortis » (Sarah). Les élèves ajustent ensuite à 46.
32 :46	Problème 4 : « *on avait 59 cubes dans la boîte, on en a sorti 12, l'enfant il a essayé de résoudre le problème et il a trouvé, il pense que c'est 47 sa réponse, est-ce que 47 est-ce qu'il a juste ?* »			
		Résoudre puis vérifier	P interroge Paul, Andréa, Adèle, élèves peu participatifs jusqu'à présent	Réponse correcte pour beaucoup d'élèves (plus de la moitié). Timothée : 47 + 12 = 49
35 :19	Collectif		P profite de Léopold pour fait reformuler par Léa l'enjeu d'étude.	Léopold explique sa procédure de résolution. Léa : « *prouver si on a la bonne réponse* »
37 :10	Problème 5 : « *j'ai 60 cubes dans la boîte, j'en sors 45 l'enfant il pense qu'il y en a 15 qui sont restés dans la boîte, allez on apporte la preuve est-ce que c'est vrai ou non ?* »			
	Collectif	Résoudre puis vérifier	P guide Sarah, en lui posant des questions : *le premier nombre ? Qu'est-ce qu'on rajoute ? Si on met tout ça ensemble, est-ce que ça fait bien 60 ?*	Sarah : 15 + 45 =60
41 :30	Problème 6 : « *j'ai 75cubes dans la boîte, j'en enlève 45. Est-ce que ça fait bien 40 ?* »			
	Collectif	idem	Vérification puis recherche de la solution (30), et vérification de celle-ci.	Enzo résout au lieu de vérifier. Maxine trouve 30. Enzo trouve 80
47 : 52	Problème 7 : « *j'ai 87 cubes dans la boîte, j'en sors 67 et l'enfant il pense qu'il en reste 32, est-ce qu'il a raison est-ce qu'il a tort ?* »			
	Individuel	Résoudre et prouver !	P circule dans les rangs. À un élève, voix haute : « *tu me le prouves. C'est une preuve donc il faut que tu le prouves* ».	
	Collectif	corriger	Interroge Livio : « *qu'as-tu écrit sur ton ardoise ?* »	Les élèves semblent répondre par effet de contrat sans vraiment comprendre.
50 :24	Problème 8 : « *64 cubes dans la boite, j'en sors 26. Est-ce que l'enfant qui a écrit 38 a raison ?* »			
	Collectif	résoudre	P interroge Anna (bonne élève)	Anna : 38 + 26
55 :18	BILAN : « *qu'est-ce que qu'est-ce que ce travail-là sur l'ardoise nous a fait comprendre ? qu'est-ce qui nous a permis de comprendre, qu'est-ce qui nous a permis d'apprendre ?* »			
	E1 : « *De vérifier les ré que les enfants euh euh euh leur résultat et bé on les a vérifiés* » E2 : « *On a fait des preuves* » P : « *maintenant on a fait une preuve par addition et vous imaginez les enfants ce que vous êtes en train de faire il y a les grands là-haut les CM tout ça a les grands et bien ils font aussi la même chose alors vous imaginez que si vous le faites dès maintenant et bien ça sera très facile chaque fois vous vous direz* »			
57 :11	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 17 : séance 7, site Valentine (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- Une systématisation de la procédure de vérification

L'enseignante déclare aussi vouloir systématiser la procédure de vérification par addition. Les problèmes proposés sont tous de la catégorie des transformations avec recherche de l'état initial (Ete) (Vergnaud, 1990). Cette systématisation s'appuie sur une affiche intitulée « la preuve par addition » (*cf.* Figure 44, ci-contre) qui présente les problèmes résolus sous forme d'un tableau : la première colonne indique le nombre de cubes dans la boite, la deuxième le nombre de cubes sortis, la troisième la réponse. Cette affiche est créée par l'enseignante, qui introduit ainsi dans le milieu un nouvel objet, non prévu par l'ingénierie. Il s'agit pour les élèves de la classe de vérifier dans la colonne « preuve » les réponses. Se confirme ici, l'intention didactique prioritaire de l'enseignante de faire « *apparaitre l'écriture systématique de l'addition* » (Val-S7-entr.post).

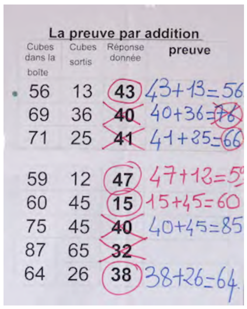


Figure 44 : la preuve par addition

Les traces vidéographiques de séance montrent un topos enseignant en surplomb, contrôlant de bout en bout le processus de vérification : pour chacun des problèmes, Valentine utilise des expressions récurrentes, « *le nombre auquel je pense* », « *le nombre de cubes sortis* » et le « *nombre de départ* ». L'extrait ci-dessous (min 25 :51) illustre la manière dont de manière récurrente dans la séance, l'enseignante contrôle le processus de vérification.

P : Alors Gabriel tiens dis-moi ce que tu vas faire pour vérifier, est-ce que c'est 54, qu'est-ce que tu fais pour mettre en place la vérification ?
Gabriel : et ben je pars du nombre
P : oui alors ***c'est quoi le nombre pensé ?***
Gabriel : 54
P : 54 donc je pars du nombre pensé, ensuite qu'est-ce que tu fais ?
Gabriel : bein je rajoute 25
P : ***Plus le nombre de cubes sortis,*** *alors combien ça fait 54+25 ? Gabriel, combien ça fait 54+25 ?*
Gabriel : 79
*P [****montrant le nombre 71 dans la 1ère colonne****] : Et* ***est-ce que c'est 79 que l'on veut ?***
Es : non
P : non, est-ce que 54 c'est la bonne réponse ?
Es : non

Extrait 59 : Valentine – séance 7 – vérification de la valeur 54 (exercice 3)

Le vocabulaire utilisé par Valentine, par les traits pertinents pointés, vise à automatiser le processus de vérification. Pour autant, en raison des nombreux effets Topaze produits par l'enseignante en surplomb, il reste difficile, à l'issue de ces deux séances ajoutées à l'ingénierie de conclure que les élèves sont en mesure de donner sens à la vérification d'un résultat. D'autant que la conclusion de cette séance 7 porte sur un élément d'ordre rhétorique et non sur une institutionnalisation d'un savoir : « *hé vous imaginez les enfants ce que vous* *êtes en train de faire ? Il y a les grands là-haut, les CM tout ça les grands hé bien ils font aussi la même chose. Alors vous imaginez que si vous le faites dès maintenant et bien ça sera très facile. Chaque fois vous vous direz hé bien moi je sais que je peux faire la preuve, d'accord ?* ». L'explication des raisons de cette conclusion nous sont apportées en entretien *post* lorsque l'enseignante s'interroge sur l'utilisation de la preuve en mathématique à l'école primaire : « *la collègue en cycle 3 me dit, c'est un problème parce que les élèves ne le mettent pas en œuvre systématiquement* [la preuve]. *Ils ne donnent pas de sens en fait, ils ont un outil dont on ne se sert pas* ».

Pour conclure sur ces deux séances ajoutées, que l'on peut interpréter comme centrées sur un travail de systématisation d'une technique, « ajouter le résultat trouvé au nombre de cubes sortis, puis comparer à la quantité initiale de cubes », il ressort des analyses que : d'une part, elles relèvent d'une intention didactique considérée comme centrale par l'enseignante, et que l'on peut interpréter comme un indice de son épistémologie pratique, elle-même soutenue d'autre part sur des éléments curriculaires, non-explicites mais repérables dans la mise en perspective de ce travail à l'horizon de la fin de scolarisation primaire (cycle 3). Ces points seront à confirmer dans les analyses qui suivent.

2.2.2.1.5. Séance 8

À la suite de ces deux séances, l'enseignante reprend le cours de l'ingénierie. Cette huitième séance est la dernière de l'étape portant sur la preuve d'un résultat. Lors de l'entretien *ante*, Valentine déclare : « *on va voir si les automatismes se sont bien mis en place par rapport à la preuve par l'addition. On va voir ce qu'il en reste, donc on va faire un petit rappel au départ. Voir ce qui s'est passé la dernière fois, ce qu'on a fait, et ensuite on va partir sur deux problèmes […] et après je vais terminer par un petit contrôle des acquis* » (Val-S8-entr.ante). Il s'agit aussi pour les élèves de se rendre compte de l'inutilité de la boîte : « *on vérifiera en dernier lieu avec la boîte et peut-être qu'on pourra s'apercevoir qu'il n'y a pas besoin de l'ouvrir* » (*Ibid.*).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	collectif		<u>Rappel à la mémoire didactique</u> : L'affiche de la séance précédente est au tableau. « *alors la dernière fois, c'est-à-dire lundi je crois, nous avions travaillé sur une seule chose, on s'était entraîné à faire quoi ? […] pourquoi on fait la preuve ? […] Quand je vous donne un problème qu'est-ce qu'on fait en premier quand on a un problème ?* » P fait exprimer le fait que une fois un résultat prouvé, on n'a plus besoin d'ouvrir la boite. P reprend le 1er exercice de la séance précédente et P interroge les élèves : « *Peux-tu nous dire ce que l'on a fait comme preuve pour vérifier ? Qui peut l'expliquer ?* ». P interroge Maxine, Conclusion : « ***on est bien d'accord, voilà ça c'est ce que l'on fait pour vérifier, donc donc ça [l'affiche de la séance précédente] je vais le laisser sur le côté,*** » <u>Présentation de la séance</u> : deux problèmes, un petit contrôle	Les élèves ont retenu le mot « addition » Bertille : « *Pour savoir si c'est vraiment le bon euh résultat* » Maxine : « ***On est parti du nombre qu'on pensait on a rajouté le nombre qu'on a enlevé et normalement ça menait à 56*** »
03 :23	Problème 1 : Un berger a un troupeau de 75 moutons. Un brigand lui en vole 46. Combien le berger possède-t-il de moutons maintenant ?			
	individuel	Rechercher la solution	Lecture de l'énoncé. P demande à 2 élèves de simuler le problème : l'un met 75 cubes, l'autre en enlève 46. P recopie au tableau l'organisation de la fiche : 4 colonnes : Troupeau de moutons / Moutons volés / Réponses / Preuve par addition (N.B. : P commence par écrire « vérification » puis efface pour écrire « preuve par addition ») puis circule dans les groupes	Paul met 75 cubes dans la boites (7 dizaines et 5 cubes). Emma enlève 46 cubes. Les élèves travaillent sur une fiche. Ils cherchent activement. (concentrés).
12 :27	collectif	Vérifier / prouver	P fait vérifier la réponse de Livio : (22) P profite de Claire pour faire exprimer l'addition. P demande de vérifier plusieurs résultats d'élèves : 24 (Clémence) puis 29 (Adèle).	Certains élèves affirment qu'il y a erreur, par re-calcul et non par vérification (Gabin, Clémence, Éléonore). Claire : **« je suis partie de 22 et j'ai mis 46 »**. Clémence propose 24, puis Timothée 29
19 :29			P demande à Gabriel d'aller vérifier la valeur 29 au tableau.	Les élèves sont déçus, anticipant le fait que Timothée va gagner le pari. Ils pensent au cadeau (enjeu du pari) qui leur échappe. Déception qu'il n'y ait plus de paris et donc d'objet à gagner
			P écarte les paris, aspect qui lui paraît ludique et à ce stade inutile. P : « *On a dit que les paris maintenant euh… ça y est, on savait vérifier hein* »	
			P envoie Gabriel au tableau pour vérifier P reformule l'ajustement de Bertille	Gabriel : **pose l'addition en colonne 29 + 46**. Bertille explique son ajustement de 1 après avoir testé 28
22 :22			P ouvre la boite et montre les cubes restants	Gabriel : « depuis le début j'avais 29 »
23 :38	Problème 2 : Dans une boite, il y a 75 cubes, des bleus et des rouges. 38 sont bleus. Combien y-a-t-il de rouges ?			
	Ind.	Résoudre	P prépare le matériel puis circule dans les groupes. P a des apartés avec certains élèves : Bertille, Adèle	
28 :50	Col.	Vérifier / prouver	P : « *oulala il y en a deux déjà qui ont changé d'avis parce qu'ils ont vérifié et ils ont vu que… donc ils ont changé changé d'avis… par contre, il y en a qui ont l'air vraiment sûrs d'eux, je les vois pas vérifier* »	
29 :24			P demande à tous les élèves de vérifier la réponse d'Adèle qui n'a pas vérifié (46) Puis la réponse d'Andréa (35)	Les élèves répondent spontanément non. Élèves agités. Zoé : « non : 84 » Anna dicte : 46 + 38 = 74. Correction de la classe
33 :26			P demande à Andréa d'aller vérifier sa réponse au tableau. P est en surplomb.	Andréa se perd : 35 + 46 puis 35 + 75. Bertille corrige : « 35 + 38 ».
35 :51			Test de la valeur de Rémi (45) puis de la valeur de Enzo (37)	Enzo : décomposition de 37 ; Samuel explique comment vérifier
38 :59			P : *« ce qu'il vient de se passer, on est d'accord chacun est capable de trouver une réponse mais par contre ce qu'il faut être sûr de faire […],c'est de vérifier par l'addition »*	**Les élèves semblent avoir acquis un automatisme** (poser addition), certains se trompent quant aux nombres en jeu dans cette opération
24 :03	Contrôle : « j'ai plein de petits problèmes qui ont déjà été faits par des camarades ils ont tous trouvé une réponse, et bien je vais juste vous demander de vérifier si chacune des réponses est juste en faisant la preuve à côté et à la fin de la colonne vous m'écrirez vrai ou faux. Est-ce que c'était vrai ou est-ce que c'était faux… »			
	Ind.	Vérifier	« *Je veux moi la preuve écrite hein, je veux que vous me montriez comment vous faites la preuve* » P circule dans les groupes. De plus en plus d'apartés avec les élèves	Les élèves ne comprennent pas : « *la solution, on l'écrit là ? oui ou non ?* » Paul recalcule
54 :13	Col.	Corriger	Correction du contrôle : P simule le problème puis envoie plusieurs élèves au tableau pour vérifier : Gabin (en difficulté), Zoé (qui a compris), Paul (en difficulté)	Plusieurs d'élèves **recalculent toujours**. Certains ne savent pas conclure, même en ayant repéré l'addition.
1 :15 :23	BILAN : « *vous avez vu que depuis un certain temps on a travaillé sur quelque chose de très important que l'on retrouvera certainement après. Vous comprendrez pourquoi il la faut cette preuve d'accord mais en tout cas nous qu'est-ce qu'on a appris à faire en définitive Léopold ?* »			
	réponse des élèves : à corriger et à prouver		conclusion de P : « *on n'a pas besoin de la boîte pour vérifier puisque on sait le faire* »	**Fin de la séance :** 1 :16 :52

Tableau synoptique 18 : séance 8, site Valentine (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- Un rappel ritualisé à la mémoire didactique

Ainsi qu'elle le dit en entretien *ante*, l'enseignante s'assure des savoirs retenus par les élèves : « *on va voir si les automatismes se sont bien mis en place par rapport à la preuve par l'addition. On va voir ce qu'il en reste.* » (Val-S8-entr.ante) Pour ce faire, elle guide les élèves en s'appuyant sur l'affiche construite lors de la séance précédente (*cf.* Figure 44) et en distribuant la parole à une élève chronogène. Maxine (min 2 :46) reformule à quelques mots près comme à la séance précédente, utilisant les mêmes mots que sa maitresse : (« *On est parti du nombre qu'on pensait, on a rajouté le nombre qu'on a enlevé, et normalement ça menait à 56 ») ;* tandis que Dimitri (min 2 :18) déclare « on fait l'addition ». L'enseignante conclut ce moment didactique par « *d'accord, d'accord on a on a bien on est bien d'accord, voilà ça c'est ce que l'on fait pour vérifier, donc, donc ça* [montrant l'affiche de la séance précédente, *cf.* Figure 44] *je vais la laisser sur le côté* » (Min 03 :04).

- Sur le plan de la mésogenèse

Nous retenons de l'analyse du synopsis plusieurs traits caractéristiques de la conduite de cette séance, dont la fonction est essentiellement d'ordre mésogénétique :

- Un modèle de preuve : la trace écrite construite la séance précédente servant de mémoire didactique reste présente toute la séance, faisant office de modèle pour les élèves : « *Je vais aussi ressortir la feuille qu'on a utilisée la dernière fois, pour s'appuyer sur la preuve par addition, ce qu'on a fait, et c'est tout. L'addition qui montrait bien que on ajoutait le nombre pensé au nombre de cubes sortis, quoi pour trouver le total* » (Val-S8-entr.ante)

- Une formulation de la preuve évolutive : L'enseignante exhibe les réponses de plusieurs élèves au premier problème (min 12 :27), réponses qu'elle fait éprouver par l'ensemble de la classe. Ce faisant, les élèves introduisent dans le milieu didactique une formulation de la preuve, formulation évoluant à lors de la vérification de chaque réponse proposée. Le tableau ci-dessous montre l'évolution de la formulation de la preuve de la résolution du premier problème (relevé en gras) :

Min 15 :20	*Claire : ben* ***je suis partie de 22*** [...] ***Et ensuite j'ai mis euh 46*** [...] ***Ça fait 68*** *P : Ça fait 68 et nous on veut combien de moutons, est-ce qu'il a récupéré tous ses moutons là ?*
Min17 :35	*Clémence :* ***J'ai posé l'addition*** [...] *euh* ***24 plus 46*** *P : Oui et t'as trouvé combien ?* *Clémence : 70* *P : euh alors Clémence est-ce que c'est ça ? est-ce que tu t'es trompée ?*
Min20 :36	*Gabriel :* ***j'ai mis euh 29 en dessous 46*** [Gabriel effectue l'addition en colonne] *P : Est-ce que tu es arrivé à au nombre de moutons de départ ?*

Tableau 28 : évolution de la formulation de la preuve

Nous observons que la formulation tend à être normalisée vers une expression proche de celle exprimée en entretien ante : « [ajouter] *le nombre pensé au nombre de cubes sortis, quoi pour trouver le total* » (Val-S8-entr.ante) :

- Les termes relatifs à une procédure numérique apparaissent plus fortement : calcul (44 fois), addition (23 fois), plus (37 fois), égal (11 fois). L'addition est convoquée systématiquement pour vérifier les réponses proposées.

- Le matériel {boite – cubes} n'est plus utilisé que pour simuler les problèmes ou simuler la preuve. Parlant de la preuve, elle indique que « *la boîte va aussi aider à visualiser cette opération* » (Val-S8-entr.ante).

- Le terme de « vérification » est peu à peu écarté au profit de « preuve par addition ». Le mot même d'addition génère alors un effet de contrat, les élèves recherchant systématiquement l'écriture d'une addition sans forcément y mettre du sens (min 38 :59).

- Sur le plan de la chronogenèse

Plusieurs indices indiquent que les élèves sont en passe de réaliser le passage de la vérification empirique à la vérification par un moyen intellectuel :

- les élèves ne demandent plus à ouvrir la boite pour vérifier,

- leurs interventions spontanées « trop grand ! », « trop petit ! » sont autant d'indices d'une acquisition du niveau de preuve NP1,

- les traces écrites montrent leurs essais et vérifications successifs, dont certains portent les prémisses d'ajustements.

Pour autant, l'accès à la compréhension du niveau 2 de la preuve demeure difficile pour une partie des élèves. Certains élèves repèrent bien qu'il s'agit de « *partir de sa* *réponse* » (min 33 :26, min 41 :07), mais ne savent plus quel nombre ajouter, d'autres encore ne retiennent que le « pattern » de la preuve et complète l'addition avec les nombres du problèmes et leur réponse (*cf.* extrait ci-après).

Andréa (au tableau) : Après moi je suis parti de mon nombre 35 [Andréa écrit 35].
Après j'ai fait euh 46 [Andréa écrit + 46 sous le nombre 35]
P : Pourquoi ?
Andréa : euh
P : Tu tu l'ajoutes à quoi ton nombre ?
Andréa : à…. 75
P : Ah bon ?
Bertille : non à 38
Es : À 38
Andréa : ah oui

Extrait 60 : Valentine – Séance 8 – vérification de la réponse 35 (problème 2)

Enfin, les productions écrites nous permettent de constater que quelques élèves de cette classe mettent en œuvre le niveau de preuve NP2, amorçant déjà une résolution par essais successifs. À titre d'exemple, nous exploitons ci-dessous sur deux traces écrites significatives de la résolution du problème 1 par les élèves.

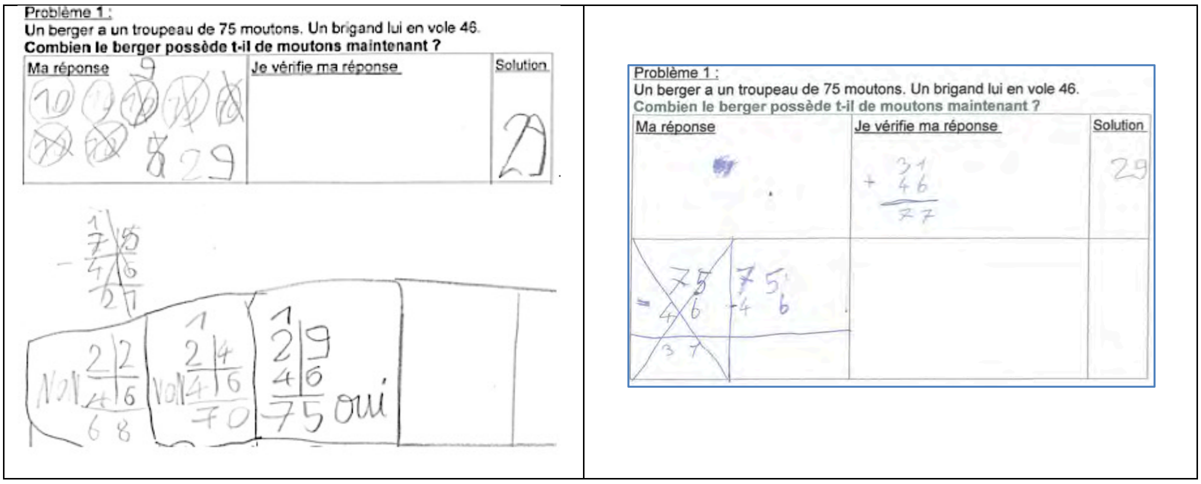


Figure 45 : exemples de traces écrites relatives à la vérification d'une réponse

Pour conclure l'analyse, dans cette séance nous observons que le matériel (boite et cubes) disparaît progressivement du milieu didactique au profit d'un automatisme de preuve. Si une majorité d'élèves ne donnent pas de sens à cet automatisme, l'enseignante considère que le sens viendra avec la mise en œuvre régulière, la ritualisation, la systématisation. Alors que nous notons par ailleurs que plusieurs élèves posent dans le milieu des prémisses d'ajustement, ce que nous considérons comme des indices d'avancée chronogénétique liée à l'utilisation de la preuve d'un résultat. À cette étape de l'enquête, nous conjecturons que ce constat indique l'influence de l'épistémologie professionnelle de Valentine sur sa manière de mettre en œuvre l'ingénierie, ce que nous discutons dans la section qui suit qui synthétise les constats établis au fil de cette seconde étape.

2.2.2.2. Conclusions à propos de la deuxième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Valentine

Le savoir visé par cette étape, tel que défini dans l'ingénierie didactique, est de faire émerger un moyen intellectuel de preuve d'une réponse à un problème soustractif. Comme nous le faisons à l'issue des mises en œuvre de chaque étape, nous synthétisons dans deux tableaux en pages suivantes, les observations de l'étape 2, selon deux focales : une focale mésogénétique et une focale chronogénétique.

Les deux tableaux montrent un aménagement important de l'étape : prévue par l'ingénierie en trois leçons, l'enseignante la développe en cinq séances : trois sont issues de l'ingénierie et deux sont des ajouts de l'enseignante.

Du point de vue de l'évolution mésogénétique, nous pointons des difficultés dans la co-construction de la preuve. Trois raisons nous semblent expliquer les difficultés de la construction de la preuve d'un résultat.

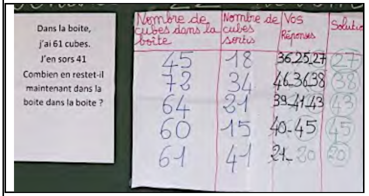
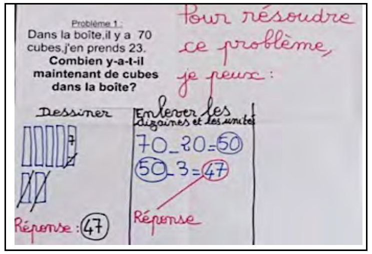
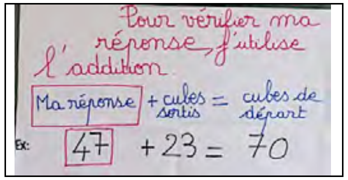
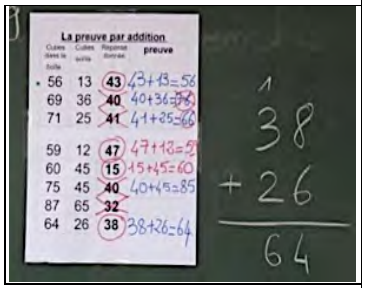
	Séance 4	Séance 5	Séance 6	Séance 7	Séance 8
	Mésogenèse d'une preuve : de la preuve empirique à la preuve intellectuelle				
Modalité	**Collective** / individuelle	Collective / **individuelle**	Collective / **individuelle**	Collective / **individuelle**	
Matériel	Affiche du problème 1 au tableau Affiche recueillant les réponses pariées des élèves :  Figure 46 : paris Boite et cubes en dizaines ou unités Fiche individuelle des problèmes Traces écrites au tableau	Affiche de la séance précédente. Affiche du 1er problème au tableau Affiche recueillant les réponses pariées des élèves.  Figure 47 : vérification des réponses des élèves Boite et cubes en dizaines ou unités Fiche individuelle des problèmes Traces écrites au tableau	Affiche procédure/vérification :  Figure 48 : résoudre Affiche de référence et affiche des réponses pariées :  Figure 49 : vérifier Boite et cubes en dizaines ou unités Fiche individuelle des problèmes Traces écrites au tableau	Affiche de travail :  Figure 50 : valider ou invalider la réponse Traces écrites au tableau Boite et cubes présents dans la classe mais non utilisés	Affiche de la séance précédente. Traces écrites au tableau  Figure 51 : Boite et cubes en dizaines ou unités Fiche individuelle des problèmes
Langagier	Rassembler, ensemble (0) En tout (5) Trop (6) pas assez, trop petit (7) à partir de… (15) Jusqu'à, arriver à (11) Ajouter / rajouter (29) Addition (3) plus (35) égal (10) Calcul (5) Preuve/prouver (4) Vérifier (15)	Rassembler, ensemble (2) en tout (3) Trop (3), pas assez, trop petit (0) Partir de… (37) Jusqu'à, Arriver à (3) Ajouter / rajouter (36) Addition (5) plus (32) égal (5) Calcul (3) Preuve/prouver (0) Vérifier (40)	Rassembler, ensemble (6) En tout (5) Trop (14), pas assez, trop petit (4) Partir de…(14) Jusqu'à, Arriver à (3) Ajouter / rajouter (24) Addition (13) plus (30) égal (11) Calcul (9) Preuve/prouver (1) Vérifier (101)	Rassembler, ensemble (2) En tout (3) Trop grand (2), pas assez, trop petit (0) Partir de… (15) Jusqu'à, Arriver à (3) Ajouter / rajouter (14) Addition (9) plus (50) égal (10) Calcul (16) Preuve/prouver (31) Vérifier (24)	Rassembler, ensemble (0) En tout (0) Trop grand (4), pas assez, trop petit (2) Partir de… (9) Jusqu'à, Arriver à (1) Ajouter / rajouter (18) Addition (23) plus (37) égal (11) Calcul (44) Preuve/prouver (55) Vérifier (51)

Tableau 29 : synthèse des cinq séances de l'étape 2 - « l'addition comme moyen de preuve » du point de vue mésogénétique (Site Valentine)

- Des milieux didactiques orientés vers la preuve par l'addition

Le contrat pérenne « résoudre et expliquer sa procédure de résolution » installé durant tout le début de l'étape maintient élèves et enseignante dans la résolution des problèmes soustractifs qui sont mis à l'étude, ce qui ne permet pas aux élèves de différencier vérification et preuve. Nous avons vu que dès la première séance, tant l'enseignante que les élèves ont des difficultés à se dégager de ce contrat didactique. L'entretien *ante* de la quatrième séance indique un flou entre addition pour résoudre et addition pour prouver : « *on va faire en sorte que la solution à trouver, c'est le nombre que l'on va ajouter au nombre de cubes sortis* » (Val-S4-Entr.ante ; voir aussi min 24 :41 de cette séance 4 supra). Or, si les vérifications successives conduisent bien à la solution, l'enjeu d'étude n'est pas pour autant de résoudre mais de vérifier comme le montrent nos analyses et les usages des affiches introduites successivement dans le milieu didactique (voir Tableau 29, ci-dessus).

Ce flou énoncé en entretien *ante* trouve un écho dans la classe lors de l'énonciation aux élèves de l'objectif de la séance : « *Le but aujourd'hui, ça va être de vous amener à trouver tous une solution* ». Il est majoré par le fait que, comme il est d'usage, l'enseignante déclare s'intéresser à comment l'élève résout les problèmes : *« Maxine, en fait moi je ne veux pas que la réponse. Si tu m'as écrit quelque chose pour arriver à la réponse, ça m'intéresse aussi, d'accord ? »* (Val-S4-min12 :18). Les élèves demeurent alors tenus par le contrat pérenne et expliquent leurs procédures de résolution : « *j'ai pas fait ça moi, j'ai compté de 10 en 10. Moins 10 et puis moins 10…* » (Val-S4-min12 :18). Ou encore *« Moi j'ai fait 4 paquets de 10, j'en ai barré euh… »* (Val-S4-min25 :18).

- Le pari ne joue pas son rôle d'apprêt didactique

D'un point de vue mésogénétique, l'enseignante introduit le pari dans le milieu didactique avant le sur-comptage, mais n'en demande pas la confirmation après celui-ci, ce qui a pour conséquence d'en inhiber la fonction « d'apprêt didactique » (Brousseau, 1986). En effet, les élèves ne reconsidèrent pas la validité de leur proposition mais relancent un autre pari sur une autre proposition. Le pari est ici alors réduit à un jeu de hasard. De ce fait, il ne remplit pas son rôle de « sous-couche » préparant l'élève à s'engager dans la construction de la preuve. Nous avons vu qu'il faut attendre la sixième séance (ajoutée) durant laquelle la preuve est automatisée sous forme d'une technique pour que le pari retrouve son sens et soit placé après la vérification. Quelles en sont les conséquences en termes d'avancée des savoirs ?

	Séance 4	Séance 5	Séance 6	Séance 7	Séance 8
	Chronogenèse d'une preuve : de la preuve empirique à la preuve intellectuelle				
Place du pari	**Définition du mot en début de séance** E : « *C'est quoi des paris ?* » E : « *euh ça veut dire quoi ?* » E : « *Si la réponse est la bonne et ben t'as gagné* » **Le pari est pris avant** la vérification par sur-comptage	**Le pari est lancé avant** la vérification intellectuelle. P : « *qu'est-ce qu'on faisait pour euh pour parier, pour vérifier* » E : « *je veux pas parier* » E : « *moi j'ai envie de parier* »	**Le pari est lancé après** la vérification intellectuelle P : « *alors on va faire des paris hein, mais avant de faire des paris, moi je veux que chacun vérifie* » P : « *avant de parier hein je te laisse la chance de vérifier si ça va être juste ou non* » P : « *Tu veux toujours parier avec moi ou non ? tu sais pas trop ?* » Andréa : « *Je sais pas trop* »	**Pas de pari ni d'allusion** dans cette séance	**Allusions au pari :** P : « *on a dit que les paris maintenant euh… ça y est, on savait vérifier hein…* » [sous-entendu, on n'a plus besoin de parier, puisque l'on sait vérifier]
Procédures de vérification intellectuelle	**Sur-comptage un à un** avant ouverture de la boite et comparaison du denier nombre prononcé avec le nombre représentant la quantité initiale. **Sur-comptage de 10 en 10, puis un à un** avant ouverture de la boite et comparaison du dernier nombre prononcé avec le nombre représentant la quantité initiale.	**Sur-comptage de 10 en 10, puis de un en un.** **Élimination des valeurs impossibles.** → car supérieure à la quantité initiale (Pb2 min 17) **Sur-comptage avec un calcul réfléchi s'adossant au système de numération :** → 39 *et* 10, *et* 2, *et* 5 ça fait 56 (Pb 2, min 22) → 25 *et un paquet de* 10 *plus* 7 (Pb 2, min 27) **Addition :** → 30 et je *rajoute* les 17	**Écart des réponses trop grandes** (nombre supérieur à la quantité initiale) **Addition posée**	**Automatisation d'une procédure de calcul** 1. Calcul de la somme « nombre de cube pensés restants » + « nombre de cubes sortis » 2. comparaison « au nombre de cubes de départ » **Addition posée** **Calcul réfléchi**	
Vérification empirique	**Dénombrement des cubes restants** dans la boite	**Comptage des cubes restants** dans la boite	**NP1 / NP2**	**NP1 / NP2**	**NP1 / NP2**
Lieu d'explicitation **des procédures de résolution** par les élèves.	Problème 1 Problème 4	Problème 3 Début de **réajustements** en fonction des valeurs éprouvées précédemment.			Début de **réajustements** en fonction des valeurs éprouvées précédemment.

Tableau 30 : synthèse des cinq séances de l'étape 2 - « l'addition comme moyen de preuve » du point de vue chronogénétique (Site Valentine)

- Une automatisation de la preuve : un effet de contrat construit et assumé

Dès la première séance de l'étape, au prise avec la difficulté du contrat pérenne installé, l'enseignante déclare « *il va falloir systématiser cette preuve* » (Val-S6-entr.post). Nous remarquons que les termes « systématiser » et « automatiser » sont utilisés à quinze reprises dans les entretiens *post* et *ante*. Ces récurrences renforcent nos interprétations selon lesquelles les choix mésogénétiques et l'évolution chronogénétique décrits au fil de l'étape 2 sont fortement impactés par l'épistémologie professionnelle de Valentine. Cela se traduit sur le plan pratique par les usages des affiches, mais aussi par les régulations et les institutionnalisations partielles que nous avons évoqués au fil des analyses des 5 séances de l'étape. Ce constat se trouve aussi renforcé par quelques-unes des intentions déclarées de l'enseignante lors des entretiens *ante* ou *post* :

- « Il va falloir systématiser cette preuve » (Val-S6-entr.ante).
- « Donc on va faire ça sur ardoise, juste pour systématiser si tu veux ce moyen de vérification » (Val-S7-entr.ante).
- à propos de l'affiche utilisée (*cf.* Figure 41) « Et là va apparaitre l'écriture systématique de l'addition, quoi en fait. ». (Val-S7-entr.ante).
- « On va voir si les automatismes se sont bien mis en place par rapport à la preuve par l'addition. » (Val-S8-entr.ante).
- « On va continuer à maitriser cette notion de preuve, quoi, de la maitriser, de la mettre en œuvre régulièrement, la ritualiser, la systématiser » (Val-S8-entr.post).

La systématisation de la preuve par l'addition, telle que mise en œuvre par Valentine se traduit sous la forme :

- d'affichages construits par l'enseignante hors de la classe (*cf.* tableau de synthèse Évolution des milieux de la preuve précédent) qui, sous couvert d'une institutionnalisation, sont en réalité des traces normalisantes d'un discours : « *ça revient à « ma réponse ajoutée aux nombres de cubes qu'on a sortis », quoi. Enfin, pour faire la preuve.* » (Val-S8-entr.post).

- d'un affichage co-construit (*cf.* Figure 50), mais tel que seule une forme d'écriture de l'addition émerge.

– d’une position en surplomb de l’enseignante lors de chacune des vérifications. L’extrait ci-dessous est particulièrement représentatif de sa position tout au long de l’étape (il s’agit ici de vérifier 71 – 25 est égal à 54, (séance 7, min 15 :56).

–

P : oui alors c’est quoi le nombre pensé ?
[…]
Gabriel : 54
P : c’est 54 donc je pars du nombre pensé, ensuite qu’est-ce que tu fais ?
Gabriel : bein je rajoute 25
P : Plus le nombre de cubes sortis alors combien ça fait 54 + 25 ?
Gabriel : 79
P : Ça fait 79, est-ce que c’est 79 que l’on veut ?
Es : non
P : Non est-ce que 54 c’est la bonne réponse ?
Es : non

Extrait 61 : Valentine – séance 7 position de l’enseignante lors de la preuve d’un résultat

La stagnation chronogénétique observée, est identifiée par l’enseignante, qui reconnaît que les élèves ne mettent pas de sens à cette preuve : « *certains ont des automatismes encore, il n’y a pas forcément le sens derrière …* » et que « *le sens, à un moment, il interviendra quand on distinguera problème additif et soustractif, tu vois ? La preuve, à quel moment elle va intervenir, d’accord ? Et après quand on va intervenir au niveau de la technique opératoire de la soustraction, quoi…* » (Val-S8-entr.post). Nous interprétons de plus ces propos comme un souci d’avancée du savoir relatif à la preuve, dont Valentine ne voit pas d’autre moyen de l’obtenir que lors d’un apprentissage par effet de contrat.

Pour conclure, lors de cette étape Valentine a bien introduit dans le milieu didactique l’addition en tant que « moyen de preuve » d’un résultat. Cependant, celle-ci n’a pas été introduite ainsi que le prévoyait l’ingénierie didactique : l’enseignante l’a systématisée en tant que technique pour trouver le résultat attendu au détriment du sens. La didacticité du pari, en tant qu’apprêt destiné à donner du sens à l’addition, n’a pas été identifié par l’enseignante et par conséquence n’a pas joué son rôle. En déclarant *« On va continuer à maitriser cette notion de preuve, quoi… La maitriser, la mettre en œuvre régulièrement, la ritualiser, la systématiser etc. et le sens viendra avec, quoi…* » (Val-S8-entr.post), nous considérons que l’enseignante dévoile une dimension de son épistémologie pratique : travailler la technique puis acquérir le sens par la pratique. La poursuite de l’analyse nous permettra d’affiner cette interprétation.

2.2.3. Analyse de l'étape 4 : « La stratégie des essais »

Comme pour Pascale, et pour les raisons explicitées dans la section méthode, nous ne traitons pas des séances relatives à l'étape 3 qui portent essentiellement sur le travail de la technique, dont on a vu lors de l'étape précédente que Valentine, enseignante chevronnée, maîtrisait parfaitement la mise en œuvre. Notons à ce propos que sur ce site, l'étape 3 sera déployée en six séances, une de plus que prévue par l'ingénierie. Ce constat d'une amplification du temps didactique passé au travail de la technique corrobore, nous semble-t-il, l'interprétation selon laquelle les mises en œuvre de l'ingénierie didactique par Valentine sont empreintes des usages didactiques construits au fil du temps et porte la marque de son épistémologie pratique personnelle. Cette interprétation se confirme-t-elle lors de la mise en œuvre de l'étape 4, que nous analysons maintenant ?

L'objectif de l'étape 4, tel qu'il est décrit dans l'ingénierie didactique, est que l'élève se serve de la vérification comme d'un outil de résolution : l'élève éprouve différentes valeurs jusqu'à trouver celle correspondant à la solution du problème.

A ce stade de la mise en œuvre de l'ingénierie, la plupart des élèves de Valentine résolvent les problèmes soustractifs selon des procédures empiriques (manipulation de la boite et des cubes, dessins) ou intellectuelle (comptage, calcul réfléchi) et « *sont capables aussi maintenant de vérifier si la réponse est juste ou non* » (Val-S15-entr.ante). En disant cela l'enseignante indique une possible confusion dans sa manière de comprendre l'ingénierie entre savoir trouver une solution et construire le sens de la preuve. Nous poursuivons l'analyse dans ce sens, en notant dès à présent que si l'ingénierie didactique prévoit trois leçons pour cette étape, l'enseignante la déroule en quatre séances.

2.2.3.1. Analyse mésodidactique des séances

Nous reprenons les analyses à la séance 15, les séances 9, 10, 11, 12, 13 et 14 étant des séances de la troisième étape.

2.2.3.1.1. Séance 15

L'enseignante a pour objectif « *de mettre en œuvre la stratégie des essais et d'amener tous les enfants à proposer une réponse pour une soustraction dite plus difficile* ». Elle précise que dans cette séance, « *on s'assure que tout le monde soit sur le bon calcul déjà et ensuite, une fois qu'on s'est assuré que c'est bien un calcul soustractif, ou additif, selon le* *cas, on va chercher la réponse.* » En posant la question *« Il va se poser le problème des retenues, des unités, pas assez d'unités, voilà … qu'est-ce qu'ils vont faire ?* » (Val-S15-entr.ante), l'enseignante montre qu'elle a bien perçu le glissement de l'enjeu « reconnaître et résoudre des situations soustractives » vers l'enjeu « construire l'algorithme de la soustraction ». Si elle dit ne pas savoir comment les élèves vont procéder, elle prévoit certaines erreurs telles que 92 – 34 = 62 ou 92 – 34 = 60 ou certaines procédures de calcul comme par exemple 92 – 4 = 88 et 88 – 30 = 58.

Le synopsis ci-après décrit le déroulement de la séance : comme pour les séances précédentes, Valentine structure la séance en trois étapes : (i) appel à la mémoire didactique ; (ii) mise en œuvre de l'ajustement et explicitation des procédures mises en œuvre pour chacun des problèmes ; (iii) bilan de la séance.

Trois traits majeurs caractérisent cette séance :

- Un enjeu d'étude explicitement annoncé aux élèves dès le début de la séance

L'enjeu d'étude est explicitement énoncé dès le début de la séance : « *on va essayer de travailler peut-être sur des calculs plus difficiles* » (min 03 :10). Ainsi elle interrompt le temps de recherche pour demander « *Alors, quelle est l'opération sur laquelle on va travailler aujourd'hui ?* » (min 16 :23). Les élèves ayant proposé deux écritures, elle conclut par « *j'attends la solution maintenant* ». Au fil de la séance, les discussions collectives ne portent que sur la manière d'opérer. Si elle exhibe des erreurs d'élèves, elle met surtout l'accent sur les résultats corrects : « *on va écouter comment ils ont fait,* [ceux qui ont réussi] » (Val-S15-min 26 :31). Les élèves énoncent différentes stratégies opératoires, ce que nous interprétons comme l'indentification de l'intention didactique de l'enseignante, mais aussi comme un retour à un contrat didactique habituel, celui de dire comment on est arrivé au résultat.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			Appel à la mémoire didactique : « *qu'est-ce qu'on sait faire ? […] est ce qu'on fait tout le temps une preuve par addition ? […] à quoi sert la boite ? […] est ce que ça va être évident de mettre 'plus' ou 'moins', ça dépend de quoi ?* »	E1 : « *On sait faire la preuve // par addition* » E2 : « *faire sans les cubes, tout seul* » E3 : « *on sait écrire un calcul avec une écriture mathématique* » E4 : l'opération dépend du problème, « *si on enlève ou si on rajoute* »
3 :10	Problème 1 : ce cahier a 92 feuilles en tout et il a 34 qui sont écrites. A votre avis quelle question on vous pose ?			
			P raconte le problème en montrant à la classe un cahier puis demande d'écrire le calcul et la solution. « *Je veux savoir ce que vous avez fait pour y arriver*».	Les élèves réagissent aussitôt : « *il faut trouver le reste* »
	Ind.	Recherche	P simule le problème (P met 9 dizaines et 2 cubes isolés dans la boite, puis écarte 3 dizaines et 4 cubes) puis distribue les fiches de travail. P circule de groupe en groupe	Les élèves cherchent la nature du problème : additif ou soustractif Gabin demande à P l'opération et devant son refus de réponse : « *hé bein on va faire 'plus'* »
16 :23	Col.	Déterminer la ou les opérations	P arrête le travail de recherche : « *quelle est l'opération sur laquelle on va travailler ?* » P provoque les élèves : « *j'en ai vu écrire 34+92* »	Les élèves proposent la soustraction et l'addition à trou. Les élèves surtout Gabin réagissent aussitôt : « *vu qu'il y a 92 feuilles et qu'on en gaspille 34, ben c'est moins ! 92 – 34 !* »
17 :04	Ind.	Calculer	P relance le travail individuel pour le calcul de la différence et circule dans les groupes	
20 :41	Col.	Expliquer sa procédure	P interroge Anna sur sa réponse puis laisse expliquer	Anna propose 60 : 9 dizaines moins 6 dizaines = 6 dizaines, « *et c'est tout* ». Les autres élèves complètent par « *2 – 4, ça fait zéro* »
22 :47		Vérifier et ajuster	P demande la vérification de 60 **P conclut :** « *on vient de réajuster grâce à la preuve, elles ont vu qu'il y avait 2 feuilles en plus, donc elles se sont dit, hé bien, je vais enlever 2 feuilles à mon nombre auquel je pensais, et je vais trouver 58.*»	Les élèves vérifient en faisant l'addition, trouvent 94 et ajustent spontanément : « *ça fait 58 !* », « *on fait 2 de moins de 60 parce comme il y en a 2 de trop, ça veut dire que 60, il y en a 2 de trop aussi. Donc on fait 2 de moins, ça fait 58* »
26 :31			P : « *on va écouter comment ils* [les camarades] *font pour trouver du premier coup* » P parlant de la procédure de Timothée : « *il s'est occupé des dizaines et des unités après* ».	Léopold : « *92 – 2 = 90 puis 90 – 30 = 60 puis 60 – 2 = 58* » Dimitri : « *j'ai fait 34 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 et après j'ai vu qu'on pouvait pas mettre encore 10, alors j'ai compté après à partir de 94, j'ai enlevé 2 et j'ai vu que ça faisait 58* » Bertille : « *j'avais fait 34 + 54 = 88 et plus 4, 92* » Timothé : « *j'ai enlevé déjà 3 dizaines et après, j'ai enlevé 4* »
34 :29	Problème 2 : dans mon cahier, j'ai toujours 92 feuilles, mais cette fois-ci, je n'ai que 5 écrites. Donc, combien j'ai de pages blanches ?			
	Ind.	Recherche	P lit le problème et le simule. P circule de groupe en groupe.	Dimitri et Gabriel résolvent par la recherche du complément : 25 + 10 + 10+ 10 + 10+ 10 + 10 + 10 =95 puis 95 – 3 = 92. Bertille fait plusieurs essais, vérifie puis ajuste.
39 :41	Col.	prouver	P reprend la classe en entier : quel calcul faut-il faire ? P s'appuie sur la boite et les cubes pour montrer que 92 + 25 n'est pas possible.	Anna et Maxine : 92+25
	Ind.	Recherche	P circule à nouveau de groupe en groupe sans intervenir.	Clémence dessine. Léopold : 92 – 2=90 ; 90 – 20=70 ; 70 – 3=67.
44 :11	Col.	Vérifier / prouver	P recense les résultats (67 / 70 / 72) et retient la valeur 70 : « *Qui a fait comment pour trouver 70 ?* » P fait vérifier cette valeur puis interroge sur ce qu'il faut faire. **P conclut :** « *On est bien d'accord, on n'est pas obligés de refaire le calcul. On voit bien qu'en faisant la preuve, vous arrivez à 95. Vous en avez 3 de plus. Donc il faut les enlever, là. 70 – 3.* »	Maxine change d'opération : « *j'ai mis des moins* » et a trouvé 70. Éléonore trouve 70 : « *En fait, j'ai fait 2 – 5, et je me suis dit que ça fait 0, alors j'ai marqué 0, et après j'ai fait 9 – 2, et j'ai trouvé 7.* » Bertille énonce la preuve « *70 + 25* » Les élèves veulent reculer de 3
49 :19			*P : « rappelez-vous, quand vous trouvez une solution, comme ça, essayez systématiquement de faire la preuve, derrière, comme ça, ça vous permet, si c'est pas le bon nombre, de réajuster et de trouver la bonne réponse, parce que vous n'étiez pas loin. D'accord ?* » P fait re-fonctionner la technique sur la réponse de Samuel.	Samuel trouve 72. La vérification est faite mentalement (addition facile). Samuel ajuste en enlevant 5
52 :33			P demande à ceux qui ont trouvé du premier coup d'expliquer leur méthode. Vérification à la calculatrice de 92 – 25 et 25 + 67, puis comptage des cubes dans la boite.	Léopold : 92 – 2 = 90 puis 90 – 20 = 70 et 70 – 3 = 67 Dimitri : 25 + 10 + 10 +10+ 10 + 10 +10 + 10 – 3
			P : « *l'essentiel, […] c'est de se dire : « Oh là là, j'avais pensé 70, mais en définitive il faut que j'enlève 3 et je vais trouver 67, la bonne réponse ». Et ça voudrait dire qu'en deux fois vous avez trouvé quand même la bonne réponse.* »	
1:03:14	Bilan : « *est-ce qu'il y a des enfants aujourd'hui qui ont compris ou qui ont retenu… […] qui ont appris quelque chose qu'ils vont utiliser la prochaine fois, par exemple ?*			
	Gabin : « *ne pas toujours penser au résultat mais utiliser une méthode.* » Samuel : « *Ben moi j'ai trouvé que quand il y a un problème, si je me suis trompé, que je fasse la preuve par addition, dès que j'ai fini, et que si je me suis trompé j'essaye de recalculer et que j'y arrive.* » Léopold : « *Ben moi, j'ai compris que dans des problèmes de ce genre, j'ai 34 feuilles écrites, et autre chose, eh ben j'ai compris que c'était mieux pour… de décomposer* » Pour beaucoup d'élèves 2 – 4 = 0 **FIN DE SEANCE : 1 :08 :08**			

Tableau synoptique 19 : séance 15, site Valentine (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

- Un milieu didactique contrôlé par l'enseignante

Valentine agence le milieu didactique en tirant partie des actions des élèves. Si elle ne semble pas préméditer le choix des élèves interrogés en début de séance lors du rappel à la mémoire didactique, durant le reste de la séance, les élèves questionnés sont repérés lors de ses déplacements dans la classe pendant les temps de recherche.

- Lors de l'appel à la mémoire didactique

Valentine organise le premier milieu didactique en faisant appel à la mémoire didactique. « *Jusqu'à présent, on avance … On avance … On sait faire plein de choses quand on a un problème, d'accord ? Qu'est-ce qu'on sait faire ?* » (Val-S15-min 00 :10). Si cette manière de faire lui permet d'évaluer l'avancée des connaissances de ses élèves, elle lui permet aussi d'introduire dans le milieu didactique, par ricochet, les éléments nécessaires au déroulement de la séance, à savoir :

- la reconnaissance du problème, additif ou soustractif,
- la vérification d'un résultat en utilisant la boite ou en faisant une addition,
- l'écriture mathématique d'un calcul en utilisant les signes opératoires.

- Lors des mises en commun après les temps de recherche individuels

Valentine interroge des élèves choisis lors de ses déambulations dans la classe pour introduire au fur et à mesure les ingrédients nécessaires à l'avancée du savoir :

- Son intention étant clairement d'orienter les élèves sur un travail opératoire, elle donne la parole à Bertille et à Léopold qui déclarent respectivement « *moi, j'ai fait 34 + quelque chose …* » et « *92 – 34* » et non à Sara qui dessine. Bertille et Léopold lui permettent ainsi d'inscrire officiellement (au tableau) la soustraction et les prémisses de l'addition lacunaire dans le milieu didactique.

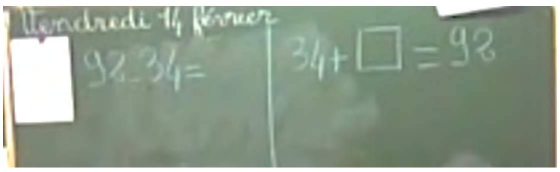


Figure 52 : transcription au tableau de deux écritures proposées par les élèves

- Elle interroge Anna, Charlotte, Éléonore pour exhiber certaines erreurs telles que 92 – 34 = 60 ou 92 – 25 = 70. Ces erreurs lui donnent alors l'occasion de demander une preuve de ces résultats puis de provoquer des ajustements.

Lorsqu'un élève lui fait défaut, elle n'hésite pas à utiliser un personnage fictif : prétendant avoir vu un élève écrire 92 + 34, elle provoque ainsi une discussion sur la reconnaissance du type de problème (additif ou soustractif) et l'opération associée au problème. Notons que si elle insiste sur la soustraction, deux élèves (Samuel et Bertille) avancent l'addition traduisant une procédure par recherche d'un complément, qu'elle ne semble pas retenir.

- Une avancée des savoirs se manifestant dans les interactions

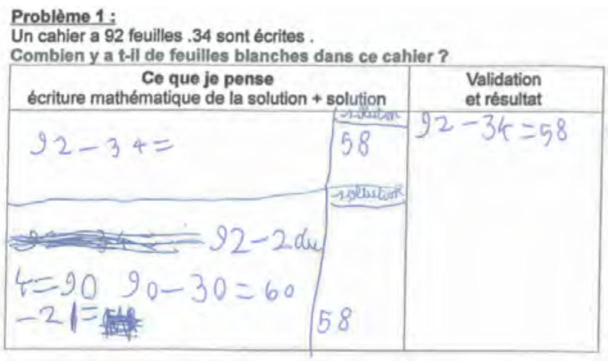
Les interactions dans la classes traduisent les avancées du savoir relatifs aux procédures de résolutions de problèmes à plusieurs niveaux :

- Les résolution empiriques à l'aide du matériel {boite ; cubes} ou d'un dessin s'effacent au profit de calculs numériques : si une dizaine d'élèves résolvent encore le premier problème avec un dessin, seulement 4 maintiennent cette procédure pour le second.

- Les procédures opératoires des élèves sont variées. Certaines font appel aux propriétés du nombre, d'autres à des propriétés des opérations. Certaines traduisent un retrait, d'autres traduisent la recherche d'un complément. Nous relevons ci-dessous les interventions de quelques élèves interrogés ainsi que, en vis-à-vis, leur trace écrite.

Léopold : « *J'avais fait 92 moins 2 du 4 égale 90. 90 – 30 égale 60.* […] *Et puis après, j'ai fait encore – 2.* » (min 26 :31)

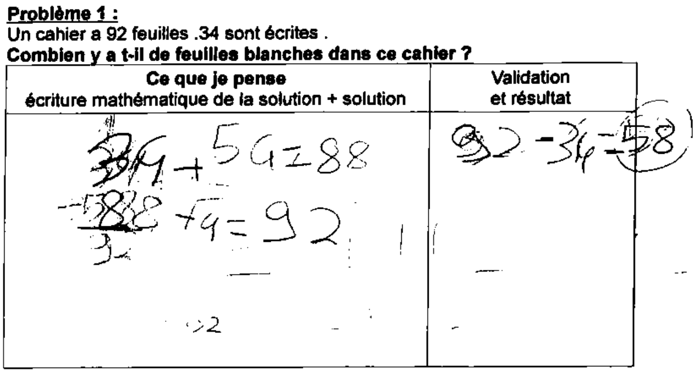
→ Utilisation des propriétés du nombre et de la soustraction : enlever 34 unités c'est enlever 2 unités, 30 unités et encore 2 unités.


Problème 1 :
Un cahier a 92 feuilles .34 sont écrites .
Combien y a t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Ce que je pense écriture mathématique de la solution + solution		Validation et résultat
92 – 34 =	solution 58	92 – 34 = 58
~~92 – 34 =~~ 92 – 2 du 4 = 90 90 – 30 = 60 –2 =	solution 58	

Bertille : *« Moi, j'avais fait 34 + 54 […] Et après, j'ai fait 88 peut-être + 4, je me suis dit + 4, ça fait 9, 10, 11, 12, et après j'ai fait 92* (min 26 :31)

→ Utilisation du répertoire (5 + 3 = 8 et 4 + 4 =8), puis ajustement par sur-comptage jusqu'à 92

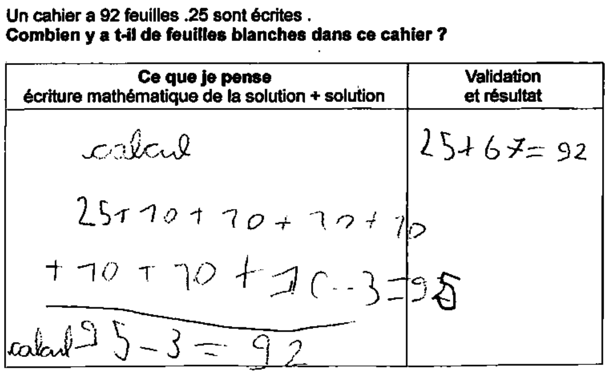


Problème 1 :
Un cahier a 92 feuilles .34 sont écrites .
Combien y a t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Ce que je pense écriture mathématique de la solution + solution	Validation et résultat
34 + 54 = 88 88 + 4 = 92	92 - 34 = 58

Gabriel : *« j'ai mis + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10, et après – 3. ».* (min 26 :31)

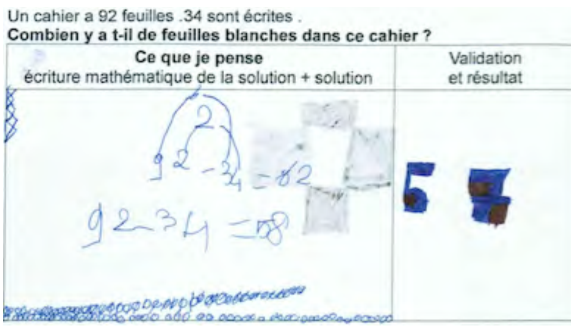
→ Sur-comptage de 10 en 10 à partir de 25 et jusqu'à 95 puis ajustement à 92 par retrait



Un cahier a 92 feuilles .25 sont écrites .
Combien y a t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Ce que je pense écriture mathématique de la solution + solution	Validation et résultat
calcul 25 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 - 3 = 95 calcul 95 - 3 = 92	25 + 67 = 92

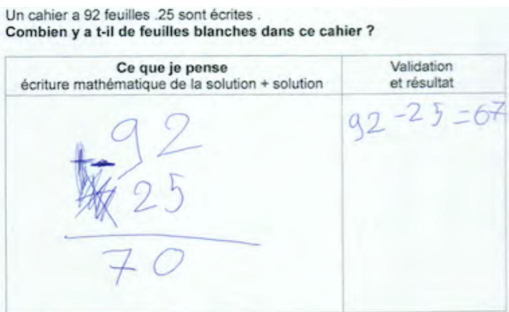
Les erreurs anticipées par l'enseignante lors de l'entretien *ante* sont bien présentes dans les productions écrites des élèves (*cf.* ci-dessous).



Un cahier a 92 feuilles .34 sont écrites .
Combien y a t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Ce que je pense écriture mathématique de la solution + solution	Validation et résultat
92 - 34 = 62 92 - 34 = 58	

Figure 53 : erreur 92 – 34 = 62



Un cahier a 92 feuilles .25 sont écrites .
Combien y a t-il de feuilles blanches dans ce cahier ?

Ce que je pense écriture mathématique de la solution + solution	Validation et résultat
92 25 70	92 - 25 = 67

Figure 54 : erreur 92 – 25 = 70

Pour autant, Valentine ne profite pas de la transcription au tableau de l'opération en colonne pour relever un traitement numérique incorrect (*cf.* page *323*, Figure 54) et la différencier de l'addition, mais pour faire vérifier par l'addition, puis pour initier les ajustements. De la même façon, lorsqu'un élève fait une erreur dans la recherche du complément, elle le laisse aller jusqu'au bout de sa procédure, pour ensuite lui demander s'il a bien vérifié son résultat. Nous comprenons que ce qui importe à l'enseignante, c'est de vérifier que tous ses élèves fassent bien la différence entre la résolution et la vérification.

C'est-à-dire de faire comprendre la différence entre résolution et vérification, comme confirmé par l'entretien post : « *il a fait tout le travail de sur-comptage, mais après il a pas fait le travail de vérification avec l'addition. Quand il m'a proposé 72, c'est moi qui l'ai renvoyé en lui demandant est-ce que ça fait bien 92 en tout ?* » (Val-S15-entr.post). L'entretien *post* nous laisse penser que l'enseignante est principalement focalisée par la vérification, qu'elle tente d'automatiser : « *par contre ce qui peut être intéressant, c'est à partir de leur réponses, elles* [les deux élèves interrogées] *aient l'automatisme de faire cette preuve qui va les amener à réajuster.* » (Val-S15-entr.post).

2.2.3.1.2. Séance 16

Cette séance est composée de deux problèmes. Le premier appartient à la catégorie e E e tandis que le second peut être considéré tant d'une transformation d'état E t₋ e que d'une combinaison d'états e E e.

Dans la continuité de la séance précédente, l'enseignante déclare que son objectif est « *d'améliorer la stratégie des essais* » (Val-S16-entr.ante) rajoutant « *Maintenant ce qu'il faut qu'ils enclenchent, c'est qu'à partir de cette preuve, on peut l'utiliser pour réajuster et pas recommencer le calcul.* ». Comme pour la séance précédente, elle anticipe que certains élèves trouveront en un coup et envisage d'évoquer le « cassage d'une dizaine » pour rendre possible le retrait des unités : « *83 – 47 tu vois, donc voir comment ils ont fait…comment ils ont réglé … pour enlever les unités … faire remarquer 83 – 7 on enlève 7 unités, on va casser une dizaine quoi en fait…* » (*Ibid.*).

Elle prévoit de circuler dans la classe afin de « *de voir quelques réponses différentes. D'en prendre des fausses pour voir comment réajuster. Est-ce qu'on est très loin du résultat, et comment faire pour réajuster, s'en rapprocher pour trouver la bonne réponse. Voilà.* » (*Ibid.*). Comme à l'accoutumée, elle distribue une fiche individuelle « *de route* » (*cf.* ci-après, Figure 56) prévoyant jusqu'à cinq essais successifs. Le synopsis ci-après décrit le déroulement temporel de la séance.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Col.		Présentation de la séance : « *aujourd'hui, on va beaucoup utiliser cette preuve par addition, Et si jamais le résultat s'avère faux, eh bien vous aurez le droit de re… de recommencer, mais en réajustant, c'est-à-dire sans automatiquement repartir à zéro. Hein ? Mais se dire : « Ah, tiens, là, j'en avais mis trop. Ah, mais de combien ? Donc je vais repartir de là, et je vais en enlever tant… ». Enfin, voilà, plutôt que de tout recommencer. D'accord ?*	
2 :05	Problème 1 : Sur le bureau il y a 83 cahiers rouges et il y a des cahiers verts. Moi, sur mon bureau, j'ai 47 cahiers rouges. Donc la question qu'on va se poser , qu'est-ce qui va se poser d'après vous ?			
	Col.		P raconte le problème, interroge sur le type de problème, le simule avec la boite et les cubes affiche au tableau la fiche de travail des élèves puis la présente : l'espace pour la réponse est découpé en 5 parties notées essai 1, essai 2 jusqu'à essai 5. Distributions des fiches.	Réponses des élèves : « les cahiers verts » Es « *de soustraction !* » E : « *parce qu'on y travaille plus* »
6 :53	Ind.	Recherche	P prépare le tableau (copie de la fiche de travail des élèves) puis circule dans les groupes. Guidage fort des groupes pour les amener à un deuxième essai. S'attarde longtemps sur le groupe {Claire, Emma, Charlotte} pour vérifier la valeur 44. Encourage Claire à tester 43 et aide Gabin à vérifier.	Les élèves ne font pas spontanément la vérification. Claire : *« j'ai trouvé, moi, j'avais trouvé 43 au début, parce que 3-7, ça fait pas… Ca fait toujours 3, puisqu'on peut pas enlever 7 »* Gabin se perd dans ce que représentent les nombres. Emma pense à ajuster « *il faut que je descende de 4* »
16 :27	Col.	Débat collectif	« *Il y a des enfants qui n'ont pas fait la preuve. Il y en a d'autres qui l'ont faite, et qui ont vu soit le résultat qui est juste, soit le résultat qui est faux, ben ils ont refait un deuxième essai. D'accord ? Qui a fait plusieurs essais ?*» Interroge Claire, Andréa et Bertille	:
18 :41			P interroge Paul (élève très en difficulté) sur l'opération en jeu dans le problème. Elle schématise le problème puis ne s'attache plus qu'à la validation du résultat de Paul. P fait calculer 45 + 47 = 92 puis vérifier 36 par Paul.	Paul ne reconnaît pas le type de problème. Il énonce une suite d'opérations que personne ne comprend. Andréa : « ***5 et 7 c'est égal 12 et avec 12 on peut pas.*** » Paul ne sait pas quel autre nombre proposer, Gabriel ajuste : « une dizaine de moins », la classe propose 36
30 :47			Demande à plusieurs élèves d'expliquer les essais qu'ils ont faits et de les justifier. P : « *est ce que Éléonore aurait pu le trouver en deux coups ?* » P prend appui sur la production de Clémence : « *elle a utilisé le dessin en premier, mais après, elle s'est dit : « J'en ai plus besoin. Je vais pas recommencer tout à zéro. Je vais repartir de mon résultat ». Voilà. Ça s'appelle ajuster.* »	Éléonore : 1er essai 40 ; 2nd essai : 35 ; « je me suis dit ça doit être un de plus » Samuel : « Elle est à 87, ben elle a qu'à aller à 83, […] combien de nombres, l'écart, compter l'écart » Emma : 1er essai 40 ; « Donc après, je savais que 4+3, ça faisait 7, donc j'ai reculé de 3, et j'ai trouvé 36. Enfin, de 4, pardon. » Léopold : 83 – 40 =43 et 43 – 7 = 36 et après j'ai fait la preuve. Clémence a dessiné et a trouvé 30, puis 33 puis 36.
41 :10			P prend la boite, l'ouvre : « *A l'intérieur, j'ai bien 36 cubes. Si je mets tout ensemble, je retombe à combien ?* »	Es : 83 !
42 :09	Problème 2 : J'ai 49 cubes bleus dans le plateau. Dans la boîte il y a des cubes rouges. Je prends les cubes bleus qui sont dans le plateau et je les mets dans la boite avec les rouges. Je compte tous les cubes dans la boîte. Il y en a 87. Donc qu'est-ce que je vais rechercher ?			
	Col.		P lit et simule le problème, puis pose la question : « *Est-ce qu'on est bien sur un problème, le même type de problème de tout à l'heure ?* »	Réponses des élèves : « les cubes rouges »Un élève fait le lien avec le 1er problème, le rangeant dans la catégorie des problèmes soustractifs.
44 :07	Ind.	Résoudre	P circule dans les groupes et pousse fortement pour la vérification jusqu'à dire l'opération : A Clémence : « *ben tu fais ta preuve. Donc 49 + 40. D'accord ?* » A Timothée : « *Alors tu fais ta preuve. 38 + 49.* » Circulation de l'enseignante : Claire (G1) → Clémence (G4) → Timothée (G8) → Maxine (G8) → Emma / Claire / Charlotte (G1) → Andréa (G9) → Gabriel / Bertille (G7) → Paul (G6) → Rémi (G10) → Paul (G6) → Zoé (G5) → Clémence (G4) → Sarah/Éléonore (G2)	Sarah ne reconnaît pas un problème soustractif et additionne 49 et 87. Claire écrit 49 – 87 Les élèves deviennent de plus en plus agités…
55 :25	Col.	Débat collectif	P reprend trois élèves qui se sont amusés : Maxime, Adèle et Enzo puis tente de s'appuyer sur la réponse d'Enzo (86) puis de Rémi (3 essais), puis de Paul (5 essais) pour conforter la technique de résolution par essais, enfin de Léa qui a fait comme Rémi.	Andréa : « *si on fait 86 +49, c'est beaucoup trop grand …* » Léa : « *le nombre est beaucoup trop grand …* » Rémi refait à chaque fois l'opération et n'ajuste que pour le dernier. Paul ne sait plus quels nombres additionner.
1 :12 :24			« *Qui a fait du premier essai ?* » P rebondit pour expliquer la technique. P à ceux qui recherche le complément : « *Puisque vous êtes déjà sur une addition. Donc là, il y a pas tellement de preuve.* »	Samuel explique qu'il fait une recherche du complément : « *je fais tout le temps avec 49 plus…je rajoute et j'enlève pas, moi* »
			Annonce la séance suivante : « *la prochaine fois, nous apprendrons à Éléonore ou d'autres enfants, eh bien, peut-être, d'arriver en un coup, ou deux coups. Il faudra réajuster. D'accord ?* »	
1 :16 :10	**- Fin de la séance -**			

Tableau synoptique 20 : séance 16, site Valentine (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Se dégagent de cette séance quelques éléments corroborant nos précédentes interprétations :

- Une relation didactique reposant sur un contrat d'ostension assumé.

Comme pour les autres séances, l'enseignante laisse aux élèves un temps de recherche, puis organise le débat collectif. Par contre, contrairement aux séances précédentes, elle intervient fortement lors du temps de recherche des élèves. Ainsi, circulant de groupe en groupe (*Cf.* Figure 55 ci-contre), elle accompagne la recherche des élèves.

Durant les premières minutes de la séance, elle formule à dix reprises « *Tu fais ta preuve, à côté. Voilà* ». Plusieurs interprétations sont possibles :

- L'enseignante cherche à inciter les élèves « *qui n'ont peut-être pas encore intégré, installé le moyen de preuve* » à prouver leur réponse,
- L'enseignante cherche à « enclencher » les essais. A plusieurs reprises, elle accompagne ses propos d'un « *c'est trop ou pas assez ?* » ou de « *tu recommences dessous, encore* »,
- L'enseignante cherche à aider les élèves par rapport à l'organisation spatiale de la recherche sur la feuille. « tu fais ta preuve … à côté, voilà »

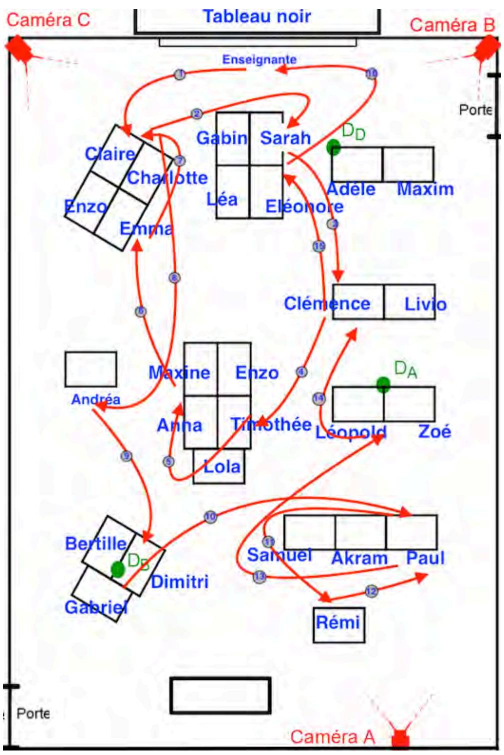


Figure 55 : circulation de l'enseignante lors de la recherche du second problème

- Un appui systématique sur des élèves chronogènes

Lors du travail collectif, l'enseignante s'appuie sur les élèves dont les actions sont en adéquation avec ce qu'elle souhaite obtenir. Ainsi, lors du premier problème, elle interroge Paul, puis Éléonore, deux élèves qu'elle a repérés lors de la recherche individuelle.

- Paul, élève en difficulté, lui donne l'occasion de rappeler comment tester un résultat, et de savoir si celui-ci est correct, trop grand ou trop petit.
- Éléonore, élève d'un bon niveau, lui permet de faire émerger la démarche d'ajustement : elle avance une réponse trop grand, puis ajuste en deux coups (en enlevant une dizaine, puis en ajoutant une unité). Les explications d'Éléonore font réagir un autre élève, Dimitri, qui avance l'idée « d'écart entre la première réponse et la réponse visée » pour obtenir la solution.

Pour le second problème, l'enseignante procède de la même façon. Elle interroge d'abord un élève ayant une réponse aberrante, ce qui lui permet de montrer à nouveau comment vérifier puis un élève ayant obtenu une réponse par deux ajustements.

- Une avancée du savoir guidée par des préoccupations liées à la résolution

L'enseignante mentionne en entretien *ante* « *la proportion des enfants qui n'ont peut-être pas encore intégré, installé le moyen de preuve* », déclarant alors que « *ça va être aussi l'occasion peut-être de rajouter, … de les convaincre de les inciter à l'utiliser.* » Nous remarquons que si l'enseignante est très attentive à ce que l'addition « *comme moyen de preuve* » devienne un outil de résolution, elle s'assure que les élèves y mettent du sens. Ainsi, simulant la vérification en réunissant les deux sous-collections, elle questionne « *À l'intérieur, j'ai bien 36 cubes. Si je mets tout ensemble, je retombe à combien ?* »

Plusieurs réactions d'élèves nous permettent de repérer une avancée du savoir relativement à la preuve d'un résultat, à la résolution par soustraction ou à la résolution par ajustement.

– Relativement à la preuve :

- Éléonore se rend compte que sa réponse est trop grande après avoir effectué l'addition : « j'ai fait 40 + 47, et ça faisait 87. Alors après, je m'ai dit que c'était un nombre plus petit qu'il fallait choisir » (min30 :47).
- Andréa n'effectue pas l'addition 45 + 47, se contentant de raisonner sur les unités : « *5 + 7, c'est égal à 12 et avec 12 on peut pas* » (min18 :41).

– Relativement aux procédures soustractives de résolution :

- Léopold : « je suis parti de 83 – 47. 83 – 40 = 43 et 43 – 7 =36 et après j'ai fait la preuve » (min30 :47).
- Samuel : « Moi, je fais tout le temps avec 49 plus, je rajoute et j'enlève pas moi. » (1h12 :24)

– Relativement à l’ajustement :

- Emma corrige sa réponse en ajustant les unités : « *il faut que je descende de 4* [unités] » (min 6 :53)
- Gabriel ajuste le nombre de dizaines : « *Déjà,* [il faut] *une dizaine de moins* » (min 18 :41)
- Dimitri ajuste en recherchant l’écart : « elle est à 87, ben elle a qu’à aller jusqu’à 83, et faire de 40 jusqu’à … combien de nombres… l’écart, compter l’écart » (min30 :47).

Ces trois derniers élèves montrent qu’ils obtiennent la solution en effectuant une translation de la différence entre les deux résultats totaux : Dimitri calcule la différence entre 87 et 83, différence qu’il translate ensuite au nombre 40. Or, nous observons que Valentine ne prend pas appui sur leurs actions pour développer la méthode de la fausse position[86] : elle n’interagit pas pour inciter les élèves à résoudre par une méthode réfléchie d’essais successifs.

– Relativement à la recherche d’un algorithme de la soustraction

La figure ci-après montre deux procédures d’une même élève, procédures que nous avons observées à plusieurs reprises. Nous nous appuyons sur cette trace écrite pour montrer un savoir en construction.

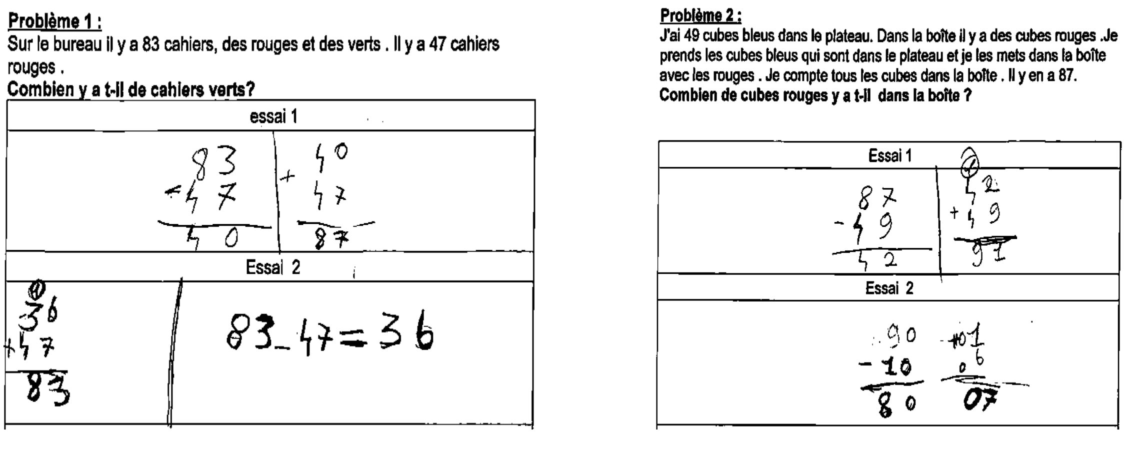


Figure 56 : extraits de la recherche d’un algorithme de la soustraction posée

Si le premier problème est résolu par la méthode de la fausse position[86] (le premier essai est 40 puis un ajustement amène à la solution 36), la trace écrite du deuxième problème montre que l'élève tente d'effectuer une soustraction selon le même algorithme que l'addition. Il raisonne sur les dizaines (diz) et les unités (u) en opérant en colonne : 8 diz – 4 diz = 4 diz et 7u – 9u n'étant pas possible, il effectue 9u – 7u. Nous considérons ici que l'élève est à la recherche d'un algorithme de la soustraction. Même si cette recherche n'aboutit pas, elle participe de la chronogenèse du savoir visé par l'ingénierie didactique, c'est-à-dire de la construction d'un algorithme de la soustraction. Notons que s'il sait ajuster dans le premier cas (l'écart entre 83 et 87 étant de 4, il recule de 4 à partir de 40), il ne réussit pas dans le second cas. Nous faisons l'hypothèse que le saut à la dizaine inférieure pour reculer de 91 à 87 a été une difficulté.

Nous observons donc ici, contrairement à l'étape 2, une séance fidèle au texte de l'ingénierie didactique : les élèves s'appuient sur l'addition pour éprouver leurs résultats. Bien que certaines interactions auraient pu donner l'occasion d'aborder la méthode de la fausse position, Valentine n'en a volontairement pas tiré parti, montrant ainsi sa volonté de rester proche de l'ingénierie didactique : « *Je trouve qu'il y a eu de belles choses, les enfants ont adhéré à la façon de faire ces essais. Ils ont bien compris comment on faisait. Alors est-ce qu'ils ont compris comment réajuster le plus vite possible ? Ce sera l'objet de la leçon 11.* » (Val-S16-entr.post). De même, si elle pointe bien les erreurs des élèves, elle réserve leur traitement à l'étape suivante : « *Après tu as des filles qui continuent à te poser la soustraction […] qui n'arrivent pas à trouver le chiffre des unités, […] Donc les Schtroumpfs ça va être porteur…c'est super.* » (*Ibid.*). En précisant « *ce qui est intéressant, c'est qu'ils ont tous utilisé la preuve. Même Paul* » (*Ibid.*), l'enseignante dévoile son intention didactique : donner du sens à la preuve, en lui donnant le statut d'outil pour résoudre. En ce sens, on peut dire qu'elle demeure au plus près de l'ingénierie didactique : « *certains élèves n'imaginent pas que des essais peuvent amener à la solution* » (Berté, 1996, p. 34)

2.2.3.1.3. Séance 17

Rappelons que cette leçon dans l'ingénierie didactique est composée de trois problèmes, les deux premiers de type e t– E et le troisième de la catégorie e E e[87]. Il s'agit « d'apprendre à réduire le nombres d'essais » (Berté, 1996, p.35). La structure de ces problèmes est, dans la littérature scientifique, relevée comme étant celle posant le moins de

[86] La méthode de la fausse position consiste à proposer une solution approchée puis à la corriger en tenant compte de l'écart constaté entre le rendu et l'attendu.

[87] e t- E : recherche de l'état final dans une transformation d'état négative
e E e : recherche d'une des parties connaissant une partie et le tout

difficultés au élèves (*cf.* 2.2.1.1.2 du chapitre 1 de la partie 1). Il s'agit moins de se focaliser sur le résultat que sur le sens d'un algorithme de l'opération « soustraction ».

Le premier objectif déclaré par l'enseignante lors de l'entretien *ante* est de « *tester les réponses, et voir ce qui va pas de suite, surtout au niveau des unités. Je pense que le travail d'aujourd'hui ça va être vraiment de travailler ce problème d'unité. Il n'y a pas assez d'unités, comment on fait pour casser les dizaines ?* ». Exemplifiant son propos sur le calcul de 94 – 29, calcul pour lequel elle prévoit le résultat 70, elle poursuit par « *faire comprendre aux enfants quel est le nombre qu'on peut proposer pour qu'il y ait les quatre unités quoi..* ». Enfin un deuxième objectif est énoncé : vérifier « *avec le matériel pour voir comment on fait, qu'est-ce qu'on casse, quand on n'a pas assez d'unités.* » (Val-S17-entr.ante). Ces propos nous laissent penser qu'en arrière-plan, l'intention didactique de l'enseignante est d'orienter les élèves sur le sens d'une technique opératoire experte.

Comme pour les autres séances, le synopsis est en page suivante.

Contrairement à la séance précédente, lors de la recherche individuelle, l'enseignante circule dans la classe mais n'intervient pas, se contentant d'observer. Pour autant, sa position topogénétique se fait sentir dans le choix des éléments qu'elle retient dans le milieu didactique.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
00 :00		écouter	Appel à la mémoire didactique puis présentation de la séance : « *on avait proposé des problèmes de soustraction et on avait eu le droit de faire plusieurs essais* […] *Donc aujourd'hui, on va apprendre à faire le moins possible d'essais c'est-à-dire qu'en un ou deux essais, il faudrait avoir trouvé…* »	
01 :36	Problème 1 : j'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Col.	Écouter	Le problème est affiché sur les deux tableaux de la classe. P lit le problème.	Gabin : « *Moi, ce que je sais, c'est que c'est des moins* »
02 :46	Ind.	Recherche	P circule de groupe en groupe sans intervenir.	Les élèves cherchent la réponse sur ardoise.
06 :29	Col.	Débat collectif	P relève quelques réponses au tableau : 65 ; **70** ; 54 ; **75** et rajoute 95 qu'elle dit « *avoir vu* »… (ne relève pas 63, 73 et 64)	Étonnement des élèves quant au 95. Léa et Gabin : le résultat doit être plus petit que 94. Dimitri : on enlève, on n'ajoute pas
10 :01			P cherche écarter certaines valeurs en faisant discuter sur le nombre de dizaines des résultats proposés. Et relance par « *c'est peut-être une réponse qui est proche de 6 dizaines, ou 7 dizaines, on sait pas.* »	Anna : « *54, on peut aussi l'enlever // Il est beaucoup trop petit.* » Gabriel : « *On n'a pas enlevé 20 mais on a enlevé 30* »
12 :23			P choisit de faire vérifier la valeur 70 par Emma, reformule la remarque de Andréa « *C'est pas la peine d'aller plus loin, de tout faire, c'est même pas la peine de calculer ça, parce que déjà, Emma, quand elle fait 9 plus 0, elle trouve 9.* »	Andréa : « *Déjà, on sait que ce n'est pas ça parce que déjà, il y a 4 pour les unités,* […] *Pour la preuve, il y a 9, et pour quatre-vingt-quatorze, il y a 4.* »
15 :06			P demande de trouver la solution parmi les réponses au tableau. P évite de s'appesantir sur la remarque de Rémi et lui demande de prouver son résultat (65). « *Est-ce que, déjà, au niveau des unités, on est bon ?* […] *est ce qu'on arrive au résultat du tout ?* »	Les élèves sont partagés entre 65 et 75. Rémi commence à évoquer l'algorithme de soustraction : « *quand on n'a pas assez d'unités, on doit prendre une dizaine* »
20 :47			P simule l'algorithme de la soustraction avec le matériel {boite-cubes} *: « est-ce que je peux les enlever, ces neuf-là ?* […] *On a cassé la dizaine. Voilà. Donc c'est pour ça qu'il ne peut pas y avoir 7 dizaines. Il doit y en avoir une en moins.* »	
22 :33	Problème 2 : j'ai 94 cubes dans la boîte. Le même nombre. Cette fois-ci, j'en enlève 17. Combien de cubes me reste-t-il ?			
	Col./Ind.		P lit le problème puis circule dans les groupes sans intervenir	Presque tous les élèves posent la soustraction en colonne.
26 :26	Col.	Débat collectif	P récolte les réponses des élèves : **80** / **83** / **77** / **73** / 67 / 81 / 52 /	Beaucoup d'élèves trouvent 83, quelques-uns 80
28 :24			Tri des réponses : *« est-ce qu'il y a des réponses qui peuvent paraître étonnantes ?* »	Zoé : « *52, parce que on enlève que une dizaine* ».
30 :26			P choisit les valeurs à faire vérifier (**83**) et fait énoncer par les élèves l'addition pour prouver. Elle demande à Charlotte de vérifier mais l'arrête aux unités. Discussion : est-ce possible ? que faudrait-il ? P fait chercher le chiffre « *que l'on va trouver sous le 7* [pour obtenir un "4"] »	Beaucoup d'élèves ont vérifié mentalement avant même que Charlotte pose l'addition. Certains élèves se remettent à compter sur leurs doigts. Les élèves concluent que 7 doit être le chiffre des unités de la réponse.
36 :25			P entoure au tableau le nombre 77 et fait vérifier la valeur 77 par Akram.	Dimitri : « *non, parce que 7 + 7 ça fait 14* »
40 :22			**Conclusion :** « *j'ai un nombre d'unités, mais j'ai pas assez pour, pour enlever. C'est ça, le problème. D'accord ? Et tout à l'heure, on l'a vu. On l'a mimé, avec les cubes. Quand on n'a pas assez d'unités, c'est Rémi qui nous l'a dit, il faut prendre une dizaine.* »	
42 :34	Problème 3 : dans un troupeau, il y a 43 moutons, des noirs et des blancs. Il y a 17 moutons noirs. Combien y a-t-il de moutons blancs ?			
	Col.		P lit le problème. Schématisation du problème puis distribution du problème sur feuille « *vous avez droit à deux essais. Donc, je trouve une réponse, je vais faire la preuve par addition, et si ça marche pas, hé bien je vais faire un deuxième essais pour y arriver* »	Plusieurs élèves expriment leur désarroi : ils ne reconnaissent pas le type de problèmes : Léa, Andréa, d'autres … Flottement dans la classe
46 :51	Ind.	Résoudre	P prépare le matériel {boite-cubes} puis circule de groupe en groupe	Les élèves cherchent. Deux élèves ont dessiné.
58 :19	Col.	Débat collectif	P écrit au tableau les réponses qu'elle a recueilli dans son tour de classe : 60 ; **34** ; 29 ; 26 ; 77 « Quelle sont les réponses qui ne sont pas possibles ? » P demande à Timothée de prouver son résultat,	Akram : « 60 parce qu'on a 43 moutons » Livio : « 77, c'est trop » Léopold interrompt Timothée dès que la somme des unités est faite.
1:06:05			P interrompt Maxine lorsqu'elle a fini d'additionner les unités : « *Alors, est-ce que déjà, tu penses que du côté des unités, t'es bonne ? Est-ce que déjà, c'est un nombre qui va finir par 6 ? Oui, parce que 6+7, ça fait bien 13. Donc là, on est sûr que notre nombre, il va finir par 6.* »	Les élèves proposent 26. Maxine va au tableau et pose l'addition en colonne
1:08:16			P revient sur les difficultés de certains élèves : Claire « *a proposé la moitié. 30. Elle a fait la preuve. Donc elle a fait 17+30=47 qui pourrait lui dire comment elle pourrait faire pour trouver en trois coups plutôt que quatre ou cinq ?* » P introduit le terme d'écart entre deux nombres : « reculer de l'écart » ou « avancer de l'écart »	Gabin explique qu'il faut compter de combien on recule à partir de 47 pour arriver à 43. 1er essai de Léa 23, or 17 + 23 =40 donc elle a rajouté 3 à 23. 1er essai de Maxine 36, or 36 + 17 = 53 donc elle a enlevé une dizaine
1:16:03			*P: « Les prochaines leçons, on va essayer de voir ce problème d'unités, quand il n'y* [en] *a pas assez* »	
1:16:19	Fin de la séance			

Tableau synoptique 21 : séance 17, site Valentine (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

- Une mobilisation des niveaux de preuve

Nous observons que si les élèves introduisent plusieurs ingrédients dans le milieu didactique (20 :47, 42 :34, 1 :08 :16), l'enseignante en élague certains, de façon à maintenir le cap de ses intentions : il s'agit pour elle de faire appel aux savoirs construits précédemment mais aussi de faire basculer les interactions entre élèves vers un débat sur les techniques opératoires relatives à la soustraction. Aussi, pour les deux premiers problèmes, l'enseignante choisit elle-même les réponses des élèves à discuter (en les reportant au tableau). Pour le premier problème, dont la solution se traduit par l'écriture 94 – 29, elle ne retient des élèves que les réponses 65, 70, 54, 75, ignorant les propositions 63, 73 et 74. Par contre, elle introduit de son propre chef une réponse, 95, « *pour justement pour montrer que ce n'était pas possible* » (Val-S17-entr.post). Pour le second problème (dont la solution se traduit par 94 – 17), elle retient les réponses 80, 83, 77, 73, 67 et 52, écartant 81. Ses choix permettent de faire fonctionner le premier niveau de preuve (NP1[88]), mais aussi d'officialiser un nouveau niveau de preuve (NP5[89]) qui était apparu à la séance précédente : « *C'est pas la peine d'aller plus loin, de tout faire, c'est même pas la peine de calculer ça, parce que déjà, Emma, quand elle fait 9 plus 0, elle trouve 9.* [or, le chiffre des unités de 94 est 4] ». Par ailleurs, la nécessité de « *prendre une dizaine pour avoir assez d'unités* » pour pouvoir effectuer l'opération 94 – 29 est amenée par Rémi. L'enseignante relève cette intervention mais paradoxalement au regard de l'entretien *ante*, ne l'utilise pas pour initier l'algorithme de la soustraction par cassage de la dizaine mais seulement pour invalider la réponse 70, en simulant le problème avec la boite et les cubes : « *on a cassé la dizaine. Voilà. Donc c'est pour ça qu'il ne peut pas y avoir 7 dizaines* ».

En resserrant ainsi le milieu didactique, l'enseignante tient les objectifs énoncés en entretien *ante :* travailler sur les dizaines pour montrer que $94 - 29 \neq 70$ et $94 - 17 \neq 80$. Notons toutefois qu'elle ne pointe pas l'erreur « Zero Instead of Borrow » (Resnick., 1982)

- Une avancée du savoir pilotée par la recherche d'un algorithme de la soustraction.

Les interactions permettent de repérer une avancée chronogénétique du savoir relatif à l'algorithme de la soustraction.

[88] NP1 : La différence doit être inférieure au premier terme de la soustraction. (si le résultat est supérieur au premier terme de la soustraction, alors la réponse proposée ne peut être solution).

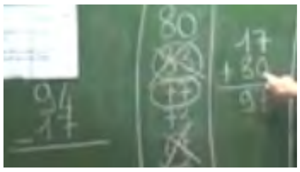
[89] NP5 : Le chiffre des unités de la somme doit être égal au chiffre des unités du tout.

– Pour la première fois, les élèves arrondissent à la dizaine près le nombre de cubes à enlever. Lors de la résolution du premier problème, Gabriel, par exemple, arrondit le nombre de cubes enlevés à 30, ce qui lui permet d'écarter 54 des solutions envisageables (min 10 :01). Néanmoins, ce niveau de preuve, que nous désignons par NP3, reste fugace et n'est pas repris dans la séance.

– Lors de la résolution du premier problème, Andréa interrompt la procédure de vérification de la valeur 70, dès le calcul à l'ordre des unités effectué : « *déjà on sait que c'est pas ça.* […] *on sait que ce n'est pas ça parce que déjà, il y a 4 pour les unités,* […] *Pour la preuve, il y a 9, et pour quatre-vingt-quatorze, il y a 4* » (min 12 :23). Cette technique permettant d'invalider une réponse est officialisée puis reprise lors de la résolution des deux autres problèmes. Nous appelons NP5 ce niveau de preuve (effectuer l'addition à l'ordre des unités et invalider si le chiffre des unités obtenu ne correspond pas au chiffre des unités du tout).

– Comme le précise l'ingénierie, le niveau de preuve NP2 est mobilisé dans la résolution du deuxième problème (min 41 :16) ce qui permet d'initier la méthode de la fausse position.

P : Et donc quand tu vas réajuster, donc ***quand tu vas faire ton deuxième essai, eh bien tu vas te dire : « Mince, moi, en bas, je dois trouver 4 ». Alors, comment vous faites, là, pour trouver 4 ? Qu'est-ce que vous, vous faites dans votre tête ?***
Es : 7+7, 7+7, ça fait 14



Extrait 62 : Valentine – séance 17 – focus sur un algorithme opératoire

– Toutefois, Valentine se démarque de l'ingénierie en arrêtant l'apprentissage de cette technique au traitement des unités. Nous interprétons cet écart à l'ingénierie comme une réponse à une préoccupation énoncée lors de l'entretien post de la séance précédente : « *tu as des filles qui continuent à te poser la soustraction* […] *qui n'arrivent pas à trouver le chiffre des unités.* » (Val-S16-entr.post).

– Le matériel {boite, cubes} est quant à lui utilisé pour initier l'algorithme de la soustraction. Dans un premier temps, il permet pour répondre à l'erreur de calcul 94 – 29 = 70 ou 94 – 29 = 75 : « *On a cassé la dizaine. Voilà. Donc c'est pour ça qu'il ne peut pas y avoir 7 dizaines. Il doit y en avoir une en moins.* » (min 20 :47). Dans un second temps, il permet une première approche de l'algorithme de la soustraction par conversion d'une dizaine en unité : *« j'ai un nombre d'unités, mais j'ai pas assez pour, pour enlever. C'est ça, le problème […] Quand on n'a pas assez d'unités, c'est Rémi qui nous l'a dit, il faut prendre une dizaine »* (min 40 :22)

– Nous observons par ailleurs la production d'un théorème en acte (au sens de Vergnaud, 1990) par un élève, que l'enseignante ne repère pas.

– Pour effectuer 94 – 29, certains élèves commencent par effectuer un calcul sur les dizaines, puis un calcul sur les unités. Calquant leur procédure sur l'addition, ils soustraient 2 à 9, puis permutent les chiffres des unités de façon à rendre calcul possible (min 6 :29. Le fait que le chiffre des unités du résultat de l'opération 94 – 29 soit aussi un 5 n'alerte pas l'enseignante sur le problème des unités. Aussi, focalisée par le problème des dizaines, elle conclut la résolution du premier problème par « *est-ce que je peux les enlever, ces neuf-là ?* […] *On a cassé la dizaine. Voilà. Donc c'est pour ça qu'il ne peut pas y avoir 7 dizaines. Il doit y en avoir une en moins* ». Cette conclusion, amène alors quelques élèves à adapter leur technique : ils continuent à permuter les chiffres des unités, mais en enlèvent une dizaine de plus au résultat. Nous interprétons la réponse 73 au problème 2 (min 26 :26) comme une mise en œuvre de cette technique. L'invalidation de 83 remet en cause cette technique qui n'apparaît alors plus lors de la résolution du dernier problème.

– Enfin, un dernier indice montre une progression dans les techniques opératoires des élèves : alors que Valentine pousse vers un algorithme de la soustraction, les élèves introduisent la méthode de la fausse position. Celle-ci prend un statut officiel en fin de séance :

« Donc tu vois, on peut déjà comparer le résultat que tu trouves en faisant la preuve à mon troupeau de moutons. Et comme il n'y a pas beaucoup d'écart, tu te dis : « Eh bien, si j'en ai trop, je vais les enlever » »

Extrait 63 : Valentine – Séance 17 – Problème 3

–

L'ensemble de ces constats nous amène à interpréter les actions de Valentine comme le pilotage de l'avancée chronogénétique par la compréhension d'un algorithme de soustraction. Elle a cherché à répondre, dans un premier temps, aux élèves effectuant un traitement incorrect au niveau du chiffre des unités, et dans un second temps, à ceux faisant une erreur au niveau du chiffre des dizaines. Ce faisant, elle s'est démarqué de l'ingénierie didactique qui orientait la résolution opératoire vers la méthode de la fausse position.

2.2.3.1.4. Séance 18

Il s'agit d'une séance supplémentaire eu-égard à l'ingénierie didactique. L'enseignante intercale cette séance avant d'aborder la cinquième étape, en la justifiant par « *un besoin d'un peu soutien pour certains élèves* » (Val-S17-entr.post). Valentine a partagé la classe en deux groupes.

Le premier groupe travaille en autonomie sur une fiche intitulée « contrôle de connaissance des acquis ». Cette fiche est composée d'une partie « calcul mental » et d'une partie « problèmes à résoudre ». Les calculs mentaux proviennent de l'ingénierie didactique (p.37) augmentés de calculs relevant des catégories travaillées dans l'étape 3 « calcul mental pour soustractions techniquement faciles » (Berté, 1996, p. 20) : pour exemples, 34 – 4 , 61 – 4, 46 – 36, 47 – 23 ou encore 135 – 35. Les deux « problèmes à résoudre » relèvent aussi de l'ingénierie :

- « J'ai 92 cubes dans la boite. J'en enlève 35. Combien de cubes reste-t-il ? »
- le second problème est celui indiqué comme « contrôle individuel » dans l'ingénierie : « Pierre a 35 billes et jean 65 billes. Jean dit à Pierre : J'ai 25 billes de plus que toi. Jean a-t-il raison ? »

Le second groupe travaille avec Valentine sur trois problèmes de structures identiques au problème de la séance précédente. Les trois relèvent de la catégorie e t– E. Il s'agit pour chacun de calculer un reste connaissant la quantité initiale de cubes et la valeur de la transformation négative. Les trois problèmes sont sur le modèle « J'ai x cubes, j'en enlève y, combien en reste t-il ? » Le choix de problèmes appartenant à une catégorie reconnue comme étant facile à résoudre, d'un vocabulaire simple « j'ai », « j'enlève », « reste » ainsi que des variables numériques susceptibles de générer des ajustements est un indice que l'enseignante reste dans la logique de l'ingénierie didactique : travailler la résolution par essais successifs. Notre analyse porte sur la séance menée par l'enseignante avec ce groupe d'élèves.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Col.		Présentation de la séance : « *On va reprendre la séance de la dernière fois, parce que je veux vraiment que vous compreniez bien ;* […] *On va reprendre presque le même séance que la dernière fois, si ce n'est que j'ai changé les nombres.*»	
01 :51	Problème 1 : J'ai 85 cubes dans ma boîte. J'enlève 28. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Col.		P : « *On ferait quoi comme opération ?* »	Gabin lit l'énoncé. La plupart des élèves propose l'opération soustraction
	Ind.		P demande d'effectuer le calcul 85 -28	Réactions des élèves : facile !
06 :16	Col.		P collecte les réponses des élèves : 53 / 63 / 60 / 83 P interroge Enzo sur le nombre 28 : décomposition dizaines et unités. La valeur 83 est écartée	Exclamations des élèves pour 63 et « *impossible* » pour 83. Andréa invalide 83 en déclarant que « 85 – 2 = 83 ; [or] c'était moins 28 pas moins 2. »
09 :24			P commente ce qu'écrit Emma : « *la preuve par addition, là, pour vérifier, on utilise, là, le contraire. On utilise l'addition. Elle prend le nombre qu'elle a trouvé, plus le nombre qu'on enlève. Et en principe, on doit trouver quoi ?* »	Emma propose 60 comme solution et dit avoir fait la preuve . Elle va au tableau pour « *rappeler à tout le monde ce qu'est la preuve par addition* ».
12 :03			P : « ***Est-ce que ça va être plus que 60, ou moins que 60 ?*** »	Andréas : « *Ah, ben déjà, on sait que c'est pas bon.* » Claire : « *Parce qu'il fallait un 5 dans les unités.* »
15 :01			*P «Est-ce qu'on est bien d'accord ? Si je trouve un nombre plus grand que 60, on va trouver un nombre encore plus grand en bas.»*	Claire : « *ça fait encore plus* » Les élèves sont partagés entre « *encore plus* » ou « *moins* ». Les élèves changent d'avis juste au ton de l'enseignante.
15 :40			*« On vient de remarquer qu'avec 53, ça faisait 81. Alors, maintenant, le nombre que l'on a choisi, est-ce qu'il est assez… ? Il est trop petit, ou trop grand ? […] donc il faut que je trouve un nombre entre 53 et … ? »* P demande de tester 57. P incite et aide Charlotte à raconter ses différents essais.	Les élèves testent la réponse 53 : « c'est trop petit » Les élèves testent 57 Charlotte « *J'ai trouvé 53, j'ai fait la preuve par addition.* […] *Et je me suis dit que ça serait plus. J'ai rajouté euh… J'ai rajouté 7, et ça m'a fait 57, et j'ai trouvé 85* »
21 :28	Problème 2 : J'ai 90 cubes dans la boîte. J'en enlève 45. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Col.		P à Enzo : « *qu'est-ce que tu fais comme opération quand tu fais ce problème ?* »	Enzo ne reconnaît pas un problème soustractif.
22 :25	Ind.		P circule dans les groupes	Les élèves effectuent l'opération.
25 :37			Recension des réponses : 50 / 55 / 75 / 45 / 35 / 65 puis écart des valeurs trop grandes : 50, 55, 65, 75.	Emma et Anna ont testé 55 puis 50 mais déclarent que ce n'est pas bon. Enzo a trouvé 75 Claire écarte 50 parce que 50 + 45 = 95
29 :39			Discussion sur les deux valeurs restantes : 45 et 35. P demande à Enzo de vérifier 35. « *Alors, déjà, est ce que le chiffre que l'on cherche se termine par 5 ?* […] ***Est-ce que le nombre* [35] *est trop petit ou trop grand ?*** » P fait vérifier 45 par Livio	Andréas clame depuis longtemps que c'est 45 « j'ai fait la preuve !» Enzo effectue l'addition et trouve 80. Plusieurs élèves proposent 45 par ajustement du chiffre de dizaines : Claire : « *il faut mettre un 4* »
34 :39			P s'appuie sur l'addition d'Emma pour faire discuter sur le chiffre des unités puis des dizaines du nombre solution. : « *Le chiffre que tu cherches, il doit se terminer par 5. Parce que regarde, 5+5, ça fait 10.* […] *Par contre, est-ce que c'est celui-là qui est trop grand ?* […] *Si j'en mets 5, je vais trouver 10. Alors, qu'est-ce qu'il faut que je mette pour trouver 9 ?* »	Emma ne comprend pas son erreur dans ses calculs et demande à vérifier 55. Elle effectue l'addition au tableau mais oubli la retenue.
36 :36			P : « *hé je suis obligée de casser une barre de 10.* […]*Donc on sait que le nombre que je cherche, il va plus me rester 5 dizaines, il va m'en rester 4. Donc je sais à peu près que le nombre que je cherche, il en reste 4 parce que je suis obligée de casser des dizaines.* »	Sarah simule l'opération « 90 – 45 » avec la boite et les cubes
38 :03	Problème 3 : J'ai 73 cubes dans la boîte. J'en enlève 25. Combien reste-t-il de cubes maintenant ?			
			Lecture du problème. P circule dans la classe	Recherche du problème sur feuille individuelle
41 :50	Ind.		P aide individuellement les élèves : Livio / EnzoL / Gabin / Éléonore / Claire / Emma / Claire / Gabin . « ***le nombre auquel tu penses, il est trop petit ou trop grand ?*** »	Lola et Livio font une addition. Les élèves sont très agités.
52 :58	Col.		P Interroge sur l'opération. Recension des résultats : 15 / 38 / 61 / **48** / 33 / 52	
55 :42			Recherche d'un ordre de grandeurs : « *7 dizaines – 2 dizaines = 5 dizaines.* […] *tu sais que ton nombre, il va plutôt se rapprocher de 5 dizaines, qu'il va te rester. Donc est-ce que ça peut être 6 ?* » Demande de tester de la valeur 52, puis 33, puis 48. (beaucoup effets Topaze).	Test de 52 : Enzo s'arrête à la somme des unités : « il faut trouver 3 » élèves agités. Beaucoup ne suivent plus.
1:03 :45	Conclusion : *« Lui, au départ, il est parti de 52. Après, c'est la question qu'il faut se poser : est-ce que je dois chercher un nombre plus petit que 52, ou plus grand que 52 ?* […] *Si je choisis un nombre plus grand, je vais trouver plus grand que 77. Donc moi, je veux pas ça, moi. Moi, je veux un nombre plus petit que 77.* » Présentation de la séance suivante : « *on découvrira comment font d'autres enfants quand ils font le même travail que nous* »			
1 :06 :10	- Fin de la séance -			

Tableau synoptique 22 : séance 18, site Valentine (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Le synopsis de cette séance montre que tous les problèmes proposés appartiennent à la même catégorie e t- E[90] et relèvent d'une même sémantique : « J'ai *x* cubes, j'en enlève *y*. Combien en y en a-t-il maintenant ? » Les deux premiers problèmes sont résolus sur ardoise, le dernier est recherché individuellement sur feuille. Nous résumons ci-dessous les éléments significatifs de cette séance dite de « soutien ».

- Systématiser une démarche de résolution par essais

Plusieurs indices nous permettent de dire que l'enseignante cherche à systématiser une démarche de résolution de problème (au sens générique, mais appliquée aux problèmes soustractifs qu'elle met en scène) par essais successifs :

- Chaque problème est traité selon un même ordre : (i) lecture du problème et identification de l'opération, (iii) recherche d'une réponse au problème (iv) élimination des réponses improbables, (v) vérification d'une réponse en faisant une addition, (vi) essai d'une autre réponse (vii) ajustement

- Le premier problème permet de rappeler comment prouver un résultat. Nous notons que l'enseignante ne s'appuie pas sur un ostensif (matériel, schéma, gestuelle) mais sur une simplification de la procédure : « *la preuve par addition, là, pour vérifier, on utilise, là, le contraire. On utilise l'addition. Elle* [à propos d'une élève] *prend le nombre qu'elle a trouvé, plus le nombre qu'on enlève* » (min 9 :24). Ce faisant, Valentine reprend une formulation utilisée lors de l'étape 2. Le bilan de séance, *« on a le droit de faire la preuve par addition quand on a une soustraction au départ. »* (Val-S18-1h06 :28) indique, selon nous, que l'enseignante a rabaissé ses ambitions didactiques (donner du sens) au profit d'un automatisme.

- Pour chaque problème, après vérification de la première valeur proposée, Valentine répète la même question « *est-elle* [la réponse proposée] *trop petite ou trop grande ?* » (Val-S18-min 12 ; min16 ; min 28 ; min 31 ; min 35 ; min 42 ; min 45 ; min 47 ; min 48 ; min 59 ; 1h01 ; 1h03). Ces actions répétées ont pour effet d'orienter les élèves sur la recherche d'un autre « nombre-solution » et non d'un ajustement par modifications du chiffre des dizaines ou des unités. Nous interprétons ceci comme une volonté « d'entrainement » à la vérification en faisant une addition.

[90] e t- E : recherche d'un état final connaissant l'état initial et la transformation,

- Les interactions de deux élèves montrant qu’il est inutile de terminer l’addition, dès lors que les chiffres des unités ne correspondent pas, passent inaperçues lors de la résolution du premier problème (min 12 :03). Lors du calcul de 60 + 28, Andréas et Claire déclarent « *Ah, ben déjà, on sait que c’est pas bon.* » et « *parce qu’il fallait un 5 dans les unités* » (Val-S18-min 11). Bien que judicieuses, ces deux remarques ne sont pas reprises par l’enseignante. Néanmoins, elle s’empare de remarques similaires dans la résolution des problèmes suivants, non pas pour justifier le chiffres des unités, mais pour faire le lien avec le cassage d’une dizaine : « *il en reste 4 parce que je suis obligée de casser des dizaines.* » (Val-S18-min 37). L’enseignante tente ici de poser un premier jalon vers la technique de la soustraction par cassage.

D’un point de vue transpositif et au regard des enjeux épistémiques de l’ingénierie broussaldienne, on assiste dans cette séance à une élémentarisation plus forte des savoirs attendus pour les élèves les plus faibles de la classe. Ce constat recoupe en partie les résultats de recherche sur les pratiques enseignantes en milieu difficile : réduction des milieux, tâches élémentarisées et répétitives (Peltier, 2004).

2.2.3.2. Conclusions à propos de la quatrième étape de l’ingénierie mise en œuvre par Valentine

L’enjeu de cette étape de l’ingénierie broussaldienne est de « faire formuler, reconnaître, identifier par tous » les stratégies de résolution mises en œuvre jusqu’à présent puis d’amener les élèves à définir une stratégie pour obtenir le résultat d’une soustraction qu’ils ne sont pas encore capables d’effectuer » (Berté, 1996, p.32). L’addition, qui n’était jusqu’alors qu’un outil de vérification, devient alors dans cette étape un outil de résolution. Les variables numériques dans les problèmes proposés permettent de soulever la propriété non commutative de la soustraction, conduisant ainsi à une réflexion quant aux techniques à mettre en œuvre pour effectuer une soustraction et maîtriser son algorithme.

Bien que l’ingénierie didactique prévoie trois leçons dans cette étape, l’enseignante la mène en quatre séances. Comme pour les précédentes étapes, nous condensons dans les deux tableaux suivants les éléments principaux structurant la mésogenèse au fil de l’étape ainsi que ceux relatifs à l’évolution du savoir relatif à la construction d’un algorithme de la soustraction. Chacun de ces tableaux est ensuite commenté, en pointant les traits récurrents de la pratique didactique observée.

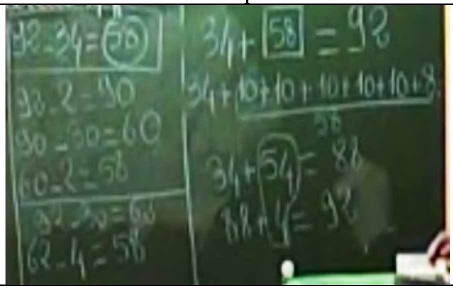
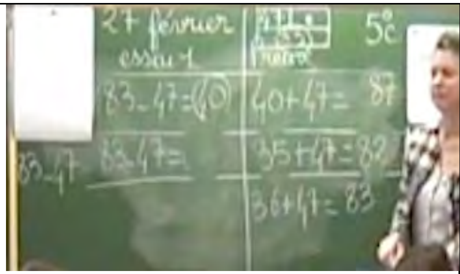
	Séance 15	Séance 16	Séance 17	Séance 18
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Pb1 : en collectif dans sa totalité. Pb2 : Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel
Catégorie des problèmes selon la typologie de Vergnaud (1990)	Combinaison e E e (avec mot inducteur de l'addition pour le second problème)	Combinaison e E e Transformations e t- E e t+ E e T+ e E t+ e (avec mot inducteur de l'addition)	Combinaison e E e Transformation e t- E Comparaison e e | C+	Transformation e t- E
Variables numériques	Nombres M et N tels que M < N < 100 et le chiffre des unités de N est inférieur au chiffre des unités M.			
Traces au tableau				Pas de traces vidéo
Matériel	Cahier pour illustrer le pb1 Boite et cubes Fiche individuelle de travail Calculatrice	Boite et cubes Fiche individuelle de travail	Boite et cubes Ardoise (pb1 et 2) Fiche individuelle de travail (pb 3)	Ardoise (pb1 et 2) Fiche individuelle de travail (pb 3)
Savoirs et/ou techniques mathématiques mobilisés par les élèves	Nombres et propriétés dans le système décimal Décomposition d'un nombre entier Propriétés opératoires : a – (b + c) = a – b – c Preuve par addition (NP2) Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité Ajustement par translation d'un écart entre deux nombres	Nombres et propriétés dans le système décimal Décomposition d'un nombre entier Propriétés opératoires : a – (b + c) = a – b – c Preuve par addition (NP2) Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité Ajustement par translation d'un écart entre deux nombres	Nombres et propriétés dans le système décimal Décomposition d'un nombre entier Propriétés opératoires : a – (b + c) = a – b – c Preuve par addition (NP2) Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité Ajustement par translation d'un écart entre deux nombres (méthode de la fausse position) Estimation d'un ordre de grandeur (NP3) Comptage sur les doigts	Nombres et propriétés dans le système décimal Preuve par addition (NP2) Ajustement par translation d'un écart entre deux nombres (méthode de la fausse position). Comptage sur les doigts

Tableau 31 : Synthèse des quatre séances de l'étape 4 – « stratégies des essais » – du point de vue mésogénétique (Site Valentine)

Un milieu didactique co-construit en continuité avec les étapes précédentes

- Un enjeu didactique explicité

Pour chacune des séances, l'enjeu d'étude est rapidement introduit dans le milieu didactique : il s'agit « *de travailler sur des calculs plus difficiles* » en séance 15, « *d'utiliser la preuve par addition pour vérifier et réajuster* » en séance 16, et « *faire le moins possibles d'essais* » en séances 17 et 18. Dès le début de l'étape, l'enseignante réactive les éléments nécessaires à la constitution du milieu didactique : la reconnaissance du type de problèmes (additif ou soustractif), l'écriture de la réponse sous forme additive ou soustractive, la preuve d'un résultat. En demandant l'écriture des résultats sous forme « *d'un calcul* », elle indique aux élèves que l'apprentissage porte principalement sur la résolution d'une opération. Ce faisant, elle maintient une continuité avec l'étape précédente dont un des objectifs était d'exprimer la solution par une écriture de type a + b ou a – b, continuité qui favorise le basculement de l'enjeu « donner du sens à une différence » à l'enjeu « donner du sens à l'opération « soustraction » ».

- Une dynamique mésogénétique en adéquation avec les avancées chronogénétiques visées

Pour chacun des problèmes à résoudre, l'enseignante incite les élèves à exprimer leurs procédures de résolution. Au fil des quatre séances de l'étape, nous avons vu que les interactions amènent ainsi à diversifier les procédures de résolution. Par exemple en séance 15, nous avons vu que pour calculer 92 – 34, certains élèves procèdent en développant une procédure par recherche d'un complément ; d'autres décomposent le second terme en dizaines et unités puis effectuent des retraits successifs, d'autres encore initient un ajustement par translation d'un écart. L'étude de l'action conjointe lors de ces séances montre que les élèves sont à la recherche de techniques opératoires, enrichissant le milieu primitif de techniques s'adossant à des propriétés opératoires, des connaissances en numération. Au fil de l'étape, l'enseignante renforce ces stratégies en orientant les interactions vers un questionnement sur des procédés permettant d'initier la construction d'un algorithme de la soustraction. Les séances 17 et 18 voient élèves et enseignante se focaliser essentiellement sur l'opération « soustraction » posée en colonne. Si Valentine ne pointe pas elle-même les erreurs de calcul des élèves, elle laisse le milieu rétroagir en faisant en que sorte les différents niveaux de preuves élaborés dans les séances précédentes invalident les réponses erronées.

Par ailleurs, Valentine s'appuie sur le matériel {boite, cubes} pour mimer les opérations. Ainsi, elle rend visible la nécessité du cassage d'une dizaine pour avoir un nombre de cubes-unités suffisant pour le retrait à l'ordre des unités. Ce faisant, elle pose dans le milieu didactique, les éléments préparant l'apprentissage de l'algorithme de la soustraction par conversion d'une dizaine en unités.

Nous résumons dans le tableau en pages suivantes, les observations effectuées relativement à la gestion de la chronogenèse de cette étape.

Nous avons vu au fil des séances de l'étape, le souci de Valentine de conduire les élèves, dans l'action conjointe, au plus près (voire au plus vite) de la maîtrise d'un algorithme de la soustraction par conversion des dizaines en unités, ce qu'elle assume clairement (« avec le matériel on va voir comment on fait, qu'est-ce qu'on casse quand on n'a pas assez d'unités. Il y a bien aussi une dizaine qui se casse » (Val-S17-entr.ante). Dans cette étape, nous pointons plusieurs avancées chronogénétiques :

- Les résolutions empiriques disparaissent au profit de résolutions numériques

Si une élève dessine encore pour résoudre le premier problème, en fin de étape plus aucun élève ne résout en dessinant ou en manipulant la boite et les cubes. Tous résolvent avec des procédures numériques. Certains soustraient en effectuant une décomposition du terme à retrancher (*cf.* Tableau 32, procédures 2 et 5), d'autres recherchent un complément par sur-comptage (*cf.* Tableau 32, procédures 1) ou par addition lacunaire (*cf.* Tableau 32, procédures 6 et 7), d'autres enfin recherchent par la méthode de la fausse position[91] (*cf.* Tableau 32, procédures 3, 4, 8 et 9).

[91] La méthode de la fausse position consiste à proposer une solution approchée puis à la corriger en tenant compte de l'écart constaté entre le résultat obtenu et le résultat attendu.

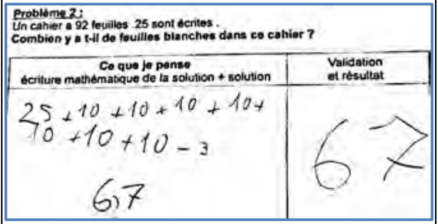
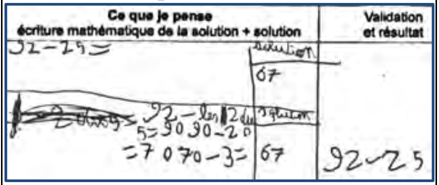
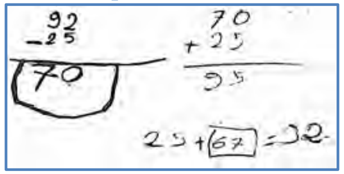
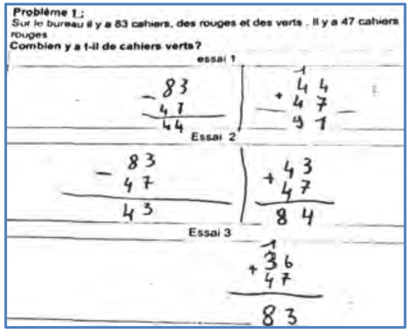
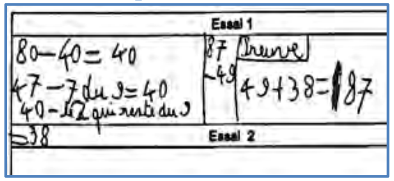
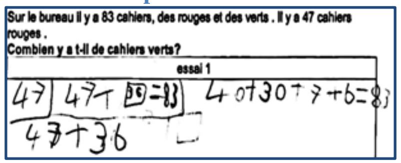
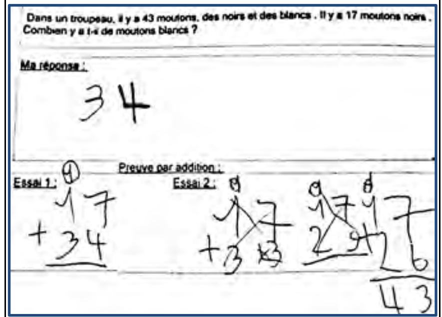
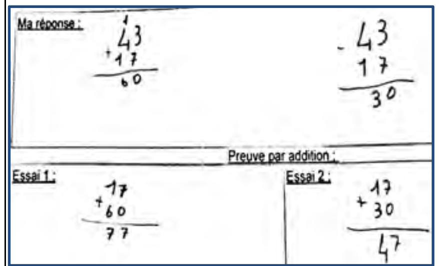
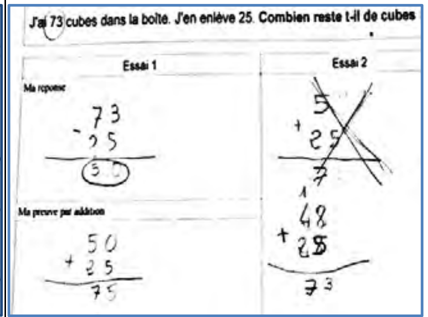
	Séance 15	séance 16	séance 17	Séance 18
Simulation des problèmes	oui	oui	non	non
Reconnaissance d'un problème soustractif	Pb 1 : oui Pb 2 : oui	Pb 1 : oui Pb 2 : non (aide : simulation avec le matériel)	Pb 1 et 2 : oui Pb 3 : avec difficultés. (Aide : schématisation du problème)	Pb1, Pb2, Pb3 : oui avec difficultés
Procédures élèves lors de la recherche individuelle	Dessin puis dénombrement / calcul par décomposition du second terme / ajustement après 1er essai / recherche du complément. Tentative d'effectuer une soustraction posée.  procédure 1  procédure 2  procédure 3	Dessin puis dénombrement / calcul par décomposition du second terme / essais successifs / recherche du complément. Tentative d'effectuer une soustraction posée.  procédure 4  procédure 5  procédure 6	Calcul par décomposition du second terme / essais successifs / recherche du complément.  procédure 7  procédure 8	Ajustement après un premier essai Tentative d'effectuer une soustraction posée.  procédure 9
vérification empirique	non	oui	Oui pour montrer le cassage d'une dizaine.	Oui pour montrer le cassage d'une dizaine.
Niveaux de preuve apparaissant au fil de la séance	NP1 ; NP2	NP2	NP2 ; NP3 ; NP5	NP2 ; NP3 ; NP5
Type d'ajustements	Par essais successifs Ajustement par translation d'un écart.	Par essais successifs Ajustement par translation d'un écart	Par essais successifs Ajustement par translation d'un écart. Ajustement des unités	Par essais successifs Ajustement par translation d'un écart Ajustement des unités, des dizaines.

Tableau 32 : synthèse des quatre séances de l'étape 4 – « stratégie des essais »– du point de vue chronogénétique (Site Valentine)

- La preuve devient un outil pour chercher

Rappelons que lors de la mise en œuvre de la deuxième étape de l'ingénierie didactique, la plupart des élèves éprouvait des difficultés à prouver leur résultat. L'enseignante avait pallié cette difficulté en développant un automatisme de type : « ma réponse + ce que j'ai enlevé = le tout ». Lors de l'entretien post de la séance 16, l'enseignante utilise les terme « *convaincre* » et « *inciter* » pour exprimer la nécessité de prouver un résultat. La séance 16 montre l'enseignante exercer un fort étayage lors de la recherche individuelle : en circulant d'élève en élève, non seulement elle s'assure que tous vérifient par l'addition, mais de surcroit, elle incite, voire provoque, une résolution par essais. L'enseignante anticipe ainsi les interactions lors de la recherche collective. En interrogeant des élèves repérés auparavant, elle cherche à donner du sens à la preuve tout en la transformant en un outil de recherche. Deux niveaux de preuve apparaissent, l'un par comparaison du chiffre des unités du tout et du chiffre des unités du résultat de l'addition (NP5), l'autre par estimation d'un ordre de grandeur de la solution (NP3). Pour autant, ces niveaux de preuve ne sont pas exploités pour différencier la soustraction de l'addition : la non commutativité de la soustraction n'est pas évoquée. D'une certaine manière, Valentine privilégie ici dans son interprétation de l'ingénierie didactique les dimensions reliées à la résolution de problème : il s'agit d'invalider et non d'initier une étude des propriétés de la soustraction.

- L'ajustement par transposition d'un écart (méthode de la fausse position)

L'ajustement par transposition d'un écart était embryonnaire dans les étapes précédentes. Si quelques élèves ajustaient leurs résultats en « reculant » ou « avançant », la procédure n'était pas installée officiellement. L'étape 4 voit l'officialisation de cette procédure : il s'agit de « *voir comment réajuster, est-ce qu'on est très loin du résultat, et comment faire pour réajuster, s'en rapprocher, pour trouver la bonne réponse* » (Val-S16-entr.post).

- Une tentative d'accélération chronogénétique vers un algorithme de la soustraction

En entretien post, l'enseignante déclare « *je pense que le travail d'aujourd'hui, ça va être vraiment de travailler ce* problème *d'unité. Il n'y a pas assez d'unités, comment on fait pour casser les dizaines, qu'est-ce qui se passe quoi en fait ?* ». A deux reprises dans cette étape (en S16 et S17), elle simule avec les cubes la soustraction 94 – 29 pour montrer la nécessité de casser une dizaine pour avoir un nombre suffisant d'unités et effectuer la soustraction. Ce faisant, alors que l'algorithme de la soustraction par cassage n'est évoquée qu'en étape 6 dans l'ingénierie, elle pose un premier jalon vers cette technique.

Les éléments récurrents observés lors de cette séance supplémentaire, comme ceux pointés lors des précédentes séances relatives à cette étape de l'ingénierie didactique, soutiennent l'interprétation selon laquelle la recherche d'une automatisation de procédures est centrale pour cette enseignante.

L'analyse mésodidactique des séances de cette étape confirme les écarts à l'ingénierie didactique déjà identifiés. Ainsi que Valentine le dit lors d'un entretien dans l'étape précédente, l'enseignante cherche à consolider le sens de la preuve par l'addition en la mettant en œuvre régulièrement. La méthode de la fausse position (Leçons 9 et 10 de l'ingénierie didactique) ainsi que les prémisses de l'algorithme de l'addition lacunaire (Leçon 11) n'apparaissent pas comme des techniques de résolution dans les mises en œuvre de Valentine : la première n'est pas généralisée mais limitée au cas où l'écart (c'est-à-dire la valeur de la translation sur la droite numérique) est petit, tandis que la seconde est réduite à la recherche du chiffre des unités. Par contre, l'enseignante se sert des niveaux de preuves ainsi que des simulations empiriques pour orienter l'enjeu d'étude vers un algorithme de la soustraction (par conversion des dizaines en unités) Nous observons ici encore le poids de l'épistémologie pratique de l'enseignante. Elle infléchit cette étape vers une pratique habituelle : l'explication du fonctionnement de l'algorithme de la soustraction par cassage (une dizaine vaut dix unités).

2.2.4. Analyse de l'étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »

L'enjeu de cette étape est comme nous l'avons vu en début de ce chapitre des résultats (*cf.* section *1* page 182) d'amener progressivement les élèves à converger vers des procédures « donnant la réponse un en coup » (Berté, 1996, p.38). Pour ce faire, l'ingénierie introduit des procédures de personnages fictifs, procédures mises en débat dans la classe. Nous avons vu (cf. Tableau 26) que Valentine propose le même nombre de séances (deux) que proposé par l'ingénierie pour mener cette étape.

2.2.4.1. Analyse mésodidactique des séances

2.2.4.1.1. Séance 19

Cette séance propose aux élèves deux problèmes, l'un travaillé collectivement, appartenant à la catégorie des transformations avec recherche de l'état final (e t– E), l'autre, travaillé individuellement, relevant de la catégorie combinaison d'état eEe avec recherche d'un des états connaissant l'un des état et la combinaison des deux états. À ce stade de l'ingénierie, les élèves de Valentine, reconnaissent un problème soustractif, écrivent la différence sous la forme d'une écriture soustractive et résolvent les problèmes selon diverses procédures : recherche du complément, décomposition du terme à retrancher, retraits successifs etc. Pour Valentine, l'enjeu de la séance est « *d'améliorer le nombre d'essais en travaillant sur le choix du premier nombre* » (Val-S19-entr.ante) et de « *limiter les erreurs de calcul* » (*Ibid.*) L'introduction de personnages fictifs (les Schtroumpfs) permet de « *discuter des procédures de chacun de ces personnages, et voir quelle est la plus efficace, la meilleure* » (*Ibid.*). Trois procédures présentées sous la forme d'une addition à trous posée en colonne sont proposées : (i) le Schtroumpf Bricoleur approche la solution en effectuant successivement plusieurs essais (10, 20, 30, 40) le conduisant à un encadrement de la solution à la dizaine près ; (ii) le Schtroumpf Musicien obtient la solution en éprouvant une première valeur (30) puis en l'ajustant à l'unité ; (iii) le troisième Schtroumpf, Azraël effectue l'addition, montrant qu'il n'a pas reconnu le calcul d'une différence.

Le synopsis ci-après décrit le déroulement de la séance qui, remarquons-le dure 2 heures, ce qui est bien plus long que la durée habituelle d'une séance de mathématique à l'école primaire.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Problème 1 : ce matin le facteur avait 93 lettres à distribuer. Il en a déjà distribué 56. Combien y a-t-il de lettres maintenant dans sa sacoche ?			
	Col.	Lire l'énoncé	P interroge les élèves sur les données du problème.	Les élèves réagissent spontanément : 93 – 56
0 :47		Analyser la procédure du Schtroumpf Bricoleur (SB)	La soustraction est posée en ligne, au tableau. Présentation Schtroumpf bricoleur (SB) : « *Schtroumpf Bricoleur, il a fait comme vous.* […] *est-ce que vous comprenez comment il a fait ?* ».Pour chaque essai, P demande si le SB est près ou pas de la solution. P : « *Donc s'il met 30, ça serait trop petit et s'il met 40 ça serait … ?*» Vérification des valeurs 29 et 43. P profite de la remarque de Rémi et Dimitri pour faire ajuster, puis vérifier le résultat (37) par Andréa. P insiste sur le nombre d'essais de SB	Samuel : « *il commence à faire la preuve par addition, il rajoute 10, après il va faire 20, et à mon avis, après, il pourrait continuer…* ». Rémi partirait de 40, et Gabriel de 30. Dimitri : « *Oui, mais, et si, après, après, 40, j'ai vu que ça dépasse le nombre. Alors il vaut mieux partir du nombre qui dépasse pas.* » *Claire : « il faut partir de 40, et on fait des moins ! »* Débat pour savoir si « c'est dans les 30 » ou « c'est dans les 40 » Zoé : « 43 ».Les élèves cherchent à ajuster en évaluant l'écart entre 96 et 93.
19 :56		Analyser la procédure du Schtroumpf Musicien (SM)	Présentation Schtroumpf Musicien (SM) : « *essayez de comprendre ce qu'il fait.* » P fait débattre sur le choix du 1er nombre (30), puis sur la suite des nombres 87, 88, … et 93 : montrant les nombres 87 ….93 « *j'aimerais comprendre çà* ». P : « *comment il a fait pour trouver 30 ?* […] *comment, d'après vous, vous feriez, pour trouver ce nombre de dizaines ?* »**Conclusion : *« Est-ce qu'il a proposé 35 ou 36 ? Non, d'abord, il a cherché le nombre.[…] Des dizaines. Et après, il a rajouté les unités. D'accord ? »***	Léa : « *Il est allé plus vite…il a sauté plein de nombres* » Samuel : « *il a fait 30 et après il a trouvé 86, après 87* […] *jusqu'à 93. C'est un petit peu trop lent* ». Les élèves accompagne P qui compte sur ses doigts : *« 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93. Il a rajouté 7. »* Les élèves ne savent pas, évoque le hasard, un nombre « *proche* »
30 :01	S'entrainer à l'ordre de grandeur : J'ai 42 cubes dans ma boîte. J'en prends 24. Idem avec 65 – 39, puis 84 – 18, puis 71 – 34, puis 55 – 28			
		Apprendre à choisir le premier nombre à tester. Ajuster	P : « *si on arrive à chercher ce premier nombre, vous ferez de moins en moins, de moins en moins d'essais.* » P écrit chaque fois l'addition à trous posée en colonne et teste les nombres proposés par les élèves, en adoptant la même disposition que pour le SM : écriture de la suite des nombres 35, 36,37, 38, 39, 40, 41, 42 à côté de l'addition. Conclusion : « ***il y a des élèves qui choisissent soit le nombre juste un peu plus grand de dizaines, 20, et ensuite, qu'est-ce qu'ils font ? Eh bien, eux, ils reculent. Et il y a d'autres enfants dans la classe qui choisissent le nombre plus petit, mais plus proche, et eux, ils avancent*** » Les autres opérations sont traitées de la même façon. Pour tous les calculs, addition lacunaire écrite au tableau, ajustement, puis preuve. Les trois derniers calculs sont recherchés individuellement puis corrigés collectivement. Dernier calcul : « *il y a combien d'écart entre 55 et 58 ?* […] *en plus ou en moins ?* […] *il faut que je recule ou que j'avance ?* »	• 42 – 24 : Zoé choisit pour premier essai 20 les élèves réagissent immédiatement « il faut enlever 2 » ; Éléonore a choisi 30 ; Andréas 10 • 65 – 39 : Maxime propose 30. On recule de 4 et Maxine 20 puis on avance de 6 • 84 – 18 : Claire teste 70 au tableau mais ne sait pas ajuster : elle ajoute au lieu d'enlever. Léa, Matthieu et Enzo proposent 40 • 71 – 34 : Paul teste 30 puis « *avance de 7* ». Maxime, Bertille, Claire sont partis de 40 • 55 – 28 : Enzo teste 30 mais ne sait pas ajuster.
1:15:56			Simulation avec la boite et les cubes : il faut casser une dizaine pour pouvoir enlever les 8 unités.	
1:19:30			Présentation de la procédure d'Azraël.	Perplexité des élèves : « *Il ajoute* », « *il a fait l'inverse* »,
1 :23:40	Problème 2 : dans une boite il y a 91 cubes, des rouges et des bleus. Il y a 28 cubes bleus. Combien y a-t-il de cubes rouges ?			
	Col.	Lire l'énoncé	« on essaie de le faire en deux fois. ***En se rapprochant le plus possible de ce nombre-là, et puis après en ajoutant ou en enlevant si on est trop près ou trop loin*** »	
1:25:56	Ind.	Résoudre	P circule dans les groupes.	
1:33 :41	Col.		P s'assure du calcul à effectuer : « *c'est une soustraction, c'est ça ?* »	Certains ne comprennent pas comment « *choisir* » ce premier nombre
1 :37:15		Déterminer le 1er nbre à tester puis ajuster	Simulation avec la boite et les cubes : P tente de faire comprendre comment déterminer ce premier nombre avec la boite et les cubes : elle place 9 dizaines de cubes et 1 cube dans la boite, puis enlève 2 dizaines. Puis on compte les dizaines restantes. P fait expliciter les procédures de ceux qui ont fait en 2 coups. *Conclusion : «* ***Il vaut mieux se rapprocher le plus possible de ce nombre ». Si tu vois que t'es trop loin, ben tu recommences, et tu proposes un nombre qui se rapproche de plus en plus. D'accord ?***	E : 70, preuve, puis calcul de l'écart, puis recul pour arriver à 63 Andréas : 91 – 28 = 77. La preuve invalide ce résultat : 77 + 28= 105, « *j'ai fait comme SM, j'ai fait en arrière* » Dimitri, Gabriel : 28 + 60 = 88 « *c'est un petit peu moins. Alors, après, j'ai compté l'écart qu'il y avait entre 88 et 91. Alors j'ai vu qu'il y avait 3. Alors j'ai avancé de 3, ça m'a fait 91. Et de 60, j'ai avancé encore de 3, et ça m'a fait 63. Et après, j'ai fait 63+28, et je suis arrivé à 91* »
1:58 :50 2:01:23			P nomme la procédure « solution Charlotte » Fin de la séance	Charlotte effectue l'addition à trous en agissant sur les unités puis sur les dizaines : « *Il fallait arriver à 1. Donc j'ai avancé jusqu'à 11. Ca m'a fait 3. Donc j'ai marqué 3. J'ai mis la dizaine. J'ai fait 1+2* » Elle complète ensuite avec un 6.

Tableau synoptique 23 : séance 19, site Valentine (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

Analyser une procédure de calcul, tâche inhabituelle.

L'enseignante se sert de Schtroumpf Bricoleur et Schtroumpf Musicien pour définir l'enjeu d'étude. Il s'agit « *de comprendre comment ils ont fait* » (Val-S3-min00 :47). Dans un premier temps, les interventions de Valentine sont d'ordre général : « *Qu'est-ce vous comprenez ?* […] *ça correspond à quoi ?* […] *« Qu'est-ce qu'il fait, après ? »* […] « *Et comment il a fait pour trouver 30, d'après vous ?*» Pour autant, les élèves ne répondent pas à son attente. En déclarant « *c'est dans les trente* » ou « *c'est dans les quarante* », les élèves considèrent le premier essai du Schtroumpf musicien (min 19 :56) comme 30 unités et non comme 3 dizaines. Dans la continuité de l'étape précédente, les procédures des deux Schtroumpfs sont lues par les élèves comme des stratégies d'essais donnant ensuite lieu à un ajustement. Par ailleurs, en utilisant des expressions « *partir d'un nombre très proche* », et en faisant vérifier deux valeurs, 43 et 29 (min 0 :47), l'enseignante maintient les élèves dans une résolution par essais au dépens de la recherche d'un ordre de grandeur à la dizaine. Prenant une position topogénétique haute, l'enseignante clôt l'analyse en injectant elle-même dans le milieu didactique le terme de dizaine : montrant le chiffre des dizaines sur l'affiche du Schtroumpf Bricoleur « *regardez, à chaque fois, il n'a proposé que des nombres avec des dizaines entières* » (Val-S19-min 00 :47). Ayant ensuite conclu sur la procédure du Schtroumpf Musicien (min 19 :56), l'enseignante annonce la tâche suivante : « *on va s'entrainer à ça, à rechercher ce premier nombre* ». Bien que s'adossant à l'ingénierie didactique (Berté, 1996, p.40), l'enseignante reproduit ici sa pratique usuelle : comme pour l'apprentissage de la vérification d'un résultat en étape 2, elle dévoile, voire, introduit, la technique puis entraine ses élèves à la reproduire.

Figure 57 : Valentine – séance 19 – position topogénétique de l'enseignante (« *Regardez …* »)

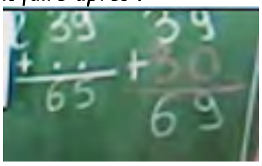
Une technique usuelle de l'enseignante : apprendre par la répétition

Alors que l'ingénierie ne prévoit qu'un « entrainement à l'ordre de grandeur », l'enseignante fait déterminer pour chacun des calculs les valeurs approchées à la dizaine près par excès et par défaut, puis poursuit par la résolution par ajustement. Deux explications éclairent cette position :

Une première réside dans une préoccupation relative à l'ajustement : « *à l'étape des essais, il y en a certains qui étaient souvent bloqués, ils avaient le choix du premier nombre mais après il savaient pas trop* [comment ajuster] » (Val-S19-entr.ante) préoccupation qu'elle confirme en entretien post : « *je suis persuadée qu'il y a certains élèves qui voient l'écart, qui font + 7, mais après qu'est-ce qu'on fait de ce +7 ? Tu vois ? On le rajoute à quoi ou on l'enlève à quoi ? Y en a plein qui ont dit un moment on le rajoute alors qu'il fallait l'enlever…dans l'écart c'était soit positif ou négatif, quoi.* [..] *Du coup, j'ai voulu aller chaque fois jusqu'au bout de la résolution. Et surtout mettre en avant que les deux étaient bons à condition que l'écart qu'il soit positif ou négatif… enfin je veux dire qu'il soit bien appliqué derrière.* » (Val-S19-entr.post). La seconde renvoie au contrat didactique pérenne : « *on a toujours envie d'arriver à la résolution de toute façon. Je les ai amenés là-dessus. Si je m'étais arrêtée là…ça suffisait pas quoi !* [rires] *Tu peux pas t'arrêter comme ça !* » (Val-S19-entr.post). Ce faisant, l'« entrainement à l'ordre de grandeur » prévu par l'ingénierie didactique (Berté, 1996, p. 40) se trouve dilué dans les activités demandées aux élèves, à savoir résoudre les problèmes soustractifs proposés.

Pour autant, l'enseignante ne conserve pas une position topogénétique haute. L'extrait ci-dessous la montre ne pas intervenir et laisser « *dire* » un début de procédure à venir dans une séance ultérieure.

Claire : Le 6 on le change pas, c'est les unités qu'on change. Il faut un 5 pas un 9
P : donc 30, c'est un petit peu trop ? Mais qu'est-ce-qu'il faudrait faire après ?
Andréas : Il faut pas un 5, déjà
E : Il faut pas un 5, sinon ça ferait moins …
Claire : Mais c'est le nombre 65
P : bon alors …
Andréa : 5 + 9 = 14, alors si on met le 4, ça fera 64



Extrait 64 : Valentine – interactions entre élèves, prémisses de l'émergence d'une nouvelle technique

Nous reconnaissons encore ici une manière de faire de l'enseignante : laisser émerger des embryons de techniques pour les exploiter en séances suivantes.

Une tentative d'accélération chronogénétique

Alors que le matériel {boite-cubes} avait peu à peu disparu, l'enseignante le réintroduit à deux reprises : une première fois justifiant la nécessité de casser une dizaine pour avoir un nombre suffisant d'unités et une seconde fois en guise d'illustration du choix du premier nombre testé. Nous reconnaissons ici encore un enrichissement du milieu didactique piloté par une volonté de l'enseignante de poser quelques jalons en vue de l'apprentissage d'un algorithme de la soustraction, ce qu'elle nous confirme en entretien *post* : « *Tout le monde a bien compris qu'il fallait casser.* […] *Aujourd'hui c'est une première approche. Après j'ai des trucs aimantés, ça va m'aider.* » (Val-S19-entr.post). Cette remarque est une première indication de l'algorithme par cassage de la dizaine vers lequel s'oriente Valentine, confirmant l'hypothèse que nous avions émise lors de l'analyse de l'étape précédente.

2.2.4.1.2. Séance 20

En s'appuyant sur les situations proposées en leçon 13 dans l'ingénierie, cette séance poursuit le travail précédent en introduisant les procédures des quatre autres Schtroumpfs qui relèvent, cette fois-ci d'une combinaison d'états eEe [92]. Il s'agit de calculer la différence 84 – 39. Comme à la leçon précédente, les techniques présentées s'appuient sur l'addition lacunaire posée en colonne. (i) la Schtroumpfette opère en approchant la solution par un ordre de grandeur à la dizaine près, puis par un ajustement à l'unité ; (ii) le Schtroumpfissime opère en « réglant d'abord le problème des unités » (Berté, 1996, p.42), puis en ajustant les dizaines ; (iii) le super Schtroumpf effectue l'addition lacunaire ; (iv) enfin le Grand Schtroumpf effectue la soustraction, sans que l'on puisse deviner la technique (par cassage ou par conservation des écarts) utilisée.

Valentine indique en entretien *post* que plusieurs de ces procédures sont apparues dans les séances précédentes : « *Il se trouve que des enfants avaient fait autrement, c'est-à-dire qu'à partir d'un nombre pensé, de dizaines pensées, ils ajustaient, ils reculaient voilà. Et en fait c'est un autre personnage qui présente çà aujourd'hui. C'est la Schtroumpfette. […]Après il y a la technique de Super Schtroumpf, celle de Charlotte qui a été utilisée la semaine dernière sur l'addition. Elle, elle calcule directement. Elle fait le complément de quoi. Et ensuite, on va présenter le Grand Schtroumpf, qui est Maxine !* »

L'analyse de la séance nous montre comment Valentine utilise les connaissances des élèves et les articule aux procédures proposées par l'ingénierie pour mener la séance.

[92] : Rappelons que eEe, selon la typologie de Vergnaud, est combinaison de deux états avec recherche d'un des états connaissant l'un des état et la combinaison des deux états.

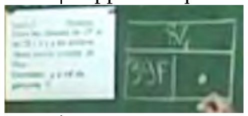
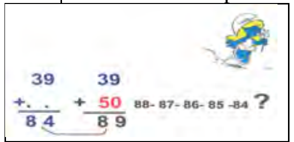
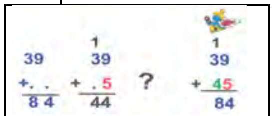
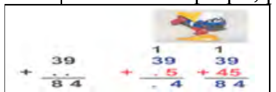
Temps	Modalité le travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
	Problème 1 : Dans les classes de CP, de CE1, il y a 84 enfants. Nous avons compté 39 filles. Et qu'est-ce qu'on cherche ?			
0 :00	Col.	Lecture	P relit le problème affiché au tableau puis « *je vous laisse le résoudre* »	Charlotte lit le problème. Gabriel réagit « il y a plus de garçons ! »
2 :26	Ind.	Résoudre	P circule dans les groupes, en aidant quelques élèves (Gabin, Éléonore)	
6 :59			P compte ceux qui ont trouvé en un essai, deux essais, trois essais, pas de solution. P sort l'affiche « Azraël » de la séance précédente. Puis interroge sur le type de problème, additif ou soustractif ? P schématise la situation P interroge les élèves sur leurs procédés de calcul et sort au fur et à mesure les schtroumpfs de la séance précédente. P interroge Andréas puis lui demande d'ajuster comme SM, en faisant « *la petite musique* » :80, 81, 82,83, 84 puis de prouver son résultat. Idem pour Bertille qui « *fait la petite musique à l'envers* ». 	Une dizaine dit avoir trouvé en un essai, une dizaine ne pas avoir trouvé. Les élèves rappellent qu'Azraël s'était trompé. Maxine dit faire comme le Schtroumpf Musicien : elle propose 47.Gabriel propose 40 « *puisque 40 + 40 = 80* ». Andréa : « *déjà c'est obligé que ça soit quatre dizaines.* » Es : « *soit 40 soit 50* ». Andréa teste au tableau 40 mais fait ensuite deux ajustements : +1 pour arriver à 80 puis +4 pour arriver à 85. Bertille va ensuite tester 50 et ajuste comme SM en reculant de 5.
19 :08	Col.	Débat collectif	Présentation de Schtroumpfette (SFT) : « *elle a fait comme Andréas ou Bertille ?* ». P tente d'expliciter comment choisir ce premier nombre : « ***Schtroumpfette, elle a travaillé sur le nombre de dizaines. […] il y a huit dizaines, là, je vais enlever les trois dizaines et il va m'en rester cinq. Alors je sais que ça fait trop, mais moi je sais faire ma petite musique derrière pour reculer. […] mais Musicien il propose le nombre plus petit que 50, il va proposer 40 et par contre il va faire la musique de ce qui manque mais en avançant, parce qu'il lui en manque*** » 	Les élèves comparent leurs procédés avec celui de SM ou de SFT
22 :23			P essaie de canaliser les interventions des élèves par rapport à la technique d'Éléonore : « *chut, moi je n'entends rien. J'écoute mais je n'entends rien !* » P laisse les élèves discuter du chiffre des dizaines à écrire puis revient sur les procédés de SM, SFT, d'Éléonore : « *c'est quoi la différence ?* » « ***ils commencent par chercher le chiffre des dizaines, et ensuite il s'occupe des unités. Alors qu'ici, Éléonore, elle s'est dit moi je vais commencer par chercher le chiffre des unités et après je vais chercher le chiffre des dizaines.*** »  Présentation de Schtroumpfissime (SFI) « est-ce qu'il a fait comme Éléonore ? »	Éléonore explique qu'elle fait 1 coup mais autrement : « *en fait pour aller de neuf à 14, j'ai trouvé cinq alors du coup j'ai mis cinq là. Et pour aller de trois jusqu'à huit, hé bien, il fallait cinq. Alors du coup j'ai mis cinq…* » Charlotte, Andréa, Rémi interviennent pour signaler l'oublie de la retenue. Les élèves reconnaissent la même procédure que Éléonore.
27 :41			P fait semblant de croire que Charlotte a une autre technique et lui demande d'expliquer au tableau. P appelle cette technique « super Charlotte » Conclusion : « *ça s'appelle une addition à trous* ».Présentation ensuite de Super Schtroumpf (SS), qui fait comme Charlotte et « *qui en une seule étape, a réussi* » 	Charlotte explique, plus précise : « *j'ai pris neuf pour arriver à quatre, j'ai compté, ça m'a fait cinq, 14, je mets la retenue et après, j'ai fait un plus trois pour arriver à huit, du coup ça m'a fait quatre* »
31 :49			P « *est-ce que par hasard, il y a quelqu'un a fait autre chose ?* » Présentation de Grand Schtroumpf (GS) dont la technique sera étudiée plus tard, « *mais Rémi l'a expliquée* »	Rémi a fait 84 – 49, a trouvé 45, puis a fait la preuve. Élèves en ébullition
36 :55	**Problème 2 :** Dans un troupeau, il y a 71 moutons. Des noirs et des blancs. Il y a 32 moutons noirs. Combien y a-t-il de blancs ?			
	Col.		P : « *vous allez essayer d'utiliser la méthode la plus efficace d'accord ?* » Lecture du problème, puis affichage de toutes les procédures des Schtroumpfs au tableau.	Un élève lit l'énoncé Les élèves demandent s'ils ont le droit de faire un essai, deux, plusieurs.
	Ind.	Résoudre	P circule dans les groupes et aide certains élèves : Claire, Charlotte, Rémi …	
46 :44	Col.	Correction/ débat collectif	P associe chaque procédure énoncée à celle d'un Schtroumpf. Éléonore : « *elle est revenue à ce que faisait Schtroumpf musicien ou Schtroumpfette, et elle a reculé pour avoir le bon* » P : « *qui a fait en un seul essai, je ne l'ai pas demandé ça tout à l'heure ?* […] ***ah, il y en a quelques-uns quand même…*** » P laisse raconter mais ne s'appesantit pas et appelle Sarah. Interroge Livio (32 – 71), puis Enzo (1er nombre testé) 72	Éléonore : 71 – 32 = 43, puis preuve, puis ajustement de 4 Paul (SF) : essaie 40 puis ajuste. Certains élèves veulent absolument faire comme GS, font la preuve puis ajustent. Maxine ne fait pas comme SS, mais effectue la soustraction par cassage, « *ma maman elle m'a appris comme ça* ». Samuel et Sarah recherchent le complément (SS)
1:03:07	**Problème 3 :** il y a 63 bonbons dans une poche et la maîtresse en distribue 28 ?			
	Ind.		P circule dans les rangs et aide.	
1 :10	P comptabilise ceux qui ont fait en un seul coup, en deux coups. Pas de correction. Puis annonce la séance suivante : « *nous travaillerons certainement sur comment il a fait Grand Schtroumpf* »			
1:11:23	Fin de la séance : sonnerie de la récréation			

Tableau synoptique 24 : séance 20, site Valentine (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »

- Un appel à la mémoire didactique conséquent

Alors que les séances précédentes faisaient peu appel à la mémoire didactique, l'enseignante revient sur les apprentissages des séances précédentes durant environ 20 minutes. Plusieurs raisons peuvent être avancées :

- L'enseignante cherche à resserrer l'hétérogénéité des élèves. Lors de précédents entretiens, Valentine s'inquiète d'un groupe d'élèves en retrait : « *il y en a d'autres qui restent davantage sur la réserve parce que je pense qu'il y a derrière il y a des problèmes encore d'abstraction, de maturité.* » (Val-S15-entr.post) ou encore « *comment aider les élèves qui n'arrivent toujours pas à réajuster ?* » (Val-S17-entr.post).

- Plusieurs indices nous incitent à penser que l'enseignante profite de ce rappel pour établir une référence commune à tous : (i) elle revient sur la reconnaissance du type de problème : « *combien il y a d'enfants en tout ?* […] *combien de filles ?* […] *est-ce qu'on connaît les garçons ?* », (ii) elle fait rappeler la procédure du Schtroumpf Musicien : « *Alors qu'est-ce qu'il a fait le Schtroumpf Musicien ? vas-y explique nous.* » (iii) elle interroge sur le choix du premier nombre, amenant ainsi les élèves à encadrer la solution à la dizaine près : « *qui a proposé un nombre de dizaines proches ?* » (iv) elle rappelle la technique d'ajustement « *Donc là, tu as fait à la façon de Schtroumpf Musicien* […] *elle va faire la musique à l'envers* » (v) elle fait vérifier le résultat par l'addition : « *allez, vas-y fais la preuve* ». En reprenant pas à pas la résolution du problème selon les procédures vues en séance précédente, l'enseignante constitue un socle commun à tous pour ensuite poursuivre le travail d'analyse d'autres procédures.

- Une avancée chronogénétique due à des interactions internes à la classe

Lors de l'entretien *ante* l'enseignante signale que plusieurs procédures de Schtroumpfs de la séance, bien que non étudiées, sont déjà présentes : celle de Schtroumpfette qui agit sur le chiffre des dizaines puis ajuste en comptant à rebours, mais aussi celle de Super Schtroumpf qui agit sur les unités et les dizaines dans la même opération et enfin celle du Grand Schtroumpf, qui provient d'une intervention extérieure : « *Maxine nous a présenté la soustraction cassée. Il y a papa et maman derrière là !* » (Val-S20-entr.ante). Nous observons l'enseignante profiter de ces trois éléments du milieu didactique et opter pour une position topogénétique « d'organisatrice » des interventions des élèves. En posant à intervalles réguliers les questions telles que « *qui a fait d'une autre façon, autre que Schtroumpfette ?* » (min21 :27), « *tu m'as dit que tu avais fait autre chose ?* » (min28 :29) « *est-ce que par hasard, il y a quelqu'un qui a fait autre chose que ces personnages ?* » (min31 :54), elle provoque une avancée chronogénétique du savoir que nous décrivons ci-dessous :

Bien que nous ayant signalé Charlotte, qui procède comme Super Schtroumpf, c'est-à-dire en effectuant une opération à trous, l'enseignante fait d'abord appel Éléonore qu'elle a repérée lors de la recherche individuelle. Cette élève, cherchant à combler les trous, raisonne indépendamment au rang des unités et des dizaines ce qui a pour conséquence d'oblitérer la retenue.

Éléonore : en fait pour aller de neuf à 14, j'ai trouvé cinq alors du coup j'ai mis cinq là. Et pour aller de trois jusqu'à huit, hé bien, il fallait cinq. Alors du coup j'ai mis cinq…

Extrait 65 : Valentine – Séance 20 – discours d'Éléonore accompagnant l'addition lacunaire

En appelant volontairement Éléonore, Valentine provoque un débat au sein de la classe qui n'a pour seule vocation que de porter l'attention des élèves sur la retenue et sa signification.

L'intervention de Charlotte dans un deuxième temps clôt le débat en institutionnalisant la procédure :

Charlotte : 9 pour arriver à 4… J'ai fait heu… J'ai fait 9
E : t'as trouvé 9 ?
Charlotte : [comptant sur ses doigts] ça m'a fait 5
P : et tu arrives à combien ? 9 + 5 ça fait combien ?
E : 14
Charlotte : 14
P : 14
Charlotte : je mets la retenue
P : d'accord
Charlotte : et après, j'ai fait 1+3 pour arriver à 8. Du coup ça m'a fait 4
[…]
P : vous savez comment ça s'appelle ? […] ça s'appelle une addition à trous

Extrait 66 : Valentine – Séance 20 – discours de Charlotte accompagnant l'addition lacunaire

De la même façon, Valentine interpelle Rémi : « *je suis passée voir ton cahier Rémi, tout à l'heure, t'as fait quelque chose […] est-ce que tu peux nous dire ce que tu as fait au départ comme opération ?* » (min32 :07). Rémi effectue la soustraction comme Grand

Schtroumpf mais n'est pas capable de l'expliquer. L'enseignante en profite alors pour la désigner comme enjeu d'étude ultérieur, « *celle-là, elle est juste pour l'instant réservée à ceux qui ont vraiment compris, mais on l'apprendra* ».

Nous reconnaissons ici encore une manière de faire de l'enseignante : s'appuyer sur des élèves pour faire avancer le savoir (Éléonore et Charlotte) ou pour indiquer un savoir visé (Rémi).

- Une avancée chronogénétique liée à une proposition d'élève

La procédure du Grand Schtroumpf fait incursion dans le milieu didactique par le truchement de l'élève Maxine. L'extrait ci-dessous illustre cette incursion :

Maxine : là, j'ai fait ça [Maxine barre le chiffre 7], j'écris un 6. Je mets une dizaine devant le 1. 11 – 2 je trouve 9. Et heu 6 – 3, j'ai trouvé 3. Et après j'ai trouvé 39.
P : heu, Maxine, est-ce que tu l'as compris toute seule ça ?
Maxine : en fait c'est ma maman qui m'a donné la technique.
P : c'est ta …
Maxine : ma maman. Parce qu'elle est forte en maths

Extrait 67 : Valentine – Séance 20 – apport d'une élève chronogène

Maxine importe dans le milieu didactique des façons de faire construites dans le contexte familial. Notons que l'enseignante ne l'écarte pas, préférant l'exploiter pour justifier la nécessité de prouver un résultat obtenu par une procédure non comprise par tous : « *la technique de Maxine en a interrogé plus d'un. J'ai vu Léopold qui vérifiait le résultat Maxine. Donc là la preuve a pris tout son sens. Parce que là on fait un calcul avec la soustraction, et ensuite, comme on est pas très sûr de soi, on est obligé de le vérifier …* » (Val-S20-entr.post). Ici encore, nous observons l'enseignante utiliser et non écarter un ajout mésogénétique non prévu provenant d'une source extérieure à la classe : si elle ne s'appesantit pas sur la procédure en elle-même qui n'est pas à l'étude à cette étape-ci, elle en profite néanmoins pour conforter la nécessité de prouver un résultat et donc renforcer le sens de la preuve.

Pour conclure, Valentine a agencé le milieu didactique de façon à prendre en compte les connaissances des élèves. Elle s'appuie alternativement sur les procédures de résolution des élèves et des Schtroumpfs pour mener cette séance de formulation. Les quatre procédures qualifiées « d'importantes » dans le texte de l'ingénierie sont mises en regard avec les procédures des élèves et explicitées. Notons toutefois que la formulation de l'algorithme de la soustraction par cassage (celle du Grand Schtroumpf) est rendue possible par la porosité de deux systèmes didactiques différents, celui de la classe et celui de la famille.

2.2.4.2. Conclusions à propos de la cinquième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Valentine

Rappelons brièvement que l'enjeu de cette étape est de faire émerger de nouvelles procédures pour calculer une différence. Dans la continuité de la précédente, l'ingénierie présente, par l'intermédiaire de personnages fictifs, des procédures reposant sur la méthode de la fausse position. L'objectif est de réduire le nombre d'essais à deux puis un. Lors de la dernière séance de l'étape, les essais sont d'abord réduits à deux en testant un nombre entier de dizaines puis en ajustant avec les unités ou, inversement, en testant un nombre-unité puis en ajustant avec un nombre de dizaines, puis à un essai en présentant l'addition lacunaire. Il s'agit pour les élèves de comprendre et de dire (formuler) comment ces Schtroumpfs ont procédé.

Le tableau ci-dessous condense les éléments principaux du milieu didactique au fil de l'étape.

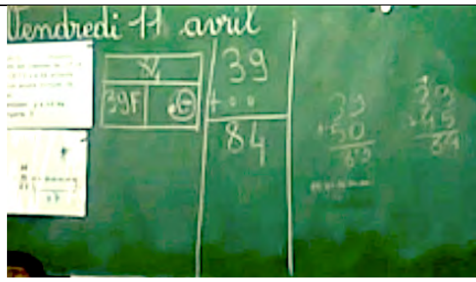
	Séance 19	Séance 20
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Alternance entre travail collectif et travail individuel
Catégorie de problèmes	Transformation : e t- E Combinaison : e E e	Transformation : e t- E Combinaison : e E e
Traces au tableau		
Matériel	Affiches (problèmes et procédures des Schtroumpfs) ; Fiche de travail individuelle ; boite et cubes	Affiches (problèmes et procédures des Schtroumpfs) ; Fiche de travail individuelle ;
Savoirs et/ou techniques mathématiques mobilisés	Nombres et propriétés dans le système décimal ; Addition ; Résolution par essai/erreur Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité. Ordre de grandeur à la dizaine près puis ajustement par translation (méthode de la fausse position). Preuve par addition (NP1, NP2)	Nombres et propriétés dans le système décimal ; Addition ; Résolution par essai/erreur Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité Ordre de grandeur à la dizaine près puis ajustement par translation (méthode de la fausse position). Preuve par addition (NP2) Addition lacunaire Algorithme de la soustraction par conversion.

Tableau 33 : synthèse des deux séances de l'étape 5 – « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » - du point de vue mésogénétique (Site Valentine)

Comme pour les étapes précédentes, Valentine retient les énoncés des problèmes ainsi que l'introduction de procédures de résolution par des personnages fictifs sans modifications. Néanmoins, l'enseignante s'écarte de l'ingénierie didactique dans la mise en œuvre des séances.

- Une étape relevant à la fois d'une phase de formulation et d'une phase d'action

L'ingénierie didactique présente cette étape comme une étape « de maïeutique où le maitre s'adresse à la classe ou à des élèves qu'il désigne » (Berté, 1996, p. 19), ce qui la différencie des étapes précédentes où les élèves devaient, dans un premier temps résoudre les problèmes puis, dans un second temps prouver leurs résultats ou débattre de leurs procédures. Dans cette étape, l'enseignante amène les élèves à analyser les procédures des Schtroumpfs par comparaison avec leurs propres procédures : « *Est-ce que ça ressemble à ce que vous faites ? Est-ce que vous feriez autrement ?* » (Val-S19-min 2 :47) ou bien « *hé bien je vous laisse résoudre le problème. Vous me cherchez le nombre de garçons, et ensuite on voit rapidement comment vous avez fait, d'accord ?*» (Val-S20-min 0 :00). Cette étape prévue initialement comme une phase de formulation se traduit, dans les mises en œuvre de Valentine, dans un premier temps, par une phase d'action (résoudre) avant d'évoluer vers une phase de formulation (expliquer/justifier). Aussi, les techniques de résolution et principalement la stratégie des essais émergée à l'étape précédente sont alors réinvesties par les élèves.

- Un agencement du milieu didactique différent de celui initialement prévu

<u>La méthode de la fausse position,</u> déjà apparue en fin d'étape précédente, prend une place significative dans le milieu didactique de cette étape. Ce sont les interactions entre les élèves qui, exprimant et comparant leurs procédures à celles du Schtroumpf Bricoleur (via la procédure affichée), assoient cette méthode dans le milieu didactique (S19-min 0 :47) de la séance 19. En discutant des implications du choix du premier nombre à tester, « *il vaut mieux partir du nombre qui dépasse pas* » (S19-min 9:21), ou encore « *il faut partir de 40 et on fait des moins* » (S19-min 9 :51) les élèves introduisent cette nouvelle technique dans le milieu didactique, technique utilisée à nouveau dans la séance suivante.

<u>L'ordre de grandeur à la dizaine près</u>, élément mésogénétique introduit dans la séance 19, ne devient efficient qu'à la séance suivante. En séance 19, conformément à l'ingénierie didactique, Valentine introduit dans le milieu didactique l'ordre de grandeur à la dizaine. Pourtant, bien qu'ayant lieu après « l'entrainement à l'ordre de grandeur », la consigne donnée par Valentine au second problème n'en tient pas compte : « *on essaie de le faire en*

deux fois. En ***se rapprochant le plus possible de ce nombre-là*** [désignant le nombre 91], *et puis après en en ajoutant ou en enlevant si on est trop près ou trop loin.* » (Val-S19-1h23 :40). Par contre, en séance 20, Valentine reprend l'ordre de grandeur à la dizaine près, en désignant explicitement à plusieurs reprises le premier nombre à tester comme un nombre de dizaines : « *Schtroumpfette, elle a travaillé sur le nombre de dizaines* » (min 19 :08) ; « *Regardez Schtroumpf Bricoleur, il n'a proposé que des nombres avec des dizaines entières. Même Schtroumpf Musicien …*» (min 29 :22).

- L'exploitation de la « technique anglo-saxonne» apportée par un élève

Comme observé dans le site genevois, un élève chronogène introduit dans le milieu didactique l'algorithme de la soustraction par cassage. Nous observons que Valentine n'écarte pas d'emblée cette technique (comme l'avait fait l'enseignante genevoise) mais utilise l'effet de surprise auprès des autres élèves pour demander de prouver le résultat obtenu par cette technique : « *Parce que là on fait un calcul avec la soustraction, et ensuite, comme on est pas très sûr de soi, on est obligé de le vérifier* » (Val-S20-Entr.post). En d'autres termes, cet ajout mésogénétique non prévu est exploité pour conforter un autre élément du milieu didactique (la preuve par addition). Valentine montre qu'elle profite de cette opportunité pour maintenir le rythme de l'apprentissage de la soustraction.

Pour conclure, si les éléments mésogénétiques prévus dans l'ingénierie didactique sont bien introduits dans le milieu didactique, ils ne sont pas forcément introduits ou utilisés dans l'ordre prévu par l'ingénierie. La conclusion de l'entretien « *tu vois, il faut y aller progressivement* » nous permet d'interpréter sa manière d'agencer le milieu didactique comme une volonté de rester au plus près de la progression de ses élèves.

Le tableau ci-après retrace l'évolution du savoir relatif à la construction d'un algorithme de la soustraction.

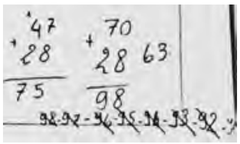
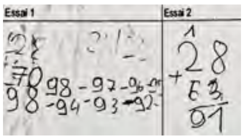
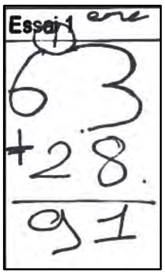
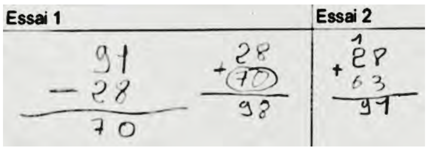
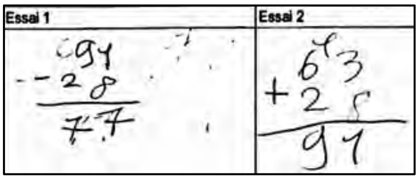
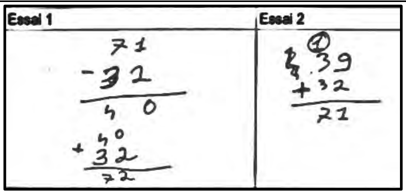
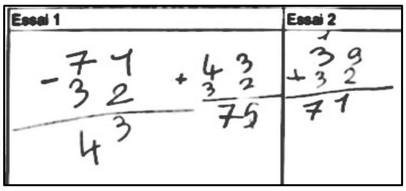
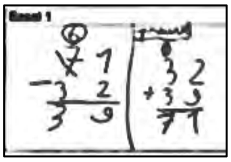
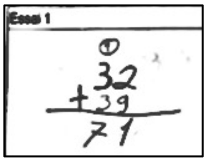
	séance 19	séance 20
Simulation des problèmes avec cubes	oui	non
Reconnaissance d'un problème soustractif	oui	oui
Traces significatives lors de la recherche individuelle	 procédure 1  procédure 2  procédure 3  procédure 4  procédure 5	 procédure 6  procédure 7  procédure 8  procédure 9
vérification empirique	non	non
Niveaux de preuve apparaissant au fil de la séance	NP2 ; NP4	NP1 ; NP2 ; NP4 ; NP5
Émergence de savoirs ou propriétés mathématiques	Ordre de grandeur à la dizaine près. Ajustement par translation (Méthode de la fausse position)	Ajustement par translation (Méthode de la fausse position) Addition à trous
Procédures de résolution	Résolution par essai/erreur Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité. Ajustement par translation d'un écart	Résolution par essai/erreur Recherche du complément par sur-comptage de 10 en 10 puis ajustement à l'unité. Ajustement par translation d'un écart Addition lacunaire Algorithme de la soustraction par cassage 1 dizaine contre 10 unités (intervention externe)

Tableau 34 : synthèse des deux séances de l'étape 5 – « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » - du point de vue chronogénétique (Site Valentine)

Les traces écrites des élèves ainsi que les interactions entre élèves au moment des débats collectifs montrent des avancées significatives du savoir sur plusieurs plans.

- Sur le plan de la preuve d'un résultat.

Les traces écrites montrent que l'addition est utilisée pour prouver un résultat :

- provenant d'un essai isolé : procédure 1
- provenant d'une tentative d'effectuer une soustraction en colonne : procédures 4, 5, 6, 7 et 8
- provenant d'une résolution par la technique du musicien (recherche d'un ordre de grandeur à la dizaine, puis ajustement à l'unité) : procédure 2

Les débats collectifs nous indiquent une maitrise plus fine de la preuve d'un résultat : les élèves ne développent pas le niveau de preuve NP2 si les niveaux de preuve NP3, NP4 ou NP5 suffisent à invalider un résultat. (*cf.* tableau synoptique 19, min 0 :47, 30 :01, 1h37 :15) et tableau synoptique 20, min 6 :59, 22 :23, 27 :41).

Valentine confirme par ailleurs un usage régulier dans les autres activités mathématiques, « *à côté aussi, pas seulement pendant l'ingénierie* » (Val-S20-entr.post). Ce réinvestissement « hors ingénierie » est un indice d'une compréhension du sens et de l'utilité de prouver.

- Au niveau des procédures

À cette étape dans l'ingénierie, les élèves mettent en œuvre diverses façons de faire pour résoudre les problèmes soustractifs mis à l'étude. Nous constatons qu'ils ne sont plus résolus de manière empirique : aucun élève ne s'appuie désormais sur le matériel ou sur un dessin. Les traces écrites des élèves montrent un réinvestissent des procédures étudiées lors des étapes précédentes mais aussi un « panachage » de procédures anciennes et de procédures venant juste d'être étudiées.

- Un essai isolé, puis la technique du musicien, c'est-à-dire la recherche d'un ordre de grandeur à la dizaine près suivi d'un ajustement à l'unité : procédures 1, 2
- La méthode de la fausse position, c'est-à-dire le test d'une valeur suivi d'un ajustement par translation d'un écart : procédures 4, 5, 6, 7
- L'addition lacunaire : si elle apparaît de manière isolée en séance 19, elle est plus fréquente en séance 20 : procédures 3 et 9

- Certaines erreurs opératoires perdurent

Plusieurs élèves continuent à effectuer une soustraction selon un algorithme calqué sur celui de l'addition. Les procédures 4, 5 et 8 montrent que certains élèves procèdent toujours en tenant un raisonnement quantitatif sur les chiffres des unités des nombres : les erreurs repérées à l'étape 4 (91 – 28 = 70 ou bien 91 – 28 = 77) subsistent toujours. On peut cependant penser que les élèves ont conscience que leurs calculs sont erronés puisque nous observons qu'ils enchaînent ensuite systématiquement avec un ajustement.

Pour conclure sur cette étape, Valentine est restée proche des visées de l'ingénierie : « améliorer le nombre d'essais en travaillant le choix du premier nombre » (Berté, 1996, p. 39). Elle s'est appuyée, dans l'action conjointe, tant sur les procédures existantes des élèves que sur les procédures proposées par l'ingénierie pour agir sur la chronogenèse d'un algorithme de la soustraction. Elle valorise la conversion de dizaines en unités en laissant progressivement de côté les autres possibles (fausse position, addition lacunaire) ce qui nous paraît conforter notre interprétation d'un primat porté sur la technique dans sa manière d'enseigner la soustraction. Néanmoins, nous pointons deux constats. Le premier, pleinement assumé par Valentine, est que la convergence vers une résolution en un coup n'est pas atteinte : « *Tous n'y arrivent pas en un coup pour l'instant, mais il y aura un moment où y aura le déclic. Ce n'est pas grave, tu vois.* » (Val-S20-entr.post). Le second constat concerne les erreurs de nature algorithmique (inverser les chiffres des unités des nombres par exemple) lorsque les élèves effectuent des soustractions pour lesquelles le chiffre des unités du second terme est supérieur au chiffre des unités du premier terme. Valentine ne pointe toujours pas explicitement, selon nous, la non-commutativité de la soustraction.

Comme nous l'avons fait pour Pascale, nous concluons l'analyse du cas de Valentine en produisant une interprétation macrodidactique du processus d'implémentation de l'ingénierie par cette enseignante. Il s'agit, sur la base des constats de l'analyse mésodidactique de chacune des séances et des constats établis au niveau des principales étapes de l'ingénierie de revenir sur nos questions de recherche afin de comprendre, ce qui dans la pratique observée, relève des influences du programme français et des déterminants liés à l'épistémologie pratique de cette enseignante française chevronnée.

3. Réflexions conclusives sur la mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans le site de Valentine : synthèse macrodidactique

Dans cette section, nous cherchons à distinguer ce qui, dans la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Valentine, relève des influences des pré-construits institutionnels, les programmes français d'enseignement des mathématiques en classe de CE1, de ce qui relève de déterminants liés à l'épistémologie pratique de cette enseignante chevronnée. Les tableaux ci-dessous synthétisent le déroulement de la mise en œuvre de l'ingénierie par Valentine au regard de celui prévu initialement par l'ingénierie.

Étape 1 : **L1, L2, atelier, C1**	**Étape 2 :** **L3, L4, L5**	**Étape 3 :** **L6 & C2, L7, ateliers, L8**	**Étape 4 :** **L9, L10, L11**	**Étape 5 :** **L12, L13**	**Étape 6 :** **L14, L15**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**« L'addition comme moyen de preuve d'un résultat. »**	**« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signe + et – Calcul mental »**	**« La stratégie des essais »**	**« Réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs »**	**« La soustraction »**

Tableau 35 : vue synthétique de l'ingénierie didactique (Berté, 1996)

Étape 1 : 3 séances	**Étape 2 :** 5 séances	**Étape 3 :**	**Étape 4 :** 4 séances	**Étape 5 :** 2 séances	**Étape 6 :**
Dévolution de la soustraction Un sens privilégié : la recherche d'un reste après retrait	Automatisation de la preuve par addition pour prouver un résultat.	Techniques de calcul mental Introduction du codage des opérations. Différentes écritures pour un même nombre.	La preuve addition par addition devient un outil de résolution des problèmes propice à la technique des essais.	Analyser des procédures et rechercher un algorithme opératoire	« La soustraction »

Tableau 36 : vue synthétique de la mise en œuvre de l'ingénierie par Valentine

Avant de mettre en exergue les déterminants qui ont influé sur le déroulement didactique de la séquence, nous précisons quelques points qui nous semblent essentiels à l'intelligibilité de la mise en œuvre par Valentine et son usage de la ressource didactique que constitue l'ingénierie broussaldienne de la soustraction.

Le premier point à relever concerne le niveau des élèves de la classe de Valentine. Si comme nous l'avons vu, elle la considère comme hétérogène avec « *une bonne tête de classe qui tire vers le haut* » (Val-Entr.vol-02/09/2013), nous considérons que les interactions entre élèves ainsi que leurs productions écrites témoignent dès le début de l'année d'habiletés opératoires certaines. Nous avons en effet pointé que dès la première séance, les élèves introduisent dans le milieu didactique le système de numération décimal, le répertoire, ainsi que l'équivalence en contexte des égalités a - b = c et a - c = b. Par ailleurs, l'enseignante considère que l'activité de résolution de problème est centrale pour les apprentissages en mathématiques mais aussi dans les autres disciplines. Ainsi dans cette classe, « *les enfants ont l'habitude de chercher et ils savent qu'il peut y avoir plusieurs procédures pour trouver la même réponse* » (Val-S1-Entr.post). Ces points soutiennent l'interprétation selon laquelle Valentine pense être en mesure d'introduire l'ingénierie didactique sans que cela ne change fortement les habitudes des élèves.

Ainsi, Valentine lie l'ingénierie à tous les autres domaines mathématiques, voire quand elle en a l'occasion, aux autres disciplines enseignées. Faisant le parallèle avec l'enseignement du français elle déclare « *Aujourd'hui, la production d'écrit est un moyen de travailler l'orthographe et la grammaire. Et en fait, c'est un peu ce que l'on fait en travaillant avec cette ingénierie, des liens entre les domaines mathématiques* […] *Dans cette ingénierie, on fait de la résolution de problème* (ici au sens générique) *tout en travaillant sur la connaissance des nombres, on travaille sur ranger, comparer, la numération etc. ...* ». L'ingénierie didactique est pour elle une ressource lui permettant, ainsi qu'elle le dit, de donner « *une cohérence à* [sa] *pratique* [d'enseignement]». Par ailleurs, lors des différents entretiens *ante* et *post*, Valérie nous a plusieurs fois mentionné l'importance qu'elle accorde au langage, au fait de laisser les élèves s'exprimer : « *Et puis, en général, je veux dire pour tout, les laisser dire les choses comme ils veulent, c'est intéressant. Parce que là, tu sais ce qui se passe. Tu peux ensuite réagir, orienter.* » (Val-S1-Entr.post). Nous pensons pouvoir dire que l'adhésion de Valentine à la démarche de résolution de problème préconisée dans les textes officiels français (voir chapitre 1 des résultats), l'importance donnée au langage. Enfin la manière dont elle considère l'ingénierie didactique dans cet ensemble, indique non seulement un certain assujettissement à la rhétorique constructiviste qui traverse l'ensemble du programme français pour l'école primaire, ainsi que la marque de son épistémologie professionnelle de maître formateur.

Aussi l'ingénierie didactique qui alterne recherche individuelle et recherche collective ne la met pas *a priori* en contradiction avec sa propre épistémologie pratique : « *faire verbaliser par l'enfant aussi à l'oral, je trouve que ça permet, de parler vraiment du problème, de le comprendre, de mettre du sens dans le problème* ». Cependant, les constats effectués au fil des étapes montrent que certaines dimensions de son épistémologie pratique viennent se confronter à l'esprit de l'ingénierie didactique.

La première étape de l'ingénierie didactique a pour principal objectif de dévoluer aux élèves le projet d'apprendre à résoudre des problèmes soustractifs. Comme il est prévu dans l'ingénierie, Valentine alterne recherches individuelles et débats collectifs pour amener les élèves à résoudre puis à vérifier empiriquement leurs réponses. Néanmoins, elle tient une position topogénétique haute lors des simulations des problèmes avec le boite et les cubes. Nous remarquons que tous les problèmes de cette étape sont joués selon « un tout auquel on soustrait une partie » alors même que certaines procédures d'élèves montraient déjà la détermination d'une différence par la recherche d'un complément (*cf.* tableaux synoptiques 11 et 12). Par ailleurs, lors de l'entretien *post* de la première séance, elle déclare « *les élèves n'ont pas encore associé la soustraction à enlever mais ce n'est pas gênant dans la mesure où, en fait, ils sont parvenus à trouver des solutions quand même* » (Val-S1-entr.post). Ces deux indices sont pour nous révélateurs du rapport épistémique que Valentine entretient à l'opération « soustraction » : pour elle, cette opération traduit un retrait. Nous avons vu une illustration de ce point en séance 2 à propos d'Emma, une élève qui tendait à simuler la recherche d'un complément « ... *j'ai eu peur que l'addition perturbe tout le monde* » (Val-S2-Entr.post). Nous pointons ici d'une part un premier indice d'une élémentarisation des savoirs visés, et d'autre part une manière d'agir récurrente (tout au long de cette première étape) en occupant une position topogénétique haute qui, d'une certaine façon, limite la dévolution de la situation initiale telle que voulue dans l'ingénierie.

L'étape 2 prévoit trois leçons pour l'émergence de l'addition pour prouver un résultat obtenu par une quelconque procédure. Valentine la développe en cinq séances. Plusieurs éléments mis au jour lors de l'analyse mésodidactique permettent de comprendre la position de Valentine « *ça paraît simple sur le papier, mais ça l'est pas du tout !* » :

(i) La recherche d'un complément (par l'addition lacunaire) et la vérification d'un résultat (par l'addition) engagent la même opération. Aussi, cela génère une confusion entre procédure de résolution et procédure de vérification, confusion que Valentine exprime par « *après tout la frontière elle est toujours ténue entre procédure de résolution quoi, la procédure et la vérification…pour certains* » (Val-S7-Entr.post).

(ii) Le contrat didactique pérenne à la classe retient les élèves dans l'explicitation de procédures de résolution, dont justement celle par recherche du complément. Les séances 4 et 5 de l'étape 2 montrent les élèves avancer des réponses sur leurs procédures alors que Valentine attend une preuve.

(iii) Nous avons vu tout au long de l'étape 2 que l'aspect techniciste, trait que nous avons identifié à plusieurs reprises, prédomine. Ce point nous amène à considérer que la visée de cette étape dans la mise en œuvre de Valentine relève de l'automatisation de la preuve par addition pour prouver un résultat et non de ce qui est au cœur de l'ingénierie « L'addition comme moyen de preuve d'un résultat » (Berté, 1996, p. 13). Prouver un résultat n'est pas une pratique habituelle au cycle 2. Valentine déclare pourtant l'enseigner en même temps que la technique opératoire : « *je parle de la soustraction posée, pour vérifier ton résultat, en fait, on va procéder par addition, c'est-à-dire faire le contraire. Souvent, avec les élèves, je cache le nombre de départ et on additionne.* […] *Avec la technique opératoire de la soustraction, heu lorsqu'on l'a posée en fait la soustraction,* [lorsqu']*on l'a calculée, d'accord, au cycle 3 on insiste sur la vérification par addition.* » (Val-S5-S6).

L'enseignante relève cette difficulté de démarquer la procédure de résolution de la procédure de vérification. « *Je ne sais pas comment le verbaliser je n'y arrive pas. Il y a ce problème entre vérification et résoudre* […] *pour moi c'est clair, mais comment le transmettre, tu vois ça c'est pas clair* » (Val-S5-Entr.post). Aussi, elle réagit par une prise de position topogénétique haute ainsi qu'une automatisation de la preuve comme nous l'avons souligné lors des analyses : « *maitriser, la mettre en œuvre régulièrement, la ritualiser, la systématiser* » (Val-S8-Entr.post). Nous pointons donc une sorte de paradoxe dans les mises en œuvre observées : d'une part Valentine souhaite amener les élèves développer leur capacité de résolution de problème (au sens générique) mais dès lors que la question de la preuve impose un remaniement de ses manières de faire usuelles, revient sur le devant de la scène didactique une tendance à valoriser les dimensions technicistes liées à l'automatisation. Nous pointons ainsi des tensions en terme d'épistémologie pratique pour cette enseignante chevronnée.

Par ailleurs, le pari, objet didactique dans l'ingénierie, est perçu par Valentine que comme un objet ludique, motivant, incitant à une participation accrue de certains élèves : « *l'idée du pari, moi, je trouve ça bien. Surtout à cet âge-là.* […] *Quelquefois il y a des enfants qui, quand ils se sentent en difficulté, ne disent rien. Tandis que là, je pense que j'ai* *des réponses partout. Tu vois. Tout enfant s'est motivé pour chercher une solution.* » (Val-S8-Entr.post). Nous considérons ici qu'en réalité, Valentine n'accède pas aux soubassements didactiques de l'ingénierie didactique. Ce sont les traits de surface de nature « pédagogique » ou « motivationnel » qui retiennent son attention. Valentine ne perçoit pas le pari comme un objet didactique qui, par ses effets rétroactifs (gain ou perte du pari), a justement pour fonction de faire émerger le sur-comptage, puis l'addition comme procédure de preuve. De ce fait, il n'est pas étonnant que cet objet disparaisse rapidement du milieu didactique. Elle n'a alors pas d'autre choix que d'introduire elle-même cette preuve en l'automatisant, misant sur le fait que « *le sens viendra avec la pratique* » (Val-S6-Entr.post). Ici se confirme un aspect de son épistémologie pratique qui met au premier plan l'idée que, par la répétition, on puisse acquérir le sens d'un concept. Les observations menées lors de l'étape 3, non rapportées en détail dans notre analyse, confirment nos interprétations sur l'importance de la répétition des techniques de calcul comme moyens d'avancer dans les apprentissages pour cette enseignante.

Il reste que ces interprétations d'un décalage entre l'épistémologie de l'ingénierie didactique et les mises en œuvre de Valentine, trouvent dans la suite des mises en œuvre (étapes 4 et 5) se voient atténuées, comme nous l'avons vu au fil des analyses mésodidactique. L'objectif de la quatrième étape est de développer des stratégies pour résoudre des problèmes en un minimum d'essais. Nous retrouvons ici une pratique habituelle des enseignants inscrite dans les programmes officiels : résoudre des problèmes (*cf.* section 2.3.1 du chapitre 1 de cette partie). Valentine profite de cette étape pour consolider, par la répétition, la preuve par addition. Nous l'observons, mobilisant un topos en surplomb, passer d'élève en élève, afin de s'assurer de cette vérification. Par ailleurs, l'incitation à résoudre en faisant le moins d'essais possible concourt à faire émerger des procédures plus efficaces. Pour autant, et bien que certains niveaux de preuve apparaissent, Valentine ne les exploite ni pour pointer des erreurs d'ordre algorithmique dans les procédures des élèves, ni pour justifier de la non-commutativité de la soustraction. Notre hypothèse est que l'enseignante agit ici sous couvert des textes institutionnels dont nous avons vu qu'ils sont très prégnants pour elle, notamment sur l'importance transversale aux disciplines de la résolution de problème et de l'importance du langage. Les programmes français, rappelons-le, renvoient la résolution de problèmes en bout de chaine d'apprentissage. Il n'est donc pas surprenant que Valentine perçoive cette étape comme un aboutissement, voire une application de savoirs acquis précédemment et non comme une étape pouvant initier *le sens* d'un algorithme opératoire, notamment en le différenciant de l'algorithme de l'addition. Pour autant, dans une volonté d'avancée chronogénétique, nous avons pu mettre en évidence une certaine habileté à rester (lors de l'étape des essais et de l'étape des schtroumpfs) dans « l'esprit de l'ingénierie ».

- Valentine initie par une démonstration empirique l'algorithme de la soustraction par cassage (conversion de la dizaine en unité). Cette introduction à cette étape 4 de l'algorithme de la soustraction par cassage a permis de pointer un autre trait de son épistémologie pratique, qui la porte plus vers des dimensions ostensives (utilisation de traces affichées, contrat d'ostension renforcé) que vers l'exploitation de production d'élèves (en l'occurrence, ici, la non-exploitation des erreurs typiques, ou des actions pertinentes des élèves) que nous avons indiquées au fil de l'analyse.
- La cinquième étape a pour objectif de faire analyser des procédures non présentes dans le milieu didactique et de réduire le nombre d'essais pour converger vers une procédure en un coup. Les procédures présentées préparent en réalité à l'algorithme de l'addition lacunaire. Dans cette étape, nous observons Valentine se rapprocher des objectifs de l'ingénierie didactique et faire preuve d'ingéniosité[93] en incitant les élèves à comparer leurs procédures de résolution aux procédures proposées par l'ingénierie. De ce fait, Valentine rend l'analyse de procédures, tâche inhabituelle dans le quotidien de l'élève, plus accessible et surtout déplace l'étape sur le terrain de l'algorithme. Les élèves ne sont plus alors centrés sur la résolution d'un problème, mais sur l'analyse et la recherche d'algorithmes pour effectuer une soustraction. Nous avons alors vu comment, maintenant une position topogénétique basse, Valentine n'intervient plus que pour relancer la recherche. Deux procédures prennent finalement place officiellement dans le milieu didactique : une méthode « en deux coups » c'est-à-dire la méthode de la fausse position (*cf.* section 1.1 du titre 1 de ce chapitre) et une méthode « en un coup » c'est-à-dire l'algorithme de l'addition lacunaire (*Ibid.*). Par ailleurs, un autre trait de l'épistémologie pratique de l'enseignante, se manifeste dans le « laisser dire, laisser verbaliser » : elle laisse une élève introduire dans le milieu didactique un objet extérieur à la classe, l'algorithme de la soustraction par cassage : « *Et puis après on a le super Schtroumpf ! Tu as vu ? On a eu des recettes, des révélations ! Maxine, c'était sa maman, elle est super fort en maths sa maman !* » (Val-S20-entr.post). Profitant de cette intervention, Valentine fait prouver le résultat obtenu par Maxine pour ensuit justifier la nécessité de

[93] au sens du génie didactique (Mercier et al. , 2001)

continuer un apprentissage pour effectuer les soustractions comme cette élève. La transition vers l'étape 6, plus technique, est ainsi assurée.

Pour conclure sur cette seconde partie de mise en œuvre de l'ingénierie, nous pouvons dire que Valentine mobilise son ingéniosité professionnelle (son sens du métier) en faisant comparer les procédures des élèves et les procédures des Schtroumpfs. Ses manières de faire, non toujours idoines avec celles proposées par le texte de l'ingénierie, permettent toutefois de déplacer tous les élèves sur le terrain de l'algorithme. Nous voyons ici le jeu combiné (comme pour Pascale dans le site Suisse, mais sur d'autres dimensions) des déterminants institutionnels (certaines dimensions pédagogiques des préconisations) et de déterminants relevant de l'épistémologie pratique de cette enseignante (sa capacité à osciller entre exigences technicistes sur des savoirs élémentarisés, et gestion des échanges dans la classe permettant aux élèves de raisonner sur des procédures). En se calant sur une position topogénétique basse Valentine réussit à faire émerger certains éléments décisifs (La méthode de la fausse position et l'addition lacunaire). Une élève importe depuis le système didactique familial un algorithme technicisé de la soustraction, qui trouve dans le milieu un espace possible d'exploitation. La situation, bien que réduite à cette procédure, permettra la transition avec l'étape suivante qui elle est très technique puisque portant sur cet algorithme. Nous soulignons dans cette « récupération » du sens de l'ingénierie au fil de sa mise en œuvre, par-delà les difficultés identifiées autour du premier obstacle (le pari : étape clé de l'étape 2) ce que nous pensons pouvoir attribuer en partie à l'expérience de cette enseignante chevronnée.

L'analyse du troisième cas, celui d'une enseignante française ayant une expérience plus récente dans l'enseignement, nous permet dans la section qui suit de poursuive notre enquête comparatiste.

Titre 4. ANALYSE DES PRATIQUES D'UNE ENSEIGNANTE EN DEBUT DE CARRIERE EN FRANCE

1. Contexte de l'observation

1.1. Caractéristiques de l'enseignante et de la classe observée

Avant de devenir professeure des écoles, Caroline a d'abord été enseignante en Français Langue Étrangère (FLE) dans un centre de formation pour adulte. Elle a actuellement une expérience d'enseignement de sept ans en école primaire. Titulaire remplaçante la première année, elle a ensuite occupé des postes la plupart à double niveaux. Caroline a une expérience d'enseignement pour le niveau CE1 de 5 ans. Elle considère connaître relativement bien le programme scolaire relatif au cycle 2 et suit régulièrement des stages de formation continue pour se maintenir à niveau dans les différentes parties du programme à enseigner à l'école primaire. Intéressée par la formation pour adulte, elle envisage préparer le CAFIPEMF[94]. En référence aux travaux d'Huberman (1989) sur la vie des enseignants, Caroline peut être considérée comme une enseignante en stabilisation, sa participation volontaire à la recherche collaborative peut être interprétée, à la suite d'Huberman, comme une entrée dans une phase de sa vie professionnelle caractérisée « d'activisme » par l'auteur, en référence à des enseignants désireux de relancer leur activité professionnelle par une implication accrue.

La classe observée est dans une école à la périphérie d'une ville de taille moyenne, d'un niveau socio-économique modeste. Il s'agit d'un cours double réunissant des élèves de CE1 et de CE2. Le groupe du niveau CE1 est composé de 16 élèves. Caroline le qualifie de « *très hétérogène* », avec de bons élèves mais aussi avec plusieurs élèves très faibles, sachant à peine lire. « *Le groupe de CE1 est très hétérogène. Il y a de très bons élèves, et d'autres en très grandes difficultés. Jonas, Loane lisent bien, Loïc, Océane ont énormément de difficulté en lecture. Et même en numération. J'ai deux assistantes de vie scolaire pour m'aider. À l'écrit, l'AVS leur relit tout, ou les aide à lire ça dépend… Petit à petit, on s'en sort…* » (Car-entr.ante.seq).

[94] CAFIPEMF : Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maître Formateur

1.2. Caractéristiques du fonctionnement pédagogique de la classe

Une première caractéristique de la classe de Caroline est liée au fait qu'il s'agit d'un cours à double niveau. Le considérant *« comme deux classes différentes »*, l'enseignante alterne les cours entre le CE1 et le CE2 : « *la disposition de la classe est organisée comme ça, puisqu'il y a deux tableaux. Les groupes se tournent le dos. Donc en fait, je jongle sans cesse, je calcule… par exemple pour une séance qui dure une heure, je vais faire un quart d'heure CE1, un quart d'heure CE2. J'alterne les moments de présence avec les deux groupes.* » (Car-entr.ante.seq). Cette organisation est spécifique au français et aux mathématiques, les autres enseignements ayant lieu en classe entière ou lors de décloisonnements au sein de l'école.

L'enseignante déclare avoir modifié l'organisation spatiale du groupe CE1 afin de répondre aux besoins de l'ingénierie : « *en fait j'ai changé la disposition, pour l'ingénierie. Avant ils étaient comme les CE2. J'ai changé parce que beaucoup de choses se passent à l'oral. Il faut que la boîte soit visible par tous les élèves, donc j'ai changé aussi à cause de ça.* » (Car-entr.ante.seq). Nous présentons ci-dessous un plan de la classe en tenant compte des deux niveaux.

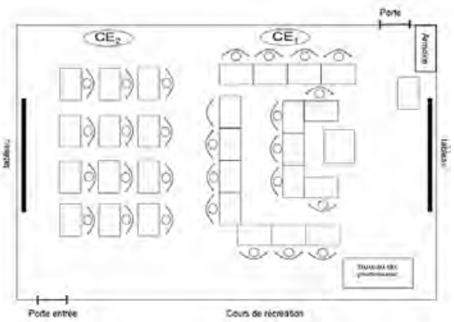


Figure 58 : organisation spatiale de la classe de Caroline

La deuxième caractéristique relève de la place que Caroline donne habituellement à la résolution de problème dans la programmation de son enseignement en mathématique. Elle nous déclare avoir jusqu'à présent toujours donné à la résolution de problème « *une place à part* […] *Un jour dans la semaine on faisait des problèmes. Plutôt en fin de semaine. Avec ce qu'on avait fait en début de semaine.* » (Car-S10-entr.ante.séquence). Pour Caroline, « *faire un problème, c'était à apprendre à résoudre un problème, trouver les données utiles, les données inutiles, bien répondre à la question… C'était pas un prétexte à autre chose. C'était presque un aboutissement si tu veux…* » (*Ibid.*).

La troisième caractéristique est que Caroline maintient un travail mathématique en parallèle avec la mise en place de l'ingénierie de la soustraction. Elle utilise le fichier

« Compagnon Maths » édité par SEDRAP [95] pour travailler les autres domaines du programme, mais aussi pour consolider les élèves en numération : *« Tu peux pas faire directement l'ingénierie si avant ils ne maitrisent pas un peu la numération. »* (Car-S10-Entr.post). Le calcul mental, activité quotidienne, lui permet de mobiliser des savoirs relatifs au nombre ou d'automatiser des procédures de calcul (Car-S11-Entr.post). Nous notons là un premier indice concernant la manière dont Caroline met en œuvre l'esprit des textes officiels sur la thématique « résolution de problème », et d'autre part nous pointons son souci de faire avancer les élèves sur les questions numériques dont on a vu en chapitre 1 des résultats qu'elles constituent un point important du programme des mathématiques de cycle 2 en France. L'analyse des mises en œuvre de l'ingénierie devrait nous amener à affiner cette première interprétation.

2. Descriptions synoptiques des différentes étapes dans la classe de Caroline

De la même façon que pour les sites d'observation précédents, nous menons une analyse de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique à partir d'analyses mésodidactiques des séances de chacune des étapes afin de construire *in fine* une interprétation macrodidactique sur l'usage fait par Caroline de la ressource didactique que constitue l'ingénierie broussaldienne.

2.1. Modalités temporelles de mise en œuvre de l'ingénierie didactique

Comme pour les deux autres sites d'observation, nous mettons en regard l'implémentation de l'ingénierie didactique par l'enseignante avec la structure de l'ingénierie didactique telle qu'elle est décrite dans le document de référence (Berté, 1996)

[95] SEDRAP est un éditeur scolaire pour la maternelle, le primaire et l'élémentaire.

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique « la soustraction à l'école élémentaire »	Leçons
1	Dévoluer l'apprentissage de la soustraction	Leçon 1
		Leçon 2
		Ateliers de soustraction
		Contrôle 1
2	L'addition comme moyen de preuve	Leçon 3
		Leçon 4
		Leçon 5
3	Sens et vocabulaire de la soustraction Introduction des signes « + » et « - » Calcul mental	Leçon 6 et contrôle 2
		Leçon 7 et contrôle 3
		Ateliers jeu de la boîte
		Exercices sur les écritures
		Leçon 8
4	La stratégie des essais	Leçon 9
		Leçon 10
		Leçon 11
5	Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs	Leçon 12
		Leçon 13 et contrôle 4
6	La soustraction	Leçon 14 et contrôle 5
		Leçon 15

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique implémentée par Caroline — Séances	
1	Séance 1	42 min
	Séance 2	44 min
	Séance 3	n. d.
	Séance 4	n. d.
2	Séance 5	50 min
	Séance 6	50 min
	Séance 7	40 min
3	Séance 8	55 min
	Séance 9	50 min
	Séance 10	55 min
	Séance 11	38 min
	Séance 12	n. d.
	Séance 13	41 min
	Séance 14	1h22
4	Séance 15	30 min
	Séance 16	56 min
	Séance 17	25 min
5	Séance 18	53 min
	Séance 19	60 min
	Séance 20	30 min
6	Séance 21	60 min
	Séance 22	40 min

n. d. : vidéos non disponibles

Tableau 37 : Vue synoptique des séances mises en œuvre dans la classe de Caroline au regard de l'ingénierie initiale

Nous observons que l'enseignante aménage l'ingénierie didactique en la déroulant sur 22 séances, en notant d'emblée que l'expansion du temps concerne deux étapes : l'étape trois, relative à l'introduction des signes « + » et « - » et centrée sur le travail de la technique, que nous n'analysons pas de façon approfondie comme précédemment explicité ; l'étape cinq relative à l'analyse de procédures de personnages fictifs.

Les séances ont lieu régulièrement une à deux fois par semaine et ont une durée en moyenne de 45 minutes ce qui correspond traditionnellement à la durée d'une séance de mathématiques à l'école primaire. Bien qu'habituée à partager son temps entre les deux niveaux de sa classe, l'enseignante ne modifie pas les séances. Elle aurait pu par exemple les découper de façon à se rapprocher de son fonctionnement coutumier dans la gestion d'un cours à double niveau. Ainsi, bien qu'admettant dans le premier entretien *post* que d'ordinaire elle est « *rarement comme ça trois quarts d'heure non-stop avec un groupe* [CE1] », elle exprime sa volonté de « *d'essayer de rester comme ça… d'organiser le CE2 autrement* » (Car-S1-entr.post).

2.2. Analyse des étapes de l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Caroline

Rappelons que nous cherchons à dégager les traits caractéristiques de la mise en œuvre de chacune des étapes

2.2.1. Analyse de l'étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »

Afin que les élèves prennent à leur charge l'apprentissage de la soustraction, l'enjeu principal de cette étape consiste à dévoluer aux élèves un premier moyen de résoudre des problèmes soustractifs en les modélisant grâce à un milieu matériel constitué d'une boite et de cubes.

2.2.1.1. Analyse mésodidactique des séances

Les synopsis de séance constituent le matériau de condensation des données permettant l'analyse mésodidactique. Dans ce qui suit et comme pour les deux précédents sites, nous indiquons entre parenthèses le repère temporel du synopsis auquel se réfère notre interprétation, nous rappelons aussi que les extraits de verbatim ont pour objet de concrétiser le propos. Pour des raisons techniques, la séance en ateliers ainsi que le contrôle n'ont pu être filmés.

2.2.1.1.1. Séance 1

Le synopsis en page suivante décrit le déroulement de la séance d'une durée de 42 minutes. L'objectif déclaré de l'enseignante est de « *faire rentrer les élèves dans le projet d'apprentissage de la soustraction, en leur présentant différents problèmes que l'opération sert à résoudre. Et leur montrer qu'on peut modéliser des situations de soustraction grâce à la boîte. Donc dans un premier temps la boite va les aider à résoudre et puis ensuite ça sera juste une vérification.* » (Car-S1-entr.ante). Nous observons que l'enseignante cite à quelques mots près le texte de l'ingénierie didactique. Ainsi, elle a retenu l'idée de « *transmettre aux élèves le projet d'apprendre à résoudre les problèmes de soustractions* » (Berté, 1996). Ce premier constat nous laisse penser que cette enseignante en phase de stabilisation et d'engagement actif dans sa carrière est attentive à rester fidèle et dans le texte, et dans la forme, à l'ingénierie didactique de Brousseau.

Rappelons que lors d'un entretien précédant la mise en œuvre de l'ingénierie, Caroline avait déclaré ne pas initier la construction de concepts mathématiques par la résolution de problèmes, mais réserver un temps particulier, généralement en fin de semaine, à la résolution de problème pour réinvestir, utiliser les notions mathématiques apprises auparavant. Aussi, les élèves ne sont pas habitués à résoudre des problèmes sans être outillés.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves.
0 :00			Le professeur présente la séance : Résoudre des problèmes	
2 :30	**Problème 1 :** Dans un parking il y a 32 places. On a garé 14 voitures. Combien de voitures faut-il mettre encore pour que le parking soit plein ?			
4 :40	Ind.	chercher	P écrit l'énoncé au tableau. Puis le relit après Renaud	Renaud lit l'énoncé puis les élèves recherchent sur ardoise.
8 :01	Col.	Résoudre / corriger	P récolte les réponses : 22 / 42 / 46 / 18 / à Jonas et Loane : « *Pourquoi ces deux ne sont pas possibles 42 et 46 ?* ». **P simule le problème sous la direction des élèves : une barre de 10 cubes et 4 cubes attachés dans la boite puis, sous la direction des élèves, ajout par sur-comptage de cubes jusqu'à 32 :** « *comment on peut savoir combien on en a rajouté ?* » P passe la main aux élèves.	Réactions spontanées : 2 valeurs sont déclarées impossibles : Jonas : « *euh quand même **42 c'est un peu plus que 32 alors euh 42 ça peut pas** quand même* » Loane : « ***et 46 aussi*** » Théo sort les 14 cubes puis compte le nombre de cube restant dans la boite : on en trouve 18. **Retrait dynamique**
10 :02			« *on va apprendre justement à faire des petits problèmes comme ça grâce à la boîte* »	
10 :0 4	**Problème 2 :** Il y a des cubes dans la boite. L'enseignante ne le dit pas aux élèves, montre rapidement le contenu de la boite et demande : « combien y en a-t-il ? »			
	Col.		« *Pourquoi vous ne savez pas ?* »	Réactions des élèves : « *on sait pas* » Jonas : « *tu nous as rien dit* » Amusement. « *Il faut les compter !* » Une élève vient les compter : 17
12 :52	**Problème 3 : «** alors donc maintenant que vous savez qu'il y en a 17, des cubes dans la boîte, j'en prends une poignée…			
15 :18	Col.	Résoudre …. ! Débat collectif	P : « *c'est ce que je vous demande justement. Écrivez une réponse sur votre ardoise* » P demande à un élève de venir compter, ce qui reste dans la boite (11) puis les cubes dans sa main : (6) P : « *alors qu'est-ce que je vous ai fait là ? Est-ce que c'est des problèmes ?* P reprend les propos de Jonas pour introduire le mot devinette.	Un élève anticipe sur la question : « combien tu en enlèves ? » Réactions : « *on peut pas savoir.* » Jonas lève les bras au ciel et se détourne ostensiblement. Les élèves écrivent quand même une réponse : 10 / 7 / 8 mais : « *on peut jamais croire* », « *il faut compter pour savoir* » Jonas : « *On peut on peut pas savoir (inaudible). En fait tu ne donnes pas une heu… une petite heu une petite devinette. Je peux pas comprendre…* »
17 :08	**Problème 4 :** il y a 16 cubes dans la boîte. J'en enlève 8. Combien en reste-t-il ?			
19 :51	Col.	Débat collectif	P écrit le problème au tableau. P puis réécrit le problème : « *il y a dans la boite : 16 j'en enlève 8 il en reste :…* » P : « *comment on peut comment peut faire pour savoir si vous avez raison ou pas ?* » P donne raison à Théo et demande à Océane d'aller simuler le problème	Loane lit le problème. Tous ont trouvé 8 Océane → **comptage sur les doigts**. Théo → **répertoire** : « *sinon on peut faire 8 et 8 seize et on en enlève huit et ça fait 8* ». Océane simule le problème : 16 cubes dans la boite puis retrait de 8 cubes.
22 :56	**Problème 5 :** je mets 5 cubes dans la boîte combien faut-il que j'en mette encore pour qu'il y en ait 16 en tout ?			
			P écrit le problème au tableau.	Yanis lit le problème.
24 :30	Ind.	Chercher		Les élèves cherchent. Jonas répond quasiment instantanément. **Dessins**
24 :57	Col.	Débat collectif	P recense les réponses : 11 / 16 puis demande à Charlotte (qui a trouvé 16) de « *vérifier* »	Aide de Théo : « *on part de cinq* » Charlotte rajoute des cubes en **surcomptant** jusqu'à 16, puis enlève 5 cubes et dénombre ceux qui restent.
29 :52	**Problème 6 :** il y a 16 cubes dans la boîte, j'en enlève 14. Combien en reste-t-il ?			
			P écrit le problème au tableau.	Ashley lit le problème.
30 :56	Ind.	chercher	P recense les réponses : 2 / 8	Renaud compte sur ses doigts. Emma et Yannis dessinent. Réponses immédiates pour d'autres
31 :27	Col.	Débat collectif	P aide Renaud à simuler. *P : « d'accord donc vous avez chacun des méthodes différentes. Pour le faire pour l'instant on ne s'en occupe pas de la façon dont vous faites. »*	Renaud (qui a trouvé 8) simule le problème : 16 cubes dans la boite, puis en enlève 14. Reste 2. Loane : « *aussi parce que quatre plus deux égale six* » *(Répertoire / complément)*
34 :56	**Problème 7 :** il y a 16 cubes dans la boite j'en enlève 2, combien en reste-t-il ?			
		chercher	P énonce le problème en modifiant les valeurs numériques du précédent.	
36 :05	Col.		P recense les réponses : 14 / 13 / 4 / 3	Réponses quasi instantanées
36 :45		Corriger Débat collectif	P demande à Ashley de « *vérifier* »	Ashley simule le problème : 16 cubes dans la boite puis retrait de 14 cubes Nicolas : « ***quand on enlève 2 on descend de 2 et [inaudible] et ça va faire 14*** »
38 :28	**Bilan :** « *je voudrais connaître vos impressions sur ce que nous venons de faire, si vous avez des choses à dire, des remarques, des difficultés* »			
40 :50	Col.	réponses des élèves en terme de procédure et non de difficultés. Loane : « *facile : tu écris au tableau* […] *on a le calcul dans la tête* ». Renaud « *je compte sur mes doigts* ». Loïc dessine. Jonas : « *j'aimais pas trop quand tu as fait les devinettes* ». Théo, Anatole « *je compte dans ma tête* » P : « *A quoi sert la boite ?* » Océane : « *pour savoir comment… pour savoir combien euh il y en a, qui c'est qui a raison* »		
42 :40	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 25 : séance 1, site Caroline (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Dans cette séance, tous les problèmes tirés de l'ingénierie sont d'abord lus par un élève puis par l'enseignante, les élèves sont ensuite invités à rechercher individuellement leur solution. L'enseignante oblige ainsi tous les élèves à entrer dans un processus de recherche. Dès le premier problème, certains élèves répondent selon l'usage du contrat en cours relatif à l'addition, à savoir : pour tout problème posé par la maîtresse dont la formulation contient deux nombres, la réponse consiste à ajouter les deux nombres. La réponse 46 (min 0 :01) n'est pas remise en question par l'enseignante elle-même mais par d'autres élèves, « *que c'est plus que 32* », écartant du même coup une autre réponse, 42. Dès le début de la séance, les élèves reçoivent donc le message implicite que l'addition ne sera pas forcément l'outil pour résoudre les problèmes à venir : Caroline installe ainsi un nouveau contrat didactique. Par ailleurs, cet épisode révèle le niveau de certains élèves quant à leur capacité à invalider certaines réponses et par ricochet, leur compréhension d'un problème relevant du champ soustractif.

L'entretien post confirme la variété des procédures que nous avons observées *in situ :* « *j'ai repéré des schémas, il y en a qui ont dessiné… il y en a qui écrivaient les nombres aussi, qui écrivaient 1, 2, 3 jusqu'à 16 et qui ensuite reculaient,* […], *les schémas, la bande numérique, les calculs aussi, des additions, huit plus huit 16, c'est à peu près tout. Après, c'était sur les doigts, c'était dans la tête, vus les nombreux.* » (Car-S1-Entr.post). Notons que les propriétés du nombre dans le système décimal ne sont pas utilisées même si Caroline les introduit dans le milieu didactique dès le premier problème : « *je vais mettre les 14 voitures donc pour aller plus vite je vais les grouper par 10…* » (Car-S1-min 6 :13). Lors de la simulation des problèmes suivants, les élèves construisent les collections avec des cubes unités, sans réutiliser les groupements par 10 (cubes en barre de 10). Un seul élève propose de compter « les dizaines avant et après les unités » mais la proposition n'est relevée ni les élèves ni par l'enseignante. Elle passe inaperçue.

L'enseignante indique dans l'entretien post, avoir « *eu du mal avec les devinettes… pour eux, ça été très déstabilisant.* » (Car-S1-Entr.post). En effet, la plupart des élèves ont proposé une réponse et ne peuvent concevoir ne pas donner une réponse à leur maitresse. Un seul résiste au contrat pérenne et manifeste son désarroi, en tournant le dos au reste de la classe. Ce désarroi est pleinement utilisé par l'enseignante : « *c'est pour faire comprendre la différence entre un problème qu'on peut résoudre parce qu'on a les bonnes informations et une devinette qu'on ne peut pas résoudre puisqu'on n'a pas toutes les informations.* » (Car-S1-min16 :25). Ce faisant, elle indique implicitement aux élèves la nécessité de rechercher les informations nécessaires à la résolution d'un problème : « *ça a permis de faire comprendre qu'il faut des données… pour répondre aux questions* » (Car-S1-entr.post).

Caroline conclut la séance en interrogeant les élèves sur le rôle de la boîte. La réponse d'une élève : « *pour savoir comment… heu… pour savoir combien il y en a, qui c'est qui a raison* » (min 38 :28), lui permet ainsi de donner de manière officielle à la boite une fonction de vérification, ce qui était l'objectif de cette première séance.

2.2.1.1.2. Séance 2

En nous appuyant sur l'entretien post, nous identifions que l'enseignante considère que cette séance est « *la continuité de la première séance donc on est toujours dans la construction du sens de la soustraction* » (Car-S2-entr.post). Sur sa fiche de préparation de séance, elle écrit « *réinvestissement de la leçon 1* » (Car-S2-fichePrep). Néanmoins, elle espère profiter de cette séance pour faire percevoir un problème de partition comme un problème relevant du champ soustractif : « *La dernière fois, il y a un élève qui avait dit « c'est facile parce que parce qu'on sait combien il y a en a dans la boite, combien on en enlève et on cherche ce qu'il reste ». Cette situation-là, je pense qu'elle est bien perçue. Par contre la situation du complément, c'est celle qui est la moins évidente à percevoir… il faudrait à un moment donné que ça ressorte.* » (*Ibid.*). Caroline déclare de plus ne rien avoir fait depuis la première séance qui puisse avoir une incidence sur le cours de la séance. Pourtant, deux indices nous laisse à penser qu'elle a travaillé la numération dans l'entre-deux :

- les cubes ne sont pas cette fois-ci présentés en vrac à l'unité dans une boite mais déjà pour certains agencés en dizaine.

- une réplique à une élève qui venait de lui dire que les nombres utilisés lors d'une séance précédente étaient supérieurs à 100 : « *dans les 100 ? La dernière fois* […] *tu confonds avec la numération avec des choses qu'on fait en numération* » (Car-S2-min 41 :56).

Nous présentons le synopsis de cette séance en page suivante, pour ensuite en mener l'analyse.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			Présentation rapide de la séance : résoudre des problèmes avec des nombres plus grands.	
	Problème 1 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 45 à l'école. Combien en laisse-t-il à la maison ?			
00 :27		Lire le problème.	P écrit le problème au tableau, demande à Loane de lire le problème, puis le lit	Loane lit le problème.
	Ind.	Résoudre	P circule autour des élèves.	**Comptage sur les doigts / dessin / calcul mental / nombres posé en colonne**
04 :31 8 :40	Col.	Simuler avec le matériel	P recense les résultats : **93** / 48 / 13 (11élèves) / 18 / 16 / P : « *comment on faisait pour vérifier la dernière fois ?* » P : « *Voilà, donc une dizaine trois unités, 13. Donc vous étiez 11 à avoir trouvé la bonne réponse, bravo.* »	Loïc va vérifier avec la boite. Il met 5 barres de 10 et 8 cubes unités dans la boite, mais se trompe dans la simulation du problème : rajoute au lieu d'enlever. Ses camarades l'aident. Jonas : « *en fait la boite, c'était la maison* »
	Problème 2 : Un enfant a 58 billes à la maison. Il en amène 4 à l'école. Combien de billes a-t-il laissé à la maison ?			
08 :53	Ind.	rechercher	P avertit qu'elle n'écrit plus le problème au tableau et le lit à deux reprises P écrit au tableau : à la maison 58 billes / à l'école 4 / il a laissé…	**Nombres posés en colonne** (Loane) / **comptine** / le nombre 54 / 62 / 55 (Nicolas)
13 :05	Col.	Simuler / résoudre	P recense les résultats : 54 (10 élèves) / 17 /55 / **62** / 14	Loïc change d'avis (de 62 à 55) Saousem qui a trouvé 17 va vérifier avec la boite.
15 :04			P interpelle la classe pour aider Saousem. P aide Saousem à fabriquer la collection de 58 Cubes. Pas d'explicitation d'autres procédures	Saousem met les cubes un à un dans la boite. Utilisation des cubes en dizaines. Retrait de 4 cubes.
	Problème 3 : Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a-t-il de maillots de rugby ?			
18 :49	Ind.	Chercher	P lit le problème à deux reprises. P écrit les données : dans le club 58 / maillots de basket : 10 // maillots de rugby… P : « *on veut savoir combien il y a de maillots de rugby* »	Les élèves demandent de l'écrire. Loïc : « en plus ou en moins ? » **Dessins** / **nombres posés en colonne** mais résultat faux (Loane) /Comptage sur les doigts
22 :05	Col.	Vérifier	P recense les résultats : 58 / 48 (5 élèves) / 15 / **68 (3 élèves)** / **59** / 40 (Loane)	
23 :32			P : « *avant de vérifier, est-ce qu'il y a des réponses qui vous semblent impossibles ?* » P aide à repérer les données du problème et à faire le lien avec les cubes dans la boite. Incitation à utiliser les propriétés décimales pour manipuler (cubes attachés en dizaines)	Loane : « *68 Parce que c'est plus que 58. Et là c'est 10 maillots de plus* ». Loïc : « *Moi aussi, j'ai une réponse qui est impossible 59 parce que ç'est plus que le total* » Jonas : « *58 c'est pareil que le total* ». Yanis ne sait pas simuler la situation et demande de l'aide à Théo Écart des cubes représentant les maillots de basket.
30 :23	Problème 4 : J'ai 58 cubes, j'en enlève 57. Combien en reste-t-il ?			
30 :59	Col.	Débat collectif	P recense les réponses : 1 / 45 / 13	Quasiment tous les élèves sauf 3 répondent immédiatement :1
33 :43			P : « *On avait besoin là de vérifier avec la boîte ?* »	Nicolas vérifie : 58 cubes dans la boite puis retrait de 57 cubes. **Appui sur la numération :** Jonas : « *On savait tout de suite par ce que euh on savait que 57 on avait toutes les dizaines, et toutes les unités sauf une* »
	Problème 5 : j'ai 58 cubes dans ma boîte, alors je vais en enlever une poignée… combien en reste-t-l dans la boite ?			
34 :45	Ind.	Chercher		Certains élèves cherchent à voir dans la boite. Les autres sont dans l'attente.
35 :06 :	Col.	Débat collectif	P : « *Quelle information il vous manque ?* ». P demande à Jonas de compter les cubes qu'elle tient dans sa main (11) puis relance le problème et demande combien il en reste.	Jonas : « *Il manque combien tu en as pris dans la main.* »
36 :38			P recense les réponses : 49 / 47 / 48 / 30 / P reprend en posant les 58 cubes sur la table et en écartant 1 dizaine et 1 cube.	4 élèves ont trouvé 49 ; 7 ont trouvé 47. Jonas ne simule pas mais explique en s'appuyant sur la numération. **Calcul réfléchi** :« *En fait on a 58 cubes, on enlève déjà une dizaine ça fait 48 Et si on enlève un 8 – 1 égal…* »
40 :29	Bilan : La séance est terminée, qu'est-ce que vous avez à dire sur cette séance…			
	Col.			Les élèves aiment « *faire des problèmes* » même s'ils ne réussissent pas. Les élèves ont remarqué que tous les problèmes mettaient le nombre 58 en jeu, que les nombres étaient plus grands qu'à la séance précédente.
43 :34			P : « *mais quel est le point commun, qu'est-ce qu'on peut faire à chaque fois quand on a des euh des situations comme ça ? de maillot de rugby, de cubes, de billes…* »	« compter avec les cubes » ; « s'aider des dizaines »
44 :01			P présente la séance suivante : « on fera 2 groupes, un avec la boite, un sans la boite »	Réactions : « *avec la boite !* » « *sans la boite !* »
	Fin de la séance			

Tableau synoptique 26 : séance 2, site Caroline (Étape 1 : « Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »)

Fort des indices que nous venons d'énoncer, nous relevons plusieurs points dans cette séance :

- Certains élèves ne reconnaissent pas les situations et répondent par effet de contrat en effectuant une addition, comme lors de la première séance. En réaction, l'enseignante interroge systématiquement ces élèves ainsi que d'autres dont elle a remarqué des procédures peu efficaces. Par exemple, pour le premier problème (min 04 :31) elle interroge Loïc qui fait une addition, Yanis qui attend les réponses de ses voisins, Saousem qui dessine 58 ronds sur son ardoise, en efface quatre, et recompte. Lors des simulations (min 4 :32, 23 :32, 30 :23), comme lors de première séance, elle se met en retrait et laisse les élèves intervenir et aider leur camarade. La simulation du problème devient alors collective.

- Les procédures des élèves sont variées : comptage sur les doigts / dessin / calcul mental / nombres posés en colonne / sur-comptage et décomptage. Ainsi que le remarque l'enseignante, « *il y en a qui essaient de faire des calculs, sans signe. Il n'y a pas de signe +, y'a pas de signe -, juste des nombres posés les uns en dessous des autres, et ça bloquait. Donc je pense qu'ils avaient envie de faire un calcul,… mais qu'ils devaient comprendre qu'une addition ça n'allait pas, et comme c'est la seule opération qu'ils connaissent, ils se sont arrêtés là.* » (Car-S2-entr.post). Nous considérons cela, en creux, comme un premier indice d'une avancée vers la reconnaissance du type du problème. Un deuxième indice est la remise en cause de certaines réponses. Ainsi, pour le problème 3, les réponses 68, 59 et 58 sont écartées « *parce que c'est plus que 58* » (Loane, min 24 :00) « *j'ai une réponse qui est impossible 59 parce que ç'est plus que le total* » (Loïc, min 24 :32), « *58 c'est pareil que le total* » (Jonas, min 24 :39).

Dans cette séance, nous observons donc une reconnaissance progressive des problèmes soustractifs due à plusieurs facteurs : d'une part l'enseignante se met souvent en retrait en laissant les élèves interagir lors des simulations, d'autre part elle encourage les élèves à revenir sur la vraisemblance de leur réponse. En agissant ainsi, elle maintient selon nous le principe de dévolution qui est central dans cette première étape de l'ingénierie.

2.2.1.2. Conclusions à propos de la première étape de l'ingénierie mise en œuvre par Caroline.

Comme pour les sites précédents, nous condensons nos observations dans un tableau retraçant les deux séances mises en œuvre par Caroline relativement à cette étape au regard :

– de la fonction de la boîte et des cubes,

– de la manière dont le problème est « joué » avec la boîte (qui modélise ? comment le problème est-il simulé ?),
– des procédures numériques engagées par les élèves lors de la résolution des problèmes,
– des embryons de vérifications intellectuelles introduits dans les séances.

	Séance 1	Séance 2
Jeu de la boite : qui simule ?	pb 1 → P et un élève pb 4 → un élève pb 5 → un élève pb 6 → un élève pb 7 → un élève	pb 1 → un élève pb 2 → un élève pb 3 → un élève pb 4 → un élève pb 5 → l'enseignante
Fonction prédominante de la boîte et des cubes	**Simuler** le problème **Valider ou invalider** les réponses	**Simuler** et **Vérifier**
Jeu de la boite : comment le problème est-il simulé ?	Tous les problèmes sont simulés selon un retrait dynamique. Pb1 → le parking est rempli au maximum (32 voitures) puis retrait des voitures garées (14).	Tous les problèmes sont simulés selon un retrait dynamique sauf le problème 3, où les cubes représentant les maillots de basket sont écartés (simulation d'une partition)
Procédures numériques de résolution repérées	Dessin / comptage sur les doigts / répertoire / numération décimale / Adition de deux nombres	Comptage sur les doigts / dessin / calcul mental / bande numérique / calcul réfléchi avec appui sur la numération décimale.
Amorce d'une vérification intellectuelle	Élimination des réponses trop grandes : (problème 1 : le parking) → *« quand même 42 c'est un peu plus que 32 alors euh 42 ça peut pas quand même »* → *« 46 aussi »*	Élimination des réponses supérieures ou égales à la quantité initiale : (problème 3 : problème des maillots) → 68 est impossible *« parce que c'est plus que 58. »* → *« j'ai une réponse qui est impossible 59 parce que ç'est plus que le total »* → *« 58 c'est pareil que le total ».*

Tableau 38 : Synthèse des deux séances de l'étape 1 - « dévolution de l'apprentissage de la soustraction » (Site Caroline)

Le tableau ci-dessus fait ressortir plusieurs faits remarquables :

- La dévolution de l'apprentissage de la soustraction est effective

Les élèves utilisent tout au long de l'étape le système {boite, cubes} pour simuler le problème puis pour vérifier leurs réponses. Si Caroline simule le premier problème (le problème du parking), elle adopte ensuite une position topogénétique basse pour laisser à la charge des élèves la résolution des autres problèmes. Cette stratégie se traduit tout au long de l'étape tant dans le contenu de ses interventions que dans la posture qu'elle adopte en classe : lors des recherches individuelles, elle attend, circulant parmi les élèves sans intervenir tandis que lors du travail collectif, elle délègue les simulations à des élèves indiqués comme étant en difficultés (Car-S10-entr.ante.séq), les incitant ensuite à demander de l'aide à leur camarade.

Son objectif principal est de faire comprendre que « *la boite va aider à résoudre* » (Car-S1-entr.post). Aussi laisse-t-elle les élèves interagir et réfuter les résultats arguant du fait qu'ils sont trop grands (S1-Pb1 et S2-pb3). De la même façon, pour les « devinettes » de la première séance, elle laisse les élèves répondre par effet de contrat, rebondissant sur les réactions d'un élève pour faire exprimer le manque de données numériques pour répondre à la question. Lors de la deuxième séance, les élèves ne se laissent pas surprendre par le dernier « jeu », qui relève lui aussi d'une devinette.

Nous observons donc durant cette première étape une enseignante qui provoque des interactions entre tous les élèves, interactions dont elle tire parti pour faire avancer un savoir relatif à la notion de problème et de différence. Ce point est décisif au regard des enjeux de savoirs auxquels s'attaque l'ingénierie broussaldienne.

- Le milieu didactique est riche mais inégalement exploité

Nous constatons que élèves et enseignante construisent un milieu riche mais inégalement exploité. Le milieu primitif est composé des éléments prévus dans l'ingénierie et s'enrichit au fil de l'étape des apports des élèves : si quelques élèves résolvent les problèmes en dessinant ou comptant sur leurs doigts, d'autres utilisent le répertoire ou le système de numération décimal. Au cours des régulations, l'enseignante tente de d'amener l'ensemble de la classe à utiliser le système décimal en présentant les cubes groupés par dix (voir séance 2), ou en introduisant un vocabulaire relatif à la numération décimale mais reconnaît que « *ceux pour qui les dizaines, les unités, c'est pas encore stable, ça leur a posé problème, je pense* » (Car-S2-entr.post).

Par ailleurs, les entretiens *post* et *ante* montrent que l'enseignante est attentive aux éléments qu'elle introduit dans le milieu didactique. Par exemple, pour le problème des voitures dans le parking (séance 1) elle déclare être vigilante aux questions qu'elle pose, au vocabulaire, aux mots inducteurs à ne pas utiliser tels que « *rajouter* », « *reste* », « *manque* ». Ceci est à souligner car différent de ce que nous avons observé dans les deux autres sites. Fidèle à l'ingénierie, elle déclare ne pas vouloir les « *orienter dans un sens ou dans un autre.* » (Car-S1-entr.ante). Ce sont les élèves eux-mêmes qui introduisent ces mots dans le milieu.

D'un point de vue mésogénétique, nous observons que l'enseignante est attentive à n'introduire que les ingrédients de l'ingénierie, laissant à la charge des élèves de modifier le milieu en y introduisant leurs propres connaissances.

- L’indication de signes de reconnaissances d’une différence

Les discussions sur la validité de certaines réponses au problème sont les premiers indices que les élèves perçoivent certains problèmes comme relevant d’une différence. Ainsi, dans chacune des deux séances, les réponses de certains élèves conduisent à des interactions sur la cohérence de certaines valeurs : certaines sont supérieures à la quantité totale. En laissant faire, l’enseignante permet la construction entre pairs de la reconnaissance de problèmes relevant d’une différence.

Pour conclure, l’enseignante est restée fidèle au projet de l’ingénierie didactique de « transmettre aux élèves le projet d’apprendre à résoudre les problèmes de soustractions » (Berté, 1996, p. 3). La dévolution de la résolution de problèmes soustractifs a bien eu lieu : Caroline laisse ses élèves chercher, simuler et vérifier avec la boite et les cubes. Par ailleurs, elle démontre une certaine finesse dans la conduite des simulations des problèmes : concernant ceux appartenant à la catégorie des transformations, elle n’intervient pas ou peu, alors pour le problème 3 de la séance 2 (problèmes des maillots) elle revient sur l’aspect partition, incitant à une simulation par écart des cubes et non par retrait. Ce faisant, elle agit sur la reconnaissance des problèmes soustractifs. Du côté des élèves, le projet est bien reçu : ils mobilisent leurs connaissances pour résoudre les problèmes proposés et identifient la double fonction de la boîte et des cubes : simuler les problèmes et vérifier leurs réponses.

2.2.2. Analyse de l’étape 2 : « L’addition comme moyen de preuve »

L’enseignante mène cette étape en trois séances, ainsi que cela est prévu dans le texte de l’ingénierie, ce qui est confirmé lors d’un entretien : « *sur les deux premières séances, c’est comprendre qu’il peuvent vérifier sans ouvrir la boîte en vérifiant par sur-comptage. L’addition c’est le moyen de preuve, pour vérifier. Mais ce sera à partir de la leçon cinq.* » (Car-S5.entr.ante).

2.2.2.1. Analyse mésodidactique des trois séances

Pour chacune des trois séances, nous cherchons à suivre l’évolution de la construction de la preuve intellectuelle en fonction du milieu et du temps. Lors de l’entretien *post* de la première séance de cette étape, Caroline déclare que « *le but c’est d’amener les élèves à l’aide du sur-comptage, donc à vérifier avant ouvrir la boîte. Vérifier par sur-comptage avant de vérifier ce qu’il y a dans la boîte. Là, on garde encore la boîte, le matériel…* » (Car-S5.entr.ante).

2.2.2.1.1. Séance 5

Cette séance est constituée des cinq problèmes inscrits dans la leçon 3 de l'ingénierie. L'objectif de l'enseignante est clairement énoncé : « *Le but c'est d'amener les élèves à vérifier à l'aide du sur-comptage, donc à vérifier avant ouvrir la boîte*. » (Car-S5.entr.ante). Caroline indique par ces propos qu'elle cherche à rester au plus près des objectifs de l'ingénierie didactique : « on va passer de la preuve empirique à la preuve intellectuelle » (Berté, 1996, p.13).

L'enseignante commence directement la séance, sans faire de rappel aux précédentes, « pour bien lancer la chose, pour pas perdre de temps en fait. […] Pour que la situation soit claire aussi. Parce que si je fais passer un élève qui commence à se tromper en comptant, j'ai peur que ça brouille plus tard la technique finalement de vérification. Je préfère d'abord montrer et après ils suivront » (Car-S5.entr.ante). Tous les problèmes de la séance sont traités de selon un même format pédagogique : écriture du problème au tableau, lecture par un élève et/ou le professeur, simulation du problème avec le matériel, recherche de la solution puis vérification : « je vais prendre deux ou trois élèves qui ont une réponse fausse, pour vérifier, et finalement je vais en prendre un qui a une réponse juste. » (Car-S5.entr.ante). Comme pour les séances précédentes, l'enseignante laisse les élèves chercher et proposer des réponses. Elle pose ensuite rapidement l'enjeu de la séance : « comment on pourrait faire pour vérifier sans ouvrir la boîte ? » (Car-S5-min04 :30). Lors de cette séance, plusieurs phénomènes didactiques méritent d'être relevés.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Problème 1 : Dans la boîte, j'ai 45 cubes, j'en sors 18. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ? (réponse 27)			
			P écrit le problème au tableau, puis joue le problème sous la direction des élèves.	Renaud lit le problème. Loïc : « *mettre 45 cubes* » Yanis : « *après t'en sors 18* »
	Ind.	Résoudre	P organise les données sous forme de tableau : cubes dans la boite / cubes enlevés / réponse	Les élèves cherchent : dessin / appui sur la numération / appui sur les doigts
04 :30 07 :16 07 :58 08 :47	Col.	Vérifier avec manipulation de la boite et les cubes	À Jonas : « *alors comment on pourrait faire pour vérifier sans ouvrir la boîte ?* » P : « *Là tu es en train d'expliquer comment tu fais pour trouver la réponse, moi je voudrais savoir comment faire pour vérifier si la réponse que tu as trouvée es la bonne* » P : « *excuse moi je te coupe, mais tu es en train d'expliquer comment tu as cherché la réponse* ».	Charlotte : « *euh faut d'abord prendre 45 et après t'enlèves 18* » Nicolas a dessiné 45 traits : il en compte 18 et les efface. Océane : « *Tu… je mets, 10, 20, 30 40 et t'en mets cinq, et après, t'en enlèves 18 et après [inaudible] et après t'en enlèves 18 et tu comptes combien t'en as.* » Jonas : « *en fait il y aura des dizaines on va enlever une dizaine alors au début ça va faire 35 parce qu'on va enlever les cinq unités de de euh 40 et on va…* »
10 :21			P : « *Jonas il dit qu'il y en a 30 dans la boîte. Ça veut dire ça veut dire que si j'ajoute les 18 qu'on a enlevés, combien je vais avoir ?* […] ***Avec les 18 que j'ai enlevés combien je dois en avoir en tout ? […] ça veut dire qu'avec ceux qui sont dans la boîte et ceux-là j'en ai 45****, donc Jonas il me dit il y en a 30, Donc on va vérifier pour voir si on tombe, si en ajoutant ceux-là, on arrive à 45. On fait ça ?* »	Yanis répond correctement : « 45 » Jonas fait la manipulation correspondant à la vérification : sur-comptage à partir de 30 et arrive à 48.
12 :17			P : « *donc est-ce que ta réponse est bonne ?* »**.** « *Est-ce que tu veux toujours parier avec moi, sur ta réponse ? […] est-ce que tu veux toujours faire un pari avec moi, sur ta réponse ?* **»**	Jonas : « *non.* […] *oui alors je vais essayer quand même 27* »
12 :36			Discussion sur la valeur de Charlotte. P : « ***hé oui il faut trouver exactement 45 quand on vérifie*** *donc c'est pas ça. […] alors tu veux toujours parier avec moi sur ta réponse ? oui ? pourtant tu viens de vérifier là. […] essayez d'expliquer à Charlotte pourquoi 26 ne peut pas être la bonne réponse* »	Charlotte veut parier sur 26 et vérifie par sur-comptage et maintient son pari. Loane : « *44 c'est moins que 45, alors 26 ça peut pas être la bonne réponse* »
17 :08			P laisse Loïc sur-compter et conclut en lui serrant la main : « *bravo, tu as gagné* » **Pas d'ouverture de la boite**	Loïc parie sur 27 puis rajoute les 18 cubes un à un en sur-comptant jusqu'à 45
17 :50	Problème 2 : Dans la boîte, j'ai 72 cubes, j'en sors 34. Combien en reste-t-il P ne demande pas à Maxine si elle veut parier sur sa réponse maintenant dans la boîte ? (réponse 38)			
	Ind.	Résoudre	P simule le problème sous la direction de Loane.	Exclamations des élèves devant les grands nombres. Loïc lit le problème. Recherche des élèves. Loïc : Enlever ≠ Sortir ?
22 :03 27 :54	Col.	Vérifier avec manipulation	*P : « qui est prêt à parier avec moi sur sa réponse ? »* P ne demande pas à Emma si elle maintient son pari ou pas. P conclut qu'Emma a gagné. **Ouverture de la boite pour vérifier**	Théo (21) et Océane (19) viennent vérifier par sur-comptage leur réponse puis ne maintiennent pas le pari. Emma vérifie sa réponse (38)
30 :03	Problème 3 : Dans la boîte, j'ai 64 cubes, j'en sors 21. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Ind.	Résoudre	P aide Saousem à simuler en s'appuyant sur le système décimal (barres de 10 cubes).	Saousem simule le problème. Pendant ce temps, les élèves cherchent.
				Procédures : dessin des cubes à l'unité / dessins avec appui sur la numération/ comptage avec les doigts/
36 :57	Col.	Vérifier avec manipulation	*P : « qui veut parier ? »* à Sami : « **est-ce que tu veux parier toujours ? »** à Loane : « 64, donc bravo tu as gagné je te serre la main » **Pas d'ouverture de la boite.**	Une dizaine d'élèves veulent s'engager dans le pari. Sami (32), puis Loane (43) parient
37 :46	Problème 4 : Dans la boîte, j'ai 60 cubes, j'en sors 15. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Ind.		**on va essayer de le faire sans la boîte** pour voir si on peut vérifier sans la boîte.	Renaud lit le problème, puis les élèves cherchent.
38 :33 42 :15	Col.	Vérifier de sa place sans utiliser les cubes	P : « Allez, proposez une réponse. Alors qui veut parier ? Qui n'a pas parié avec moi encore ? » P : « Qu'est-ce que tu vas faire ? […] voilà, tu vas ajouter 15 ». P appelle Jonas pour sur-compter. **Conclusion :** « On a bien rajouté 15 et on arrive à 60 donc, c'est la bonne réponse. » **Pas d'ouverture de la boite**	Yanis parie sur 55. Yanis ne sait pas comment faire et finit par se servir de ses doigts et se perd dans le sur-comptage. Jonas propose 45 et sur-compte jusqu'à 60.
42 :35	Problème 5 : Dans la boîte, j'ai 61 cubes, j'en sors 41. Combien en reste-t-il maintenant dans la boîte ?			
			P efface les nombres du problème précédent et les remplace par 61 et 41	
43 :31	Ind.	Rechercher et vérifier	P demande de « *vérifier avant de parier donc là, si vous pariez, il faut être sûr.* »	
46 :23	Col.		P : « *comment on peut voir si c'est bon ou pas ?* » P interroge directement Jonas. Pas d'ouverture de la boite puis fait effectuer l'addition 41+20 « pour voir » et conclut : on trouve bien 61 » **Pas d'ouverture de la boite**	Jonas explique sa procédure de vérification en s'appuyant sur la numération. 4 + 2 = 6 → 6 dizaines 1 + 1 = 2 → 2 unités donc on 61
50 :50	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 27 : séance 5, site Caroline (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

- Les élèves cherchent à décrypter les attentes de l'enseignante

Comme l'a évoqué l'enseignante en entretien *ante*, les élèves ne connaissent pas la signification du terme 'vérifier' dans un contexte mathématique. Vérifier peut être compris par les élèves comme « *refaire* ». (Car-S5-entr.ante). Les élèves n'ont alors pas d'autres possibilités que d'agir selon le contrat didactique institutionnel préconisé par le programme : les élèves doivent être capables d'expliquer une procédure de résolution. Pour autant, l'enchainement des réponses ainsi que leur nature montre des élèves à la recherche des attentes de leur maitresse (min 4 :47, 6 :53, 7 :13, 7 :58, 8 :31) : leurs réponses sont des combinaisons de différents ingrédients du milieu didactique : doigts, matériel {boite, cubes}, dessin, numération décimale, calcul réfléchi. Nous exemplifions brièvement ci-dessous quelques enchainements :

Élèves (repère temporel synopsis)	**Extrait de transcription**	**Caractéristique de la réponse produite**
Charlotte (min 6 :53)	*« euh faut d'abord prendre 45 et après t'enlèves 18 »*	Retrait dynamique avec utilisation de la boite
Nicolas (min 7 :13)	*« dessiner 45 traits sur son ardoise puis en effacer 15 »*	Retrait dynamique sans utilisation de la boite. Résolution par un dessin de la situation.
Océane (min 7 :58)	*« Tu… je mets, 10, 20, 30 40 et t'en mets cinq et après, t'en enlèves 18 et après [inaudible] et après t'en enlèves 18 et tu comptes combien t'en as. »*	Retrait dynamique avec utilisation de la boite, et utilisation des propriétés du système décimal pour dénombrer.
Jonas Min 8 :31	*« On peut vérifier, en fait il y aura des dizaines on va enlever une dizaine alors au début ça va faire 35… »*	Retrait dynamique sans utilisation de la boite. Utilisation des propriétés du système décimal pour dénombrer dans un calcul mental réfléchi.

Extrait 68 : Caroline – S5 – enchainement des réponses d'élèves à la recherche des attentes de l'enseignante.

- L'enseignante ne dévolue que partiellement l'apprentissage de la vérification

Caroline conserve l'aspect ludique du pari tout en ne perdant pas de vue sa fonction didactique : lorsque les élèves ont vérifié par sur-comptage leur réponse, elle leur demande de maintenir ou pas le pari. Ce faisant, elle les oblige à marquer un temps d'arrêt, laps de temps nécessaire à l'élève pour revenir sur les données du problème. On peut donc affirmer qu'elle a bien saisi le pari comme « apprêt didactique » préparant à la construction du sens de la vérification. Pour autant, elle ne maintient pas la dévolution et, reprenant une position haute, se substitue à la boite pour dire si le pari est gagné ou perdu (min 17 :08, 27 :54, 42 :15, 46 :23). Les élèves ne peuvent pas alors bénéficier de l'effet rétroactif de la composante matérielle du milieu didactique pensé dans l'ingénierie. À cette étape de l'analyse, nous conjecturons une certaine indépendance entre la compréhension mathématique des situations de l'ingénierie qu'établit Caroline, et les conditions qu'elle produit dans leur mise en œuvre, indépendance que l'analyse devra confirmer ou infirmer.

- Différentes modalités de gestion de l'avancée du savoir par l'enseignante :

Caroline tente d'influer sur la chronogenèse de la preuve de différentes manières :

- En repoussant les explications procédurales des élèves (Charlotte, Nicolas, Océane, et Jonas (min 6 :20 ; 7 :25 ; 8 :23 ; 9 :13), Caroline obtient que lors de la résolution des problèmes suivants, plus aucun élève ne propose une explication de sa procédure.

- En prenant en charge l'avancée du savoir à sa charge : « ça veut dire qu'avec ceux qui sont dans la boîte et ceux-là [montrant les cubes sortis] j'en ai 45. » (min 10 :53), elle dévoile en partie la procédure de vérification, introduisant au passage le mot « ajouter », mot inducteur de l'opération. Cette stratégie est assumée comme confirmée lors de l'entretien ante : « si cela ne sort pas, je le ferai moi-même » (Car-S5-entr.ante).

- En jalonnant la séance de mots inducteurs tels que : « ajouter » (minutes 10 :30 ; 10 :53 ; 24 :19 ; 40 :24 ; 49 :50) ; « rajouter » (minutes 11:54, 12:50, 42:15, 46 :10) ; « plus » (minutes 24:25, 50:09).

- En introduisant elle-même l'addition lors du dernier problème en faisant effectuer l'addition 41+20 « pour voir » (min 10:53).

- En choisissant les élèves interrogés : pour chaque problème, l'enseignante fait intervenir systématiquement un élève faible pour lire le problème, un élève ayant une réponse erronée, puis un élève performant. Le plus souvent, Théo, Loane et Jonas qui sont des élèves agiles (chronogènes) percevant vite les évolutions de contrats, sont à tour de rôle appelés pour conclure.

Dans cette séance, nous observons donc l'enseignante aux prises avec un objet d'enseignement inhabituel, tiraillée entre deux positions topogénétiques contrastées, cherchant à agir sur la chronogenèse tout en dévoluant l'apprentissage de la vérification. Pour autant, Caroline juge la séance positive : « *ça a pas trop mal marché* […] *Oui oui, je les ai atteints* [les objectifs de la séance]. *Et puis même, le fait de se servir des dizaines pour compter plus vite, ça ils l'ont compris. Pas tous, bein, ceux qui sont pas à l'aise en numération… mais ils pouvaient vérifier de un en un ce qui n'était pas gênant… plus lent mais heu…* », ajoutant par la suite que ce n'était pas « *l'objectif principal, mais tant qu'à faire l'utiliser* » (Car-S5-entr.post).

2.2.2.1.2. Séance 6

Suite à la séance précédente, l'enseignante est confiante et se donne pour objectif « *que chacun arrive à vérifier individuellement sans les cubes sa réponse. Il faudrait en arriver là à la fin de la séance* » (Car-S6-entr.ante). Lors de cet entretien, Caroline témoigne de sa compréhension de cette séance de l'ingénierie en indiquant comment elle se représente son déroulement de la séance : « *la première étape*[96]*, c'est une révision de la première séance. On reprend la vérification par le sur-comptage avec les cubes, l'étape 2 on va empêcher les élèves de sur-compter avec les cubes. Et on va leur demander d'essayer de vérifier, de trouver un moyen…* […] *et ensuite l'étape 3, la même chose mais là, la vérification est individuelle, écrite.* » (*Ibid*.)

[96] Caroline désigne par étape ce qui correspond dans la leçon de l'ingénierie à un problème. Chaque problème est inscrit par une « phase » dans le texte de l'ingénierie didactique (Berté, 1996, p.15-16)

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			**Rappel de la séance précédente :** « *Alors est-ce que vous vous souvenez de ce que l'on a fait la dernière fois ?* » P s'appuie sur un exemple : « *J'ai 45 cubes dans la boîte, j'en sors 18, je dis qu'il en reste 20* »	Jonas : « *En fait on… on imagine qu'il y en a 20 ans dans la boîte et euh on compte les 18 si ça va à 45* »
2 :01	Problème 1 : dans la boîte, il y a 70 cubes. J'en prends 23. Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ?			
	Ind.	Chercher	P distribue le problème sur fiche, puis le lit « pour ceux qui ont des petits problèmes »	
			P circule de groupe en groupe.	Recherche des élèves
5 :24	Col.	Résoudre	P simule sous la dictée de Jonas, puis écrit les données au tableau en colonne : 73 ; 23 ; réponses. Recueil des réponses : 47 (9 élèves) / 45 / 41 / 48 / 31	Jonas : « tu mets 7 dizaines et t'en sors 23 »
7 :30			P appelle Colleene pour vérifier sa réponse (48), puis l'incite à demander de l'aide à ses camarades. P demande à Théo de se déplacer pour montrer le sur-comptage à Colleene. P demande à Jonas de venir vérifier la valeur 47	**Colleene ne sait pas et appelle Océane, puis Théo :** « dessous, il y a 48, tu rajoutes heu… 23 » Théo sur-compte en utilisant les cubes en dizaines et les cubes unités et obtient 71. Jonas ajuste et déclare que la réponse est 47.
11 :52			P : conclusion : « ***on arrive bien à 70, en partant de 47 et en ajoutant les 23. Est-ce qu'on a besoin de vérifier s'il y en a bien 47 ?*** ». Appui sur la numération pour dénombrer les cubes.	3 élèves ont besoin de vérifier **en ouvrant la boite**.
13 :43	Problème 2 : dans la boîte, j'ai 42 cubes, j'en sors 17 combien y en a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Ind.	Chercher / résoudre	P énonce le problème en le jouant devant la classe : 4 barres de 10 et 2 cubes unités dans la boite puis en sort une barre de 10 et 7 cubes unités.	
14 :44	Col.		P rappelle les nombres en jeu. P ne circule pas dans la classe	Recherche des élèves. Certains ne se souviennent plus du nombre de cubes initial
16 :30		Débat collectif	Recueil des réponses : 25 (9 élèves) / 22 / 24 (2 élèves) / 20 / 10	Presque tous veulent parier
17 :57			P appelle Jonas (22) pour vérifier : « *par contre cette fois tu n'as pas le droit de toucher les cubes. Comment tu vas faire ?* » P repousse les explications de Jonas jusqu'à ce qu'il énonce une procédure de vérification. P demande de calculer mentalement	À deux reprises, Jonas tente de répondre par une **procédure de résolution** de problème avant d'énoncer « *on a 22, si on rajoute 17, ça fera… 49* » Théo corrige : « ça fait 39 »
20 :45			P demande à Loane de vérifier sa valeur (24), puis à Emma (25) Conclusion de P : « ***les 17 qu'on a enlevés avec ceux qui sont dans la boîte ça doit faire 42 c'est-à-dire ce que l'on avait au début.*** »	Loane : « 22+17 = 39 et on rajoute 2, ça fait 41. C'est pas la bonne réponse » Les élèves ajustent leurs réponses et veulent presque tous parier sur 25. Emma **ne sait plus s'il faut enlever ou ajouter** 25 aux 17 et demande de l'aide à Anatole qui commence par **résoudre à nouveau le problème**, pour ensuite vérifier.
27 :43	Problème 3 : dans la boîte, j'ai 51 cubes, j'en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte			
			Distribution du matériel : feuille de format A3 / feutre	
29 :29	Ind..	Résoudre	P lit le problème puis va de table en table, puis d'élève en élève. De plus en plus d'apartés avec les élèves. A voix haute « *Tu es en train de vérifier, là ? Et elle est où ta réponse ? Quand on vérifie, ça veut dire qu'on a déjà trouvé une réponse* […] *Cherche là-dedans, et tout ça là, c'est pour vérifier* ».	Recherche des élèves. Ils semblent ne pas savoir vérifier leur réponse et appellent l'enseignante à tour de rôle pour obtenir une aide. La plupart des élèves ne comprennent pas l'organisation spatiale de la feuille.
39 :40	Col.	Débat collectif	P arrête la recherche et recense les réponses : 28 (9 élèves) / 38 (2 élèves) / 23 / 31 / 26 /	
41 :58			P : « *ce qui m'intéresse, c'est qui a vérifié sa réponse ?* » P interroge dans l'ordre Colleene, Océane, Jonas, puis Sami	Seulement 4 ou 5 élèves lèvent timidement le doigt : les quatre énoncent des **procédures de résolution**. Colleene et Océane ont dessiné 51 cubes, en ont compté 28, puis ont dénombré le reste. Jonas et Sami ont aussi dessiné mais en s'appuyant sur le système décimal (groupements par 10)
46 :36			P se tourne vers Théo (**Joker**) : « alors Théo… » P prend la feuille de Théo et l'affiche au tableau. Théo avait d'abord trouvé 38. La trace écrite montre qu'il a modifié ensuite sa réponse pour 28. P explique pourquoi à la place de Théo : « ***donc il a pris les 38 qu'il pense être dans la boîte et il a rajouté les 23 qu'on a enlevés donc il a fait 23 plus 38,*** *et là t'as même pas calculé parce que en commençant à calculer tu t'es aperçu que c'était pas ça* »	Théo avait d'abord trouvé 38. La trace écrite montre qu'il a modifié ensuite sa réponse pour 28. « *en fait ça faisait une dizaine de plus et ça faisait 68* » Deux autres élèves ont su vérifier : Loane et Anatole.
46 :36			**P s'appuie sur la production d'Anatole et Loane** pour montrer la différence entre recherche et vérification. P avance un argument d'utilité de la vérification : « *vous vérifierez si vous vous apercevez que c'est faux mais bien sûr vous aurez le droit de gommer ou de barrer et de proposer autre chose, c'est à ça que ça sert* »	Théo avait d'abord trouvé 38. La trace écrite montre qu'il a modifié ensuite sa réponse pour 28. Deux autres élèves ont su vérifier : Loane et Anatole.
	Fin de la séance : « il est midi donc on va pas avoir le temps de faire un bilan on continuera la prochaine fois »			

Tableau synoptique 28 : séance 6, site Caroline (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

Contrairement aux séances précédentes, l'enseignante fait appel à la mémoire didactique en s'appuyant sur un problème traité lors de la séance précédente (min 00 :00). Jonas, élève chronogène, conclut ce rappel : « *En fait on… on imagine qu'il y en a 20 dans la boîte et euh on compte les 18 si ça va à 45* » (min 1 :42). Par une mise en scène collective, le premier problème de cette séance participe aussi à la remise en mémoire de la vérification par sur-comptage des cubes enlevés aux cubes supposés rester dans la boîte. Mais c'est Caroline qui conclut : « *on arrive bien à 70, en partant de 47 et en ajoutant les 23* » (min 11 :52). Nous l'interprétons comme un effet Topaze anticipé : l'enseignante injecte dans le milieu didactique les mots qu'elle souhaite entendre dans la suite de la séance. Néanmoins, les élèves ne sont pas sensibles à cet effet, et la construction du sens de la vérification intellectuelle marque le pas. Nous avançons plusieurs facteurs expliquant ce fléchissement :

- Les élèves reviennent, par réflexe, au contrat didactique pérenne lorsqu'ils n'ont plus la mémoire gestuelle pour exprimer la procédure de vérification (min 17 :57, 20 :45, 41 :58).

- L'apprentissage de techniques de calcul réfléchi les rend plus attentifs à utiliser leurs connaissances fraichement acquises pour expliquer leurs procédures de résolution ce qui, en creux, les détourne de l'apprentissage de la vérification (min 17 :57, 20 :45).

- L'enseignante choisit de faire vérifier des réponses erronées mais proches de la solution (min 20 :45, 46 :36). Ce faisant, elle rend la solution accessible par ajustement et de ce fait, remet en selle le contrat didactique pérenne.

La conjugaison de ces facteurs entrave la construction de la référence commune : alors qu'en fin de séance 5, les élèves semblaient vérifier leurs réponses, les productions écrites montrent que la majorité des élèves ne vérifient pas : seuls trois élèves effectuent la vérification de leur réponse. L'enseignante, qui identifie bien les difficultés rencontrées par ses élèves, les explique par un passage « *trop violent de la manipulation à l'écrit. Peut-être qu'il manque une transition entre les deux. Le passage est rude. Je vais adapter la leçon* [suivante] » (Car-S6-entr.post).

2.2.2.1.3. Séance 7

Caroline structure cette séance comme la précédente : un temps de rappel, de recherche collective puis de recherche individuelle. Si elle nous a déclaré à la séance précédente vouloir adapter la leçon de l'ingénierie, le synopsis (en page suivante) montre qu'elle conserve à l'identique les problèmes de l'ingénierie.

Reconnaissant que la vérification est « *le nœud du problème* » (Car-S7-entr.ante), l'enseignante exprime une difficulté possible des élèves à différencier recherche et vérification : « *ils ont envie de faire des moins, mais on leur demande de faire des additions pour vérifier donc ça doit peut-être les perturber* » *(Ibid.)* Aussi, l'enseignante agit de différentes manières pour lever cette difficulté :

- Production d'effets Topaze et d'effets Jourdain

L'enseignante utilise plusieurs artifices lui permettant de peser sur la chronogénèse de la vérification par l'addition. Nous décrivons ci-dessous cette manière d'agir, en illustrant une manière de faire récurrente visant à accélérer l'avancée du savoir.

Alors que l'enseignante n'en faisait pas ou peu auparavant, elle débute cette séance par un rappel à la mémoire didactique conséquent : celui-ci dure plus de sept minutes (min 00 :00). Voulant entendre ses élèves prononcer le terme d'addition, Caroline montre une production d'élèves présentant une addition posée en colonne, espérant par un effet Topaze que ses élèves prononceront au moins le mot « addition » (1er effet topaze). Si ses élèves répondent bien à son attente, ils ne savent pas, pour autant, dire quels nombres additionner ! Aussi, produit-elle un 2ème effet Topaze en organisant la trace écrite au tableau (cf. Figure 59 ci-dessous) de façon à faire apparaitre les nombres à additionner en colonne : Théo et Jonas, élèves chronogènes, reconnaissent et énoncent alors l'opération à effectuer pour vérifier, ce qui permet à l'enseignante, par un effet Jourdain de conclure : « *Et voilà, on ajoutait donc les cubes qu'on enlevait et les cubes qui sont dans la boîte. Vous êtes bien d'accord qu'ils font partie des 51 ?* » (min 6 :14). En cherchant l'adhésion de ses élèves, l'enseignante tente d'établir une procédure de vérification, procédure qu'elle souhaite voir utilisée lors de la séance en cours.

Figure 59 : organisation de la trace écrite au tableau

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00			**Appel à la mémoire didactique :** montrant les évaluations, « *Alors la dernière fois, qu'est-ce qu'on avait fait ?* » P rappelle qu'il y « *avait deux étapes à chaque fois : une on on cherchait, une où on vérifiait* » et s'appuie sur problème de la séance précédente « *il y avait 51 cubes dans la boite, 23 cubes qu'on enlevait, donc on demandait combien il y avait de cubes maintenant dans la boite, et toi tu avais dit je pense qu'il y en a 28* ». P interroge Théo (élève chronogène) P reprend « *Et voilà… [ça veut dire] ça veut dire que si on ajoute ceux qui sont dans la boite et ceux que j'ai enlevés, on retrouve le nombre du début* ». P pose l'addition en colonne au tableau	Les élèves ne se souviennent plus Jonas et Théo interviennent : « *on vérifiait* », « *on faisait des techniques de vérification* » Anatole propose de vérifier en posant en colonne « *51 +28* » Théo : « *c'est 23+28* » mais a du mal à expliquer
07 :36	Problème 1 : Un berger a un troupeau de 75 moutons. Un brigand lui en vole 46. Combien le berger possède-t-il de moutons maintenant ? Sol = 29			
			P écrit le problème au tableau. Explication de certains mots : possède, brigand, troupeau	Les élèves lisent silencieusement le problème puis Renaud le lit à voix haute.
10 :48	Ind.	Résoudre et prouver	« *Comment pourrait-on mimer le problème ?* » P simule le problème sous la direction de Loane : « *7 dizaines et 5 unités* » P enlève 4 dizaines et 46 cubes unités puis referme la boite.	Loane : « *on en met 75 dedans* […], *on en enlève 46* »
12 :05			Distribution de feuilles blanches de format A4 pour la recherche	Théo et Anatole ont fini très rapidement (au bout de 1min30) dessins avec ou sans appui sur la numération décimale
18 :39	Col.	Débat collectif	P recense les réponses : 29 / 11 / 27 / 51 / 39 / 26 / et demande à tous de vérifier la valeur 27 au dos de la feuille. P s'appuie sur deux élèves chronogènes, Jonas et Loane pour expliquer. P demande à Sami d'aller poser l'opération au tableau. P fait vérifier la valeur 39 par tout le monde, puis appelle Loane	Jonas : « *en fait on imagine qu'on en a 27**, on va rajouter 46. On va voir si ça va faire 75*** » Loane : « ***27 + 46*** » **Sami pose l'addition en colonne**. Les élèves ajustent et proposent 29, mais Yanis maintient 39. Loane pose l'addition 39 + 46 (en colonne)
29 :42			P « *en sachant que 39 n'est pas la bonne réponse, alors comment vous faites ?* » P appelle Jonas pour vérifier au tableau. P : ***« on trouve bien 75, donc on en déduit que 29 était la solution […] est ce qu'on a besoin d'ouvrir la boite pour vérifier ? »***	Beaucoup d'élèves ajustent. Théo : « *en fait, quand c'est 39, on enlève une dizaine* » **Les élèves jugent inutile d'ouvrir la boite :** indice d'une compréhension de la vérification intellectuelle
32 :09	Problème 2 : Dans une boite, il y a 75 cubes, des bleus et des rouges. 38 sont bleus. Combien y-a-t-il de rouges ?			
			Distribution d'une nouvelle feuille de format A4 : problème écrit, puis un tableau 4x4 : je cherche / réponse / je vérifie / solution. P relit l'énoncé	Océane lit l'énoncé
34 :32	Ind.	Résoudre	Organisation de la feuille : « qu'est-ce que vous voyez sur ce tableau ? » Explication des 4 étapes : recherche/ une réponse / vérifier / et recommencer jusqu'à trouver une solution qui convienne.	
36 :02			P circule dans le groupe et aide individuellement les élèves (utilisation de la technique du trilogue à multiples reprises). **P s'attarde avec Nicolas qui ne sait pas vérifier (effets Jourdain & Topaze)**	Nicolas réclame des jetons puis dessine / Sami est complètement perdu : il ne sait plus s'il doit ajouter, soustraire… Nicolas est toujours sur la vérification **Les élèves s'agitent : ils ont fini et attendent**
46 :49			P ramasse les feuilles en vérifiant que les élèves ont vérifié.	
47 :10	Col.	Débat collectif	P fait un bilan : la dernière fois vous étiez 3 à avoir vérifié. Aujourd'hui, vous êtes 10. « *Comment faire pour vérifier ?* » **Conclusion :** « *Voilà ; on prend notre réponse c'est-à-dire les cubes rouges, quand on les met avec les cubes bleus, quand on les met ensemble, on doit trouver le total* »	Loane : « on calcule notre réponse plus ceux qui sont des autres couleurs »
50 :26			« *quand on vérifie si une réponse est la bonne ou pas, ça s'appelle faire la preuve* »	
50 :59	Bilan de la séance : est-ce que vous avez des remarques sur la séance ?			
	Océane : difficile de vérifier. Théo facile. Les élèves se partagent entre facile et difficile. Jonas trouve plus difficile de résoudre que de vérifier : « c'est plus dur d'enlever que de rajouter » P profite pour annoncer la séance suivante : « on verra comment rendre un peu plus simple cette recherche »			
54 :59	Fin de la séance			

Tableau synoptique 29 : séance 7, site Caroline (Étape 2 : « L'addition comme moyen de preuve »)

Cette manière d'agir (effet Topaze, Jourdain, ou utilisation d'élèves chronogènes) se répète à plusieurs reprises dans la séance. Cependant, les élèves ne semblent pas mettre de sens à cette opération. Aussi, elle introduit dans le milieu didactique une fiche de travail qui lui semblant plus favorable que celle proposée dans l'ingénierie.

- Modifications apportées aux milieux didactiques de l'ingénierie

- Peu satisfaite de l'agencement de la fiche de la leçon 6 dans l'ingénierie, l'enseignante choisit de faire travailler le premier problème sur une fiche de format A4, en dédiant le recto à la recherche, et le verso à la vérification. En retournant la feuille, les élèves accompagnent d'un geste (le retournement de la feuille) le passage de la recherche à la vérification (min 12 :05). Pour le second problème, les élèves travaillent sur le recto de la feuille, une place étant dédiée explicitement à la vérification (min 34 32).

- Lors de la vérification d'une valeur, Caroline laisse les élèves poser l'addition en colonne, délaissant ainsi le calcul mental. (*Cf*. Figure 60)

- Lors de la correction du premier problème (min 18 :39), l'enseignante choisit de faire vérifier une valeur supérieure, inférieure puis égale à la solution, tentant ainsi de systématiser l'addition comme moyen de vérification. La Figure 61 ci-dessous montre l'écriture additive écrite pour chacune des valeurs vérifiées.

Figure 60 : addition posée pour vérifier

Figure 61 : plusieurs valeurs vérifiées

Rappelons que lors de l'entretien *ante*, Caroline avait énoncé une difficulté à faire vérifier un résultat : « *ils ont envie de faire des moins, mais on leur demande de faire des additions pour vérifier donc ça doit peut-être les perturber* ». Lors de l'entretien *post*, elle déclare : « *je pense qu'ils ont un peu compris quand même…* […] *quand ils expliquent… ils ne disent pas 'il faut faire une addition', ils disent 'il faut mettre ensemble'. C'est bien aussi. Théo, Jonas, Anatole, Loane, ceux-là ont un petit peu embarqué le groupe…* » (Car-S7-

entr.post). Elle dévoile en une phrase la manière dont elle pense avoir levé cette difficulté énoncée en entretien *ante :* en donnant sens à la preuve de l'addition de deux nombres par la réunion de deux parties et en s'appuyant sur des élèves chronogènes pour entrainer le groupe.

2.2.2.2. Conclusions à propos de la deuxième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Caroline

Avant de synthétiser, comme pour les deux sites précédents, les analyses des séances de l'étape dans deux tableaux (l'évolution du milieu didactique et l'avancée du savoir relatives à la preuve intellectuelle) nous résumons dans les paragraphes qui suivent quelques traits récurrents qui caractérisent la mise en place de cette étape par Caroline. Rappelons que l'objectif de cette étape dans l'ingénierie est de fournir aux élèves un moyen intellectuel de vérification d'une réponse apportée à un problème soustractif. Pour atteindre cet objectif, la stratégie est de retarder la vérification empirique (l'ouverture de la boite) en obligeant l'élève à reconsidérer sa réponse : est-elle correcte ou pas ? Brousseau introduit le pari, qui est ici un apprêt didactique préparant l'introduction de la preuve d'un résultat obtenu par soustraction.

Lors de l'analyse de cette étape, nous avons pointé les difficultés, tant du côté des élèves que du côté de l'enseignante, à mettre en place une référence commune relative à la notion de preuve. Nous avons vu que l'enseignante agence le milieu de façon à maintenir la relation didactique, s'appuie sur des élèves chronogènes et provoque des effets de contrats pour peser sur la chronogenèse. Deux facteurs en particulier nous semblent pouvoir expliquer cette difficulté : la prégnance du contrat didactique pérenne et la dévolution partielle de la preuve d'un résultat

- Prégnance du contrat didactique pérenne

Dans cette étape, Caroline se trouve confrontée à la difficulté de faire évoluer le contrat didactique de « résoudre puis expliquer sa procédure de résolution » (contrat pérenne en usage dans sa classe) à « résoudre puis prouver son résultat » (contrat didactique proposé par l'ingénierie). Plusieurs raisons expliquent les difficultés des élèves à décrypter les attentes de leur maitresse :

(i) Le contrat didactique usuel à la classe, réinvestir des savoirs fraichement acquis pour résoudre des problèmes (*supra*) maintient les élèves dans l'explication des procédures de résolution. Or, Caroline exprime clairement ne pas s'intéresser à leurs procédures, *« excuse-moi je te coupe, mais tu es en train d'expliquer comment tu as cherché la réponse, donc je* *répète moi je veux savoir comment on fait pour vérifier sa réponse* » (Car-Séance 5), ce qui est très inhabituel dans les usages de la classe.

(ii) Contradictoirement, Caroline incite et montre sa satisfaction à voir ses élèves utiliser un savoir récent (séances 5 et 6), ce qu'elle nous confirme en entretien post : « *Et puis même, le fait de se servir des dizaines pour compter plus vite, ça ils l'ont compris.* […] *on travaille la numération en parallèle. C'est bien que ça serve ici* » (Car-S5-entr.post).

La conjugaison de ces deux points complique la perception du glissement du contrat didactique « résoudre et expliciter sa procédure » à « résoudre et vérifier son résultat » par les élèves. D'une certaine façon, un trait de son épistémologie pratique "réinvestir de savoirs fraichement acquis" se trouve en porte à faux avec ce que soutient l'ingénierie didactique.

Trois autres points nous semblent majorer cette difficulté :

(iii) Les élèves acquièrent de nouveaux savoirs, en particulier dans la construction du nombre en tant qu'objet numérique codé dans le système décimal. Aussi, les élèves sont monopolisés par le réinvestissement de ces nouveaux savoirs dans la résolution des problèmes soustractifs qui leur sont proposés. Le contrat pérenne dans la classe les maintient dans l'explication des procédures de résolution. Ceci est particulièrement visible dans la séance 6 où les élèves, cherchant à décrypter les attentes de l'enseignante, enchainent plusieurs explications combinant procédures empiriques et procédures numériques. Notons ici par ailleurs, que le contrat institutionnel (celui qui préside aux pré-construits curriculaires à l'école primaire en France) vient soutenir chez cette jeune enseignante ses usages professionnels. Dans ce site, comme dans le site genevois, mais selon des modalités différentes, nous notons une possible combinaison des déterminants institutionnels et personnels. Nous y reviendrons en conclusion de ce cas.

(iv) La preuve s'appuie sur l'addition, opération que les élèves associent à des problèmes additifs alors que leur sont proposés depuis l'étape 1, relèvent de problèmes soustractifs, ce que Caroline exprime par « *Ils ont conscience qu'ils sont en train d'apprendre quelque chose de nouveau, ils ont envie de faire des moins, mais on leur demande de faire des additions pour vérifier donc ça doit peut-être les perturber* » (Car-S7-entr.ante). Cette réflexion montre chez Carine, une certaine habileté à pointer et comprendre les difficultés des élèves.

(v) Enfin, le choix par l'enseignante des réponses à vérifier ne favorise pas la prise de conscience par les élèves de l'enjeu de l'étape : si elle choisit de faire tester des valeurs supérieures ou inférieures à la solution (en séances 6 et 7), celles-ci, proches de la solution, permettent aux élèves d'ajuster et par conséquence rabattent les élèves vers le contrat usuel : « résoudre et expliquer » (*Cf.* Loane séance 7- Théo séance 7) qui est aussi le contrat institutionnel valorisé par le programme français.

- Une dévolution réduite de la preuve

Dans cette étape de mise en œuvre de l'ingénierie, l'enseignante prend en compte la fonction du pari, « apprêt didactique » (Brousseau 1986) permettant de retarder la vérification empirique. En effet, lorsqu'elle demande à un élève qui vient d'effectuer le sur-comptage s'il maintient ou pas son pari, elle l'incite à reconsidérer sa réponse en la mettant en relation avec le résultat obtenu par sur-comptage. Néanmoins, nous avons vu qu'elle ne laisse le pari vivre jusqu'à l'ouverture de la boite qu'une seule fois, dans un cas où le pari est gagné. En ne laissant pas le pari se dérouler jusqu'à la fin, dans des situations de pari gagné ou perdu, nous considérons que Caroline court-circuite les effets rétroactifs de la boite et des cubes, ce qui confirme les tensions évoquées en début de cas entre sa compréhension mathématique des enjeux de l'ingénierie et sa manière de la mettre en œuvre. La dévolution de l'apprentissage de la preuve par addition en est alors affaiblie, ce qui documente de façon subtile, selon nous, les dimensions tacites de l'épistémologie pratique de cette enseignante au sens de Sensevy (2007).

Ces éléments d'interprétation sont complétés dans les pages qui suivent par la synthèse des observations effectuées sur les plans de l'évolution des milieux et de l'avancée des savoirs.

	Séance 5	Séance 6	Séance 7
Modalité	**Collective** / individuelle	Collective / **individuelle**	Collective / **individuelle**
Matériel	 Boite et cubes en dizaines ou en unités Ardoise individuelle Traces écrites au tableau	 Boite et cubes en dizaines ou en unités Ardoise individuelle Feuilles de travail individuelles A3 Traces écrites au tableau	 Boite et cubes en dizaines ou en unités Fiches de travail individuelles A4 Traces écrites au tableau
Savoirs mathématiques utilisés par les élèves	Nombres et propriétés dans le système décimal Sur-comptage, comptage à rebours, Dénombrement	Nombres et propriétés dans le système décimal Sur-comptage, comptage à rebours, Dénombrement	Nombres et propriétés dans le système décimal Sur-comptage, comptage à rebours, Dénombrement
Le pari	Avant la vérification puis confirmation après	Avant la vérification puis confirmation après	
Langagier	Rassembler, ensemble (1) Mettre+ (1) En tout (5) Trop (0) pas assez, trop petit (0) à partir de… (1) Jusqu'à, arriver à (5) Ajouter / rajouter (22) Addition (0) plus (9) égal (2) Calcul+ (2) Preuve / prouver (0) Vérif+ (43) Reste (7) Pari+ (52)	Rassembler, ensemble (2) Mettre+ (1) En tout (0) Trop (1), pas assez, trop petit (0) Partir de… (0) Jusqu'à, Arriver à (5) Ajouter / rajouter (25) Addition (0) plus (14) égal (0) Calcul+ (6) Preuve/prouver (0) Vérif+ (107) Reste (8) Pari+ (3)	Rassembler, ensemble (6) Mettre+ (1) En tout (2) Trop (1), pas assez, trop petit (0) Partir de… (0) Jusqu'à, Arriver à (1) Ajouter / rajouter (17) Addition (7) plus (24) égal (2) Calcul+ (23) Preuve/prouver (2) Vérif+ (95) Reste (15) Pari+ (0)

Tableau 39 : Synthèse des trois séances de l'étape 2 – « l'addition comme moyen de preuve » – du point de vue mésogénétique (site Caroline)

- Un aménagement du milieu au service du maintien de la relation didactique

Malgré les difficultés à rendre ses attentes lisibles par les élèves, l'enseignante réussit au fil des séances de l'étape à maintenir la relation didactique en jouant sur différentes modifications des milieux didactiques associés à d'autres temps de travail mathématiques en classe :

- Des savoirs mathématiques étudiés « hors ingénierie » pour étayer.

L'enseignante accompagne le déroulement de l'ingénierie en menant en parallèle la construction du nombre et de l'addition. Ainsi, alors que presque tous les élèves comptent encore les cubes un à un en fin de première étape, la numération décimale est introduite dès la séance 5, d'abord dans la simulation des problèmes, puis dans le sur-comptage, enfin lors du calcul avec l'addition, même si par ailleurs ce n'était l'objectif principal : *« le fait de se servir des dizaines pour compter plus vite, ça ils l'ont compris, pas tous, ceux qui sont pas à l'aise en numération… ils pouvaient vérifier de un en un ce qui n'était pas gênant, seulement plus lent »* (Car-S5.entr.post). L'addition posée en colonne intervient en dernière séance de cette étape, conséquence d'un apprentissage de l'algorithme de l'addition avec retenue.

- Des traces écrites de plus en plus explicites

Ainsi qu'elle nous le déclare en entretien, l'enseignante suit les modalités indiquées dans le texte de l'ingénierie comme des prescriptions : ainsi, déclarant faire « *comme c'est dit dans le livret* » (Car-S5.entr.post) elle écrit les problèmes au tableau. Pour autant, elle ne peut s'empêcher de « réécrire » l'énoncé, ne relevant que les mots clés et nombres du problème. Nous n'interprétons pas cette réaction comme une prise de liberté par rapport au texte de l'ingénierie mais comme un réflexe issu de son épistémologie pratique : en entretien post-séquence, Caroline déclare « *faire un problème, c'était à apprendre à résoudre un problème, trouver les données utiles, les données inutiles, bien répondre à la question…* » (Car-entr.ante.seq).

Nous rencontrons la même attitude à propos de la fiche de travail de la séance 6, mais que cette fois-ci nous interprétons comme une prise de distance par rapport à l'ingénierie. En déclarant « *je m'en suis vraiment tenue à ce qui est dit dans l'ingénierie et je l'ai pas trop… je l'ai prise telle quelle, j'ai pas voulu la modifier.* » (Car-S6.entr.post), l'enseignante montre, à première vue, un certain assujettissement au texte de l'ingénierie, que nous interprétons comme un souci de « bien faire », ainsi qu'un trait classiquement décrit chez les enseignants en début de carrière, celui d'une confiance, voire d'un assujettissement aux ressources didactiques disponibles. (« *de toute façon elle marche cette ingénierie !* » – notes au vol) Mais les difficultés rencontrées dans la séance 6 la pousse à remettre en question l'organisation de l'étape : « *c'est peut-être trop violent finalement, le passage de la manipulation à l'écrit* » et à prendre la liberté d'organiser les traces écrites de la séance suivante différemment comme nous l'avons vu au fil des analyses mésodidactiques de l'étape. Ainsi, les traces des vérifications du premier problème de la séance 7 que nous avons soulignées, font substrat pour la construction du sens de la vérification tandis que la fiche de travail individuelle réserve une place spécifique à la vérification.

- Une attention particulière aux éléments langagiers introduits dans le milieu didactique

Nous constatons qu'au fur et à mesure de l'avancée de l'étape, conformément au texte de l'ingénierie didactique, l'enseignante introduit dans le milieu des éléments orientant les élèves vers l'addition. Nous avons vu que les termes tels que « *ajouter* » ou « *rajouter* » sont présents dès la séance 5, ils se rapportent à des cubes et non à des nombres. Les mots « *plus* » en tant qu'opérateur et « *addition* » ne sont prononcés pour la première fois respectivement qu'en séances 6 et 7 et qui plus est, par des élèves. Caroline en profite alors pour les placer définitivement dans le milieu didactique de la séance 7 et pour installer l'addition comme moyen de preuve. À l'opposé, des termes ou expressions que l'on aurait pu voir apparaître dès la séance 5 tels que « *rassembler* » ou « *mettre ensemble* » n'entre dans le milieu didactique qu'à la séance 7. Deux raisons nous semblent justifier ce fait. La première provient de l'ingénierie elle-même. Les problèmes des séances 5 et 6, de structure et-E soutiennent l'introduction de la notion de différence par sa définition[97] : il s'agit de rajouter les cubes enlevés à ceux restants dans la boite et de comparer à la quantité initiale. Les problèmes de la séance 7, de structure eEe, incitent à la réunion de deux parties pour comparer au tout. La seconde raison est à chercher du côté de Caroline qui tente de donner un sens « pratique » à la preuve en désignant les deux parties à réunir. Nous rappelons que les élèves travaillent en parallèle l'addition, et que celle-ci est introduite comme une réunion de deux collections. Par ailleurs, les traces écrites de la séance 6 ont montré que très peu d'élèves vérifient leur réponse. L'enseignante tire ainsi profit des éléments de l'ingénierie didactique pour donner davantage de sens à l'addition comme moyen de preuve.

[97] La différence de a et b est le nombre qui rajouté à b permet d'obtenir a.

	Séance 5	Séance 6	Séance 7
Chronogenèse d'une preuve : de la preuve empirique à la preuve intellectuelle			
Place du pari	**Pas de définition du pari** **Le pari est maintenu ou pas après vérification** par sur-comptage : « est ce que tu veux toujours parier avec moi ? »  **La boite n'est pas ouverte : pas de rétroaction du milieu**	Le pari n'a lieu que pour le problème 2 et n'a plus qu'une fonction ludique.	Aucune allusion au pari
Vérification intellectuelle	Sur-comptage de 1 à 1 des cubes sortis, puis en utilisation des groupements par 10 / comparaison à la quantité initiale	Pb1 : Sur-comptage de 1 à 1 des cubes sortis, puis en utilisation des groupements par 10 / comparaison à la quantité initiale Pb2 : « ajouter » ; « mettre ensemble les cubes » ; addition des deux parties et comparaison au tout. Pb3 : seul 2 élèves effectuent vérifient leur réponse, par addition.	Addition posée en colonne Mettre ensemble se traduit par une addition
Vérification empirique	**Dénombrement des cubes restants** dans la boite pour un seul problème	**Pas de vérification empirique**	**Pas de vérification empirique**
Lieu d'**explicitation** des procédures de résolution par les élèves.	Problème 1 : avec le matériel, avec le matériel et le système de numération, calcul réfléchi (numération décimale)	Problème 2 : sans le matériel, calcul réfléchi avec utilisation du système de numération	Problème 1 : ajustement après avoir vérifié une réponse
Techniques professorales	Appel à des élèves chronogènes NP0, NP2	Appel à des élèves chronogènes NP2	Appel à des élèves chronogènes Effet Topaze, Jourdain NP2
Élèves successivement interrogés	Pb1 : Charlotte ; Nicolas, Océane, Jonas, Charlotte, **Loane** Pb2 : **Théo**, Océane, Emma Pb3 : Saousem, Sami, **Loane** Pb4 : Yanis, **Jonas** Pb5 : **Jonas**	Rappel : **Jonas** Pb1 : Colleene, (Océane, Théo), **Jonas** Pb2 : **Jonas**, **Loane**, Emmanuella, **Anatole** Pb3 : Colleene, Océane, **Jonas**, Sami, **Théo**	Rappel : **Jonas**, **Anatole**, **Théo** Pb1 : Renaud, **Loane**, Jonas, **Loane**, Sami, **Loane**, **Jonas**, **Théo** Pb2 : Océane, **Loane**

Tableau 40 : Synthèse des trois séances de l'étape 2 – « l'addition comme moyen de preuve » – du point de vue chronogénétique (site Caroline)

Sur le plan de la chronogenèse : une posture haute de l'enseignante pour peser sur l'avancée du savoir

Si l'enseignante se met en retrait lors des étapes de recherche, elle prend une position topogénétique de plus en plus haute au fil de l'étape et utilise différentes techniques pour peser sur l'avancée du savoir.

- Des régulations plus affirmées

Ces régulations se manifestent sur plusieurs plans. Alors que Caroline faisait peu appel à la mémoire didactique et ne ponctuait les recherches des élèves d'aucune conclusion lors des séances des premières étapes, l'enseignante fait explicitement des appels à la mémoire didactique à partir de la séance 6. Dans une volonté manifeste d'accélérer le temps didactique, elle reprend un problème traité en séance précédente et s'appuie sur des élèves chronogènes pour rappeler le sur-comptage comme outil de vérification d'une réponse.

Ces régulations se manifestent aussi lors du traitement de chaque problème. Comme nous l'avons vu, si l'enseignante laisse les élèves vérifier leurs réponses, elle reprend la main à chaque fin de problème en séance 6 et 7, rajoutant un élément susceptible de les amener vers la vérification par l'addition.

Enfin, ces régulations se manifestent lors d'apartés que l'enseignante entretient avec certains élèves ou groupes d'élèves. Ces apartés deviennent plus conséquents en dernière séance et donnent lieu à des trilogues (Schubauer-Leoni, 1997b) : tout en s'adressant à un ou plusieurs élèves, l'enseignante oriente l'activité de l'ensemble des élèves.

- Une utilisation récurrente d'élèves chronogènes

Les élèves de la classe ont des niveaux inégaux dans maitrise de la numération ainsi que dans leur décodage du contrat didactique. Aussi, l'enseignante maintient la relation didactique en jouant sur leurs différentes habiletés. Ainsi, si les élèves d'un faible niveau sont dans un premier temps interrogés pour la lecture du problème et la vérification empirique d'une réponse, les élèves d'un bon niveau sont systématiquement appelés en conclusion pour la vérification intellectuelle d'un résultat. Les analyses des séances soulignent que trois élèves (Théo, Jonas et Loane) prennent essentiellement part à cette accélération du temps didactique.

- L'utilisation d'effets de contrats (Jourdain et Topaze)

Cherchant à se dégager à la fois du contrat didactique institutionnel et pérenne à la classe l'amenant à endosser un topos très en retrait, ce qui est encore très prégnant lors de la séance 6, nous avons vu que l'enseignante use dès le début de la séance 7 d'effets Topaze et d'effets Jourdain pour tenter d'expliciter ces attentes. Ce faisant, Caroline prend le risque de rabaisser l'intention didactique du moment, baisse qu'elle compense en ré-introduisant dans le milieu didactique vocabulaire évoquant le matériel « *mettre ensemble* », « *rassembler les cubes* ».

Ayant pointé quelques caractéristiques singulières de la manière dont cette enseignante en début de carrière met en œuvre l'ingénierie broussaldienne, nous poursuivons l'analyse en nous centrant, comme pour les deux enseignantes chevronnées de Suisse et de France sur l'étape 4. Il convient toutefois d'indiquer ici que Caroline, lors de l'étape 3 dont l'enjeu est essentiellement le travail de la technique (*Cf.* Analyse épistémique de l'ingénierie didactique), a consacré 2 séances supplémentaires pour sa mise en œuvre. Nous y reviendrons en conclusion du cas.

2.2.3. Analyse de l'étape 4 : « La stratégie des essais»

L'objectif de cette étape, tel qu'il est décrit dans l'ingénierie didactique, est que l'élève se serve de l'outil de vérification comme d'un outil de résolution. Trois leçons sont consacrées à cette étape. Les deux premières ont pour but d'élaborer une stratégie par essais pour effectuer des soustractions engageant une retenue et la dernière d'améliorer cette stratégie. L'ingénierie la décrit comme une étape de formulation, de reconnaissance et d'identification des stratégies de résolution (Berté, 1996, p.32). L'enseignante en conserve le déroulement temporel.

2.2.3.1. Analyse mésodidactique des trois séances

Comme pour les autres sites nous reprenons l'analyse à la séance 15 de l'étape 4.

2.2.3.1.1. Séance 15

L'objectif de la séance tel qu'il est déclaré par l'enseignante est « *d'identifier les procédés de calcul des élèves et de les amener à adopter cette stratégie des essais, à faire un premier essai, à le tester. On va montrer surtout qu'on s'arrête pas au premier essai qu'on peut l'ajuster en vérifiant, en faisant une addition.* » (Car-S15-entr.ante). Caroline prévoit la séance en deux étapes ne se différenciant que par leur modalité de travail : la première est collective tandis que la seconde est individuelle. Pour chacune des deux étapes, elle prévoit d'afficher les productions des élèves et de faire « *identifier les méthodes de calcul* » (Car-S15-entr.ante). En terme de difficultés, elle reconnaît que si les élèves savent vérifier leurs réponses, la vérification n'est pas spontanée : « *à chaque fois ça revenait mais c'est toujours moi qui essayais de le faire ressortir, ça revenait pas spontanément.* » (Car-S15-entr.ante).

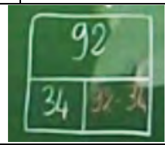
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00	Problème 1 : un cahier a 92 feuilles, 34 sont écrites. Combien y a-t-il de feuilles blanches dans ce cahier ? (rép. 58)			
	Col.	Lecture à voix haute	P illustre le problème en prenant un cahier d'élèves P fait reformuler le problème en questionnant sur les données du problème	Saousem lit le problème
1 :00	Ind.	Résoudre	P demande explicitement d'expliquer sa démarche : « *Vous écrivez votre recherche oui, le calcul, le résultat. Si vous faites un schéma, vous faites le schéma.* »	Sami demande si l'on écrit que la réponse
3 :33	Col.	Repérer les données du problème	Interruption du temps de recherche : « *De quel type de problème il s'agit là ?* » P interroge sur les données du problème *« Combien il y en a, Yanis, des feuilles dans le cahier en tout ? […] Et dans ce cahier, on a deux parties. On a une partie de feuilles écrites. Il y en a combien des feuilles écrites ? […] Ce qu'on cherche nous, les feuilles blanches, comment on les écrit sous la forme d'un calcul ? ».* P schématise ensuite le problème.	 Théo indique une opération : « *moins* » ; E2 : « *On enlève* » Les élèves ne semblent pas avoir de difficultés à énoncer la soustraction 92 – 34
6 :21	Ind.	Résoudre	P s'occupe de Yanis en particulier et lui demande d'expliquer sa démarche puis de vérifier	Yanis explique sa procédure mais ne sait vérifier.
7 :09			P interpelle la classe : « comment fait-on pour vérifier ? » Discussion sur ce que représente le nombre 92. P s'appuie sur la schématisation du problème.	Loane « *On fait le calcul plus ce qui est écrit.* » Sami : « *Ah, mais on fait 92 – 34 et on vérifie que c'est la bonne réponse.* »
9 :06			P fait le tour des élèves : « *j'en vois beaucoup qui ont fait la soustraction en colonne.* »	
9 :55 15 :24	Col.	Débat collectif	P affiche la production de Charlotte (procédure par dessin). Discussion sur comment vérifier la réponse. P refuse de discuter sur les réponses non vérifiées et appelle Jonas, puis Sami. P explique à la place de Sami qui ne sait pas expliquer et qui a gommé son travail : « *il a enlevé 6 dizaines à 9 dizaines = 6 dizaines. Il trouve 60.* » A partir de cette réponse, P initie l'ajustement : « *Il trouve 94 et ce qu'on veut c'est 92, donc qu'est-ce qu'on fait ?*» La calculatrice est utilisée pour effectuer les vérifications.	Charlotte dessine 92 ronds et en barre 34 puis compte le reste (57). Elle ne sait pas vérifier. Théo : « *On rajoute, on fait 34 + 57…et si ça tombe sur 92, c'est ça.* » A la demande des élèves (Nicolas, élève agité)) la vérification 57 + 34 est effectuée à la calculatrice. Jonas : même démarche que Charlotte mais s'appuie sur la numération décimale (9 dizaines et 2 unités). Vérifie en posant l'addition en colonne, puis écrit « *vraie réponse : dizaines- unités : 58* »
17 :51		Identifier des méthodes de calcul pour la solution	P affiche la feuille de Théo, puis d'Anatole et leur demande d'expliquer. P reformule à chaque fois les propos des élèves : elle profite de Théo et d'Anatole pour insister sur la preuve qui permet de savoir « *que c'était pas çà* » pour insister sur « *faire plusieurs essais,* […], *ajuster, modifier* ».	Renaud « *a fait des calculs* » : 92 +34 Théo : a essayé 88 « mais ça pouvait pas parce que allait faire plus que 92 », puis 38, puis 62, puis 58 Anatole a essayé 64 « mais ça faisait plus que 92 », puis 62, puis 58
21 :29			P : « *Donc, on peut effectivement chercher, faire plusieurs essais, et à chaque fois vérifier en faisant l'addition pour voir si c'est la bonne* ». Nombre d'élèves ayant réussi : 6	6 élèves ont trouvé la solution. Peu d'élèves ont laissé par écrit leur démarche et/ou leur vérification. Certains ont gommé. Nicolas est très agité
22 :48	Problème 2 : un cahier a 92 feuilles, 25 sont déjà écrites. Combien y a-t-il de feuilles encore blanches dans ce cahier ?			
23:34	Ind.	Résoudre	P relit l'énoncé puis : « *comme tout à l'heure, vous allez écrire votre recherche sur la feuille, et je veux tout voir moi. Je veux voir ce que vous cherchez, ce que vous vérifiez, tous vos essais.* »	Lecture très hésitante du problème par Nicolas
25 :17			P s'occupe du groupe CE2	Les élèves (CE1) sont concentrés sur leur travail
27 :17			P revient dans le groupe CE1 puis circule dans le groupe et s'arrête sur Charlotte, puis Nicolas, puis revient sur Charlotte, puis Loane, puis Saousem.	Les élèves commencent à s'agiter. Loïc s'est affalé sur la table et fait semblant de dormir.
35 :42	Col.	Débat collectif	P ramasse les feuilles des élèves et les affiche toutes au tableau. « *J'ai affiché toutes vos réponses ; je vois des additions, je vois des soustractions. Quel était le genre de problème ?* […] *Qu'est-ce qu'il fallait faire comme calcul pour trouver ?*»	Saousem, Yanis et Colleene ont fait une addition : 92 + 25 Les élèves commencent par rappeler les données avant d'indiquer l'opération « soustraction »
40 :22			P appelle Jonas pour l'aider à classer les réponses des élèves : D'un côté, la soustraction 92 – 25 est écrite ; de l'autre, l'addition 92 + 25 est écrite,	
44 :33			Appelle des élèves pour expliquer leur procédure et la vérification : Emmanuela, Sami, puis Loane. P ne relève pas les erreurs dans les opérations mais se focalise sur la preuve pour valider ou invalider. Reformulation de ce que dit Loane : « *Voilà, tu avais trouvé 10 de plus au premier essai, donc tu as enlevé une dizaine pour essayer ton deuxième essai, et là tu es tombée sur 92. Donc, quelle était la bonne réponse ?* » 3 élèves ont trouvé la solution par essais successifs.	Emmanuela choisit 63 au hasard, puis le vérifie par l'addition, puis change sa réponse pour 67mais ne la vérifie pas. Sami s'appuie sur la numération 9 diz – 2 diz = 7 fait ensuite la somme des unités 2 +5 = 7. Il vérifie et trouve 12 (oubli du zéro). Idem Loane qui vérifie et trouve 102 Loane ajuste en enlevant une dizaine : « *je me disais peut-être que 67 c'est la bonne réponse puisque c'est 10 de moins, et là ça faisait 10 de plus* »
50 :33	Bilan : Alors, qu'est-ce qu'on peut dire sur ce qu'on vient de faire là aujourd'hui ?			
	P : « on est vraiment dans la résolution du problème et on cherche comment faire. » Loane : on change de réponse ce qui permet à P de reprendre *« bah oui, on change, on ajuste. On ajuste sa réponse. Donc on enlève, si jamais on a trouvé trop, on rajoute si on a pas trouvé assez ».* P annonce la séance suivante : « *faire des essais plus efficaces* »			

Tableau synoptique 30 : séance 15, site Caroline (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Durant cette séance l'enseignante suit, selon ses dires, le « *protocole* » (Car-S15-entr.post) de l'ingénierie didactique, néanmoins elle peine à faire émerger la résolution de problèmes par essais successifs. Nous l'observons prendre appui sur le premier problème pour définir l'enjeu d'étude puis sur des élèves chronogènes, pour expliciter ses attentes.

- Le premier problème comme tentative de définition de l'enjeu d'étude

Mettant en œuvre le premier problème décrit dans l'ingénierie, l'enseignante tente de constituer un milieu didactique favorable à l'émergence de la résolution de problème par essais successifs. Elle procède en trois temps : (i) la reconnaissance d'un problème soustractif et l'écriture de la différence avec l'opération soustraction ; (ii) la mise en œuvre de la preuve pour vérifier les résultats (min 7:09) ; (iii) l'exemplification de la méthode par essais successifs (min 7:09). Pour ce faire, elle enrichit le milieu didactique et utilise des élèves chronogènes.

- Enrichir le milieu didactique emprunté à l'ingénierie

La première préoccupation de l'enseignante est de savoir si les élèves reconnaissent le type problème. Aussi, dès l'entame de séance, laissant un temps assez court de recherche (2 minutes), Caroline reprend la main et introduit dans le milieu didactique la schématisation vue lors de la séance précédente (min 3:33). Ce faisant, elle oriente la reconnaissance du problème à l'aide d'une schématisation (*cf.* figure ci-dessous), l'ostension réduisant l'incertitude quant à la reconnaissance du problème par ses élèves.

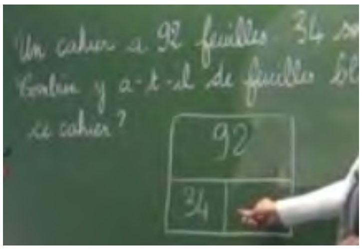


Figure 62 : schématisation du problème 1

La deuxième préoccupation porte sur la mise en œuvre de la vérification. Circulant dans les rangs, elle constate que peu d'élèves font la vérification, confirmant les propos tenus en entretien *ante* : « *ça revient pas spontanément, il faut le demander…* ». Aussi, choisit-elle d'interroger deux élèves qui, chacun à leur manière, font avancer le savoir relatif à la preuve :

Le premier élève est un élève faible qui résout encore les problèmes avec un dessin (*Cf*. Figure 63, ci-après). L'enseignante profite de l'erreur de comptage de cet élève pour remettre en mémoire la procédure de vérification (min 9:55). Afin de se dégager de toute potentielle erreur dans le calcul de la vérification, elle introduit dans le milieu didactique la calculatrice pour effectuer le calcul de vérification.

Le second élève est d'un bon niveau. Il résout aussi avec un schéma (*Cf*. Figure 64, ci-dessous) mais s'appuie sur la numération. Sa trace écrite est l'exemple type de ce que Caroline attend comme production écrite : l'écriture de l'opération, une trace de la recherche (ici matérialisée par la schématisation de la situation), l'addition posée en colonne représentant la vérification et enfin, une phrase-réponse « *vraie réponse : 58* » (min 15:24).

En exposant au tableau ces deux traces écrites, l'enseignante introduit dans le milieu didactique de pièces visant à remettre en mémoire la vérification sous les deux formes vues dans les séances précédentes : la réunion des deux parties pour obtenir le tout dans le premier cas (Figure 63), le nombre proposé qui, ajouté au plus petit, est égal au plus grand (Figure 64).

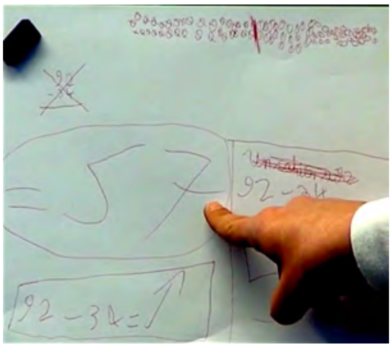


Figure 63 : résolution par dessin

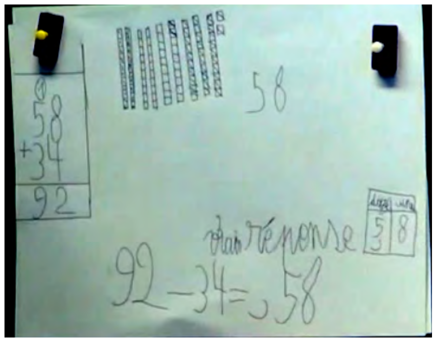


Figure 64 : résolution par schéma

– Interroger des élèves chronogènes pour exemplifier ses attentes.

La troisième préoccupation de l'enseignante est de transformer la preuve, outil de vérification d'un résultat, en un outil permettant d'atteindre la solution par essais successifs. Nous l'observons alors choisir des élèves qui avaient commencé dans les séances précédentes à modifier leur réponse en fonction du résultat de la preuve. Ainsi, pour le premier problème, elle choisit successivement Théo et Anatole, deux élèves performants (min 17 :51). Si Théo n'explique pas comment il choisit les nombres à tester, il montre qu'il résout par essais successifs : « *au début j'avais marqué 88, mais ça pouvait pas parce que ça allait faire plus que 92, alors j'ai fait 58 […] j'ai compté dans ma tête et c'était pas ça. Alors j'ai fait 38, c'était pas ça. Après j'ai mis 62, c'était pas ça. Alors j'ai remis 58* » (Car-S15-min 18 :34). Anatole tient un discours plus précis : « *j'ai compté dans ma tête, ça avait fait 64,* […] *j'ai recompté ça faisait plus que 92, donc j'ai barré et après j'ai essayé 62.* […] *mais j'ai pas mis*

6 comme je m'étais rendu compte que c'était pas ça. Et après j'ai mis 58 et c'était ça » (Car-S15-min 20 :35). Les explications de Théo et d'Anatole indiquent que leurs essais ne sont pas effectués au hasard mais raisonnés (utilisation des niveaux de preuves NP2et NP5). Or l'enseignante ne réagit pas, ne retenant qu'une succession d'essais pour atteindre la solution et non la logique d'enchainement de ces essais telle qu'au cœur de l'ingénierie. « *Donc, effectivement, chercher, faire plusieurs essais, et à chaque fois vérifier en faisant l'addition pour voir si c'est la bonne* ». (Car-S15-min 21 :29). Ceci a pour effet de revoir à la baisse l'intention didactique initiale de l'enseignante : il ne s'agit plus d'élaborer une « stratégie des essais » mais de faire des essais, puis de vérifier. Nous faisons l'hypothèse que c'est la vérification qui, à ce moment-là de la séance, est la préoccupation centrale de l'enseignante. Ce glissement modifie sensiblement le sens de ce qui est visé par l'ingénierie.

- Le deuxième problème comme élément de consolidation de la preuve.

Les observations de la suite de la séance pointent :

(i) Une non reconnaissance du type de problème par les élèves

Sur les quinze élèves, six ne reconnaissent pas un problème de type soustractif : bien que cela ne soit pas relevé par l'enseignante, nous faisons l'hypothèse que le mot « *encore* » dans l'énoncé du problème oriente ces élèves vers une addition. Caroline tente alors de réguler en circulant d'élève en élève et en distillant au fur et à mesure des indications entendues de l'ensemble des élèves (min 28 :41, min 31 :25, min 34 :18).

(ii) Une résolution empirique qui empêche l'accès à une procédure par ajustements.

La plupart des élèves s'appuient sur un dessin ou un schéma de la situation. Pour beaucoup, mais pas tous, le dessin permet de fournir une réponse correcte du premier coup, ce qui ne donne pas l'enseignante la possibilité de faire émerger une procédure de résolution par essais : « *Là je vois des schémas, mais bon, le calcul non* » (min 43 :08)

Ces évènements amènent l'enseignante à bifurquer vers une séance de consolidation de la preuve et non plus de la construction d'une procédure de résolution par essais, ce qui marque un écart avec les enjeux de l'ingénierie. En effet, lors de l'affichage au tableau des productions des élèves (min 40 :22), elle effectue un classement selon la reconnaissance du type de problème et l'écriture d'une preuve. Trois élèves seulement ont résolu le problème par essais successifs. L'enseignante ne les interroge qu'en fin de séance, les laissant introduire dans le milieu didactique des amorces d'ajustement qui lui donnent alors l'occasion d'introduire et d'annoncer l'objectif de la séance suivante : « *la prochaine fois on s'entraînera encore à faire des essais efficaces.* » (Car-S15-min52).

L'entretien *post* nous éclaire sur la vision cumulative des acquisitions mathématiques de l'enseignante. Caroline qualifie la séance de « *laborieuse, très difficile* » et explique les difficultés pour atteindre ses objectifs par le fait que, comme elle l'avait évoqué en entretien *ante,* « *la preuve* [ne soit pas] *pas acquise pour tous* ». En déclarant « *pour que les élèves puissent faire des essais, il fallait absolument que la preuve… qu'ils aient compris comment faire la preuve. Je ne peux pas passer par-dessus !* », elle dévoile ainsi une partie de son rapport à l'enseignement et à l'apprentissage. Elle ne peut concevoir d'introduire une nouvelle notion tant que les précédentes ne sont pas stabilisées.

Au final, cette séance qui avait pour visée (pour l'enseignante) de résoudre par essais successifs est devenue une séance de révision/consolidation, voire d'entrainement à la vérification intellectuelle d'un résultat.

2.2.3.1.2. Séance 16

L'enseignante définit l'objectif de la séance comme la « *continuité de la leçon neuf euh… pour les élèves qui n'ont pas de procédés personnels, il faut qu'ils arrivent à proposer un nombre et à l'éprouver. Et ensuite euh… le but, voilà, c'est toujours identifier les essais comme moyens possibles de résolution.* » (Car-S16-entr.ante). Elle déclare ne pas vouloir suivre le texte de l'ingénierie qui préconise un temps de recherche individuel de 10 minutes, mais se propose de mener le premier problème « *à l'oral, en collectif, au tableau,* […] *plutôt que de leur donner en recherche* » (*Ibid.*). Les difficultés qu'elle prévoit lors de la résolution du second problème ne sont pas d'ordre mathématique mais en rapport avec le niveau de lecture de ses élèves : *« il fait cinq lignes donc je sais que j'ai trois élèves, là, qui sont en difficultés. En lecture ça va être dur. Je le trouve moins accessible dans la compréhension que celui-là* [désignant le premier] *».*

La séance est structurée en quatre étapes (voir synopsis ci-après) :

- un rappel à la mémoire didactique,
- une explicitation de ses attentes relatives à la résolution par essais successifs,
- une mise en œuvre individuelle de la résolution par essais successifs,
- un usage de la calculatrice pour résoudre des « *problèmes non prévus* » (Car-S16-entr.post) dans le texte de l'ingénierie.

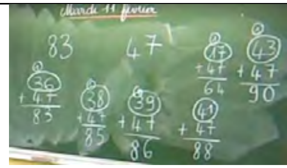
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Description narrative de la séance selon ce que dit et fait le professeur (P)	Description narrative de la séance selon les attitudes et procédures des élèves
0 :00 2 :13	Col.		**Appel à la mémoire didactique :** *« Pour vérifier notre réponse, comment on faisait ? » P fait appel à Jonas.* Conclusion de P : *« D'accord, on testait. Voilà, on ajoutait, on faisait des additions pour prouver. »*	Jonas rappelle la vérification sur un problème qu'il invente pour l'occasion. *« En fait, on a 54 moutons qui ne sont pas pelés. Le fermier en a pelé 42. Combien en reste-t-il ? 14. Et on regardait + 42 si ça faisait 54. Un peu comme ça. »*
3 :15	Problème 1 : Sur le bureau il y a 83 cahiers, des rouges et des verts. Il y a 47 cahiers rouges. Combien y a-t-il de cahiers verts ?			
3 :53	Col.	Proposer / vérifier	P écrit les nombres 83 et 47 au tableau et demande de *« proposer une réponse, sans réfléchir »* puis demande de vérifier. P pose l'addition en colonne.	Anatole propose 17 puis, *« Là, on additionne… On regarde si 47 + 17 = 83 ? »* « c'est pas la bonne réponse »
4 :32		tester	P initie l'ajustement : *« à partir de ce 17, du coup il faut ajuster. Ce n'est pas assez, c'est trop, 17 ? »* P fait vérifier la valeur 43 : *« pour vérifier, qu'est-ce que je fais ?».* Après vérification de 38 : *« ça veut dire qu'on en a combien de trop, là ? »*	Sami propose 43, Yanis 47 Sami : *« 43 + 17 ».* réaction de Jonas : *« il faut reculer ! »* Emmanuelle propose 41, Loïc 39 puis Nicolas 38. Certains font les rigolos (plaisir de prononcer un grand nombre ?). Yanis : *« un million »*
6 :51		ajuster	P reprenant Jonas : *« Voilà, on en a 2 de trop dans notre résultat, donc il faut en enlever 2 à notre réponse. Donc 36, on va vérifier. »* P pose l'addition, conclut *« c'est la bonne réponse »*	Jonas : *« Si on enlève 2 unités ça fera 36 »*
7 :3 0		Écouter la maitresse	revenant sur l'activité : *« Alors qu'est-ce qu'on a fait pour trouver la bonne réponse ? »* P fait remarquer pour chaque essai, si c'est trop ou pas assez. P fait compter le nombre d'essais pour arriver à la solution : 6	Réactions des élèves : « plein de calculs » Les élèves ne parlent pas de vérification ou de test mais de seulement de calculs. Yanis : « Le dernier, à la fin il est bon »
9 :26			Conclusion de P : *« Donc ce qui est important quand on a un problème comme ça, c'est de proposer un nombre, d'essayer de voir, de le tester, de vérifier si c'est la bonne réponse. Si c'est pas la bonne réponse, qu'est-ce qu'on fait ?* [Réponse d'Emmanuela] *On choisi un autre nombre, voilà, on ajuste. Soit on en prend … Soit on prend un nombre plus grand, soit plus petit, tout dépend du résultat qu'on a trouvé. Là, c'est ce qu'on a fait tous ensemble. »*	Emmanuela : *« On choisi un autre*  *nombre. »*
9 :53	Problème 2 : J'ai 49 cubes bleus dans le plateau. Dans la boîte il y a des cubes rouges. Je prends les cubes bleus qui sont dans le plateau et je les mets dans la boite avec les rouges. Je compte tous les cubes dans la boîte. Il y en a 87. Combien de cubes rouges y a t-il dans la boîte ?			
13 :11 15 :42	Col.		P fait lire l'énoncé par une élève, le relit puis demande à deux élève de le reformuler. P refuse de mimer le problème mais reformule par *« Il y en a 49. Les cubes rouges, on sait pas. On met les 49 cubes bleus avec les rouges et quand on compte en tout, les bleus et les rouges, on en trouve 87, donc on veut savoir maintenant combien il y a de cubes rouges. »* P autorise le dessin.	Ashley lit l'énoncé : lecture fragile. Jonas manifeste son incompréhension du problème Yanis et Océane reformulent pour que tous comprennent. Impression de panique des élèves : ils « se ferment » et cherchent à obtenir des informations de leur enseignante.
16 :02	Ind.	Recherche par essais successifs	P : *« je veux les voir vos essais »* P circule d'élève en élève : Yanis, Sami, Loane, Emmanuella, Nicolas, Anatole. P donne un problème supplémentaire de même structure à Loane et Emmanuella qui ont fini (131 cubes, 72 rouges,? cubes bleus)	Certains élèves dessinent, d'autres ajustent en modifiant le nombre de cubes bleus (Sami), Nicolas réclame une calculette. Loane et Emmanuella : *« c'est le premier* [essai] *qui compte »*
26 :38 32:38	Col.	Débat collectif	P récolte les feuilles des élèves et les affiche au tableau en les classant : reconnaissance d'une différence ou non ; essais ou non. *« qu'est-ce qu'on écrit comme calcul ? »* *« ça serai 87 - 49. Mais on sait pas le faire, et c'est pour ça qu'on fait des essais. »*	Non reconnaissance d'un problème soustractif par trois élèves : Yanis, Saousem, Loane : 87 - 49 Élèves très agités.
33 :02 35 :29			P interroge les autres élèves sur leurs essais : Sami, puis Anatole, Ashley. P s'attache principalement au 1er essai Conclusion : *« tout le monde est capable de trouver la solution, même si vous savez pas encore faire les soustractions. Mais en essayant, comme ça, en ajustant… ».* P ramasse les productions écrites.	Sami a commencé « au hasard » par tester 40. Loane justifie « parce qu'il fallait trouver dans les 80 » Anatole fait plusieurs essais mais oublie les retenues dans les calculs d'addition. Jonas n'a pas fait d'essai : résolution avec un dessin. Sami et Nicolas perturbent le cours. Les élèves sont de plus en plus agités.
42 :43	Problèmes à résoudre avec la calculatrice			
	Col. / Ind.	Résoudre les problèmes	1) *« J'ai 135 bonbons et j'en mange 40. Combien m'en reste-t-il ? »* 2) *« J'ai 212 billes, j'ai joué avec Renaud à la récréation, et j'en ai gagné 75. Combien j'en ai, après la récréation ? »* 3) *« Dans l'école, il y a 374 élèves, il y en a 92 qui font du sport. Combien ne font pas de sport ? »*	Joie des élèves d'effectuer le calcul à la calculatrice ! 1 élève a fait une addition. Recherche du mot inducteur pour le second problème
50 :31			4) *J'ai 283 stylos bleus, et il m'en faudrait 978. Combien m'en manque-t-il ?* P schématise le problème en « partie-tout»	Les élèves ne reconnaissent pas ce problème comme relevant d'une différence. Effet de contrat
54 :28	**Fin de la séance**			

Tableau synoptique 31 : séance 16, site Caroline (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

Alors que lors des séances précédentes Caroline faisait peu d'appel à la mémoire didactique, l'enseignante fait cette fois-ci une remise en mémoire de la procédure de vérification d'une réponse à un problème soustractif. Comme pour les séances précédentes, elle laisse un élève chronogène, Jonas, prendre en charge ce rappel (min 02 :13).

- Un topos en surplomb

Le premier problème prévu dans l'ingénierie sert d'illustration de ce que l'enseignante attend pour le reste de la séance. Alors que dans la séance précédente elle était en retrait, Caroline adopte cette fois-ci une position surplombante, dans un souci de contrôle déterminé des interactions :

- (i) elle provoque une réponse « *au hasard* » de la part d'un élève d'un bon niveau, pour ensuite demander sa vérification, obligeant ainsi à formuler la vérification : « *on regarde si 47 + 17 = 83* » (min 3:53) ;

- (ii) elle introduit elle-même la question « *est-ce trop ou pas assez ?* » (min 4:39 amenant ainsi tous les élèves à faire d'autres essais et à vérifier à nouveau.

L'enseignante tente ainsi de peser sur l'avancée du savoir en donnant au premier problème une fonction didactique « ostensive» écrite sur le tableau :

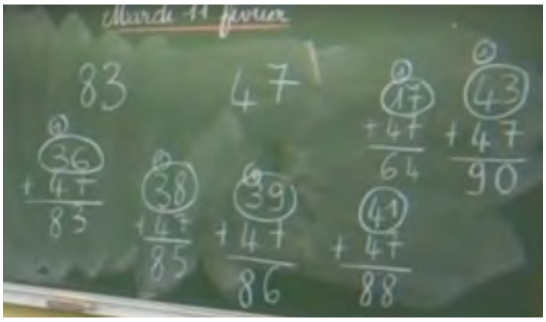


Figure 65 : séance 16 - essais successifs lors de la résolution collective du premier problème

En dirigeant de manière serrée les interactions, Caroline ne dévolue pas la résolution par essais mais montre explicitement ses attentes. La trace au tableau (*cf.* ci-dessus Figure 65) se veut être une exemplification de ce qu'elle souhaite lors des prochaines résolutions de problèmes.

- Un usage récurrent de l'analogie

Caroline a pointé le deuxième problème comme difficile de par sa longueur. Dans sa mise en œuvre, nous l'observons écarter la possibilité de simuler le problème avec la boite et les cubes, préférant le faire reformuler d'abord par les élèves, ensuite par elle-même (min

13:11). Cette manière d'agir conduit à une simplification de l'énoncé. Le problème devient alors « *on met les **49 cubes bleus avec les rouges** et quand on compte **en tout**, **les bleus et les rouges, on en trouve 87**. Donc on veut savoir maintenant **combien il y a de cubes rouges*** » (min 15:42). En le portant l'attention sur la couleur des cubes, en faisant mention du tout, Caroline privilégie une vision en « partie-tout » du problème et le rapproche ainsi de la structure du premier problème. Par ailleurs, elle émet un effet Topaze de manière assumé, en demandant un traitement analogue à celui du premier problème (*Cf.* ci-dessus Figure 65*)* : « *voilà, comme au tableau, si vous faites plusieurs essais, je veux les voir vos essais* » (min 16:02)

- Un étayage individualisé

Pour autant, la réussite n'est pas assurée. Caroline s'en assure alors en circulant de groupe en groupe. Le tableau ci-dessous détaille la circulation de l'enseignante dans la classe. Utilisant la technique du trilogue, Caroline fournit de proche en proche une aide à la résolution du problème.

1 : schématiser la situation :

2 : faire un deuxième essai
« Tu refais à partir de ce quarante-là d'autres essais. »

3 : garder la trace de ses essais
« Tu laisses ton premier essai, et à côté, tu montres le deuxième. […] Pareil, tu fais tes essais, je veux les voir. […] Tu cherches, tu mets tes essais là. »

4 : prouver sa réponse
« tu proposes un nombre de rouges et tu vérifies si c'est le bon, et pour vérifier, il faut que tu l'ajoutes aux bleus, et que tu trouves 87 »

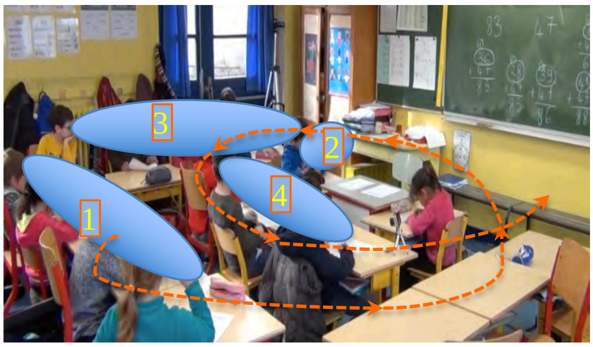


Tableau 41 : Séance 16 - étayage lors de la recherche de la solution du problème 2

L'enseignante, passant ainsi en revue l'ensemble des élèves du groupe CE1 de la classe, cherche à réduire les écarts cognitifs entre les élèves.

- Une justification de la résolution par essais qui ne se dévoile qu'en fin de séance

Rappelons que le deuxième problème appartient à la catégorie Et+e[98], premier problème de cette catégorie à résoudre numériquement dans l'ingénierie. Par ailleurs, même si le problème prend la forme d'une narration, la sémantique utilise des mots induisant l'addition : « **Je prends** les cubes bleus qui sont dans le plateau **et je les mets** dans la boite

[98] E t+ e : selon la catégorisation de Vergnaud, problème de transformation où l'on recherche l'état initial connaissant l'état final et la transformation

avec les rouges ». Les élèves ne reconnaissant pas un problème soustractif (min 15:42), l'enseignante reformule alors le problème : *« Il y en a 49. Les cubes rouges, on sait pas. On met les 49 cubes bleus avec les rouges et* ***quand on compte en tout****, les bleus et les rouges, on en trouve 87, donc on veut savoir maintenant combien il y a de cubes rouges. »* (min 15 :42). Nous faisons l'hypothèse que réagissant à l'expression « on compte en tout », par effet de contrat, les élèves avancent une écriture soustractive, 87 – 49, pour résoudre le problème, ce qui amène fortuitement l'enseignante à justifier la procédure par essais successifs : « ***ça serait 87 – 49. Mais on ne sait pas le faire, c'est pour ça qu'on fait des essais*** » (min 32:38).

Par ailleurs, profitant de ce qu'un élève justifie son premier essai par une observation sur le nombre de dizaines dans chacun des nombres : « *Au début, j'ai mis 40, ça fait 89, parce que 4 et 4 ça fait 8...* » (min 35:29), Caroline amorce un développement sur une stratégie d'essais reposant sur le choix du premier nombre à tester : « *donc il a pris un premier nombre dans les 40 parce qu'il y avait une quarantaine de cubes bleus et qu'on en voulait 87. Donc il s'est occupé des dizaines. 4 et 4, ça fait 8, donc il a pris un premier essai dans les 40* » (min 35:44). Plusieurs élèves (Loane, Sami, Anatole, min 33:02 ; 35:29) décrivent des stratégies d'essais : ces stratégies seront développées dans la séance suivante.

- Un changement de cap pour maintenir la relation didactique

Constatant l'agitation croissante dans la classe, « *l'attention, qui commençait à…, enfin qui commençait, elle avait commencé déjà depuis un petit moment à fléchir* » (Car-S16-entr.post), Caroline change de cap par rapport à l'ingénierie. Néanmoins, dans un souci de maintenir la relation didactique, elle bifurque vers des activités de résolution de problèmes soustractifs à la calculatrice (min 42:43), « *la calculatrice, ça plait* » (Car-S16-Entr.post). Caroline propose trois problèmes dans la lignée de ceux de l'ingénierie : des problèmes appartenant à la catégorie des transformations avec recherche de l'état final (etE), de combinaison avec recherche d'un des états (eEe). Le quatrième, de structure eT+e, n'est pas reconnu des élèves. Elle obtient la solution par un effet de contrat en le schématisant selon le modèle usuel à la classe (*cf.* Figure 62).

2.2.3.1.3. Séance 17

La séance 17 suit le déroulement de l'ingénierie didactique : les deux premiers problèmes sont traités entièrement de manière collective, le troisième est d'abord recherché individuellement puis collectivement, enfin le quatrième a une fonction évaluative. L'enjeu didactique de l'étape est, rappelons-le, d'initier la construction d'un algorithme de la soustraction. La troisième leçon de l'étape de l'ingénierie vise la réduction du nombre d'essais en ajustant le chiffre des unités puis des dizaines du nombre testé.

L'enseignante organise la séance de la même façon que les précédentes : pour chacun des problèmes, elle laisse un temps court de recherche individuels aux élèves, recueille les réponses des élèves au tableau puis provoque un débat sur la validité des réponses : « *Est-ce que parmi vos propositions, il y en a certaines qu'on peut éliminer parce que ce n'est pas possible ?* » (min 4:30) *; « vous êtes tous dans les quatre-vingts. Pourquoi ?* » (min 12:43) ; « *on va tester* [les réponses restantes] » (min 14:30). Alors que la fin de la séance précédente pouvait laisser entendre que l'enseignante rebondirait sur la justification de la technique des essais (contourner la difficulté d'effectuer certaines soustractions), l'enseignante ne fait ni écrire les soustractions, ni discuter des procédures des élèves. Par exemple, elle ne profite pas de ce que certains élèves proposent 75 ou 70 (min 7:34) comme résultat de l'opération
94 – 29 pour différencier la soustraction de l'addition et justifier la nécessité d'apprentissage de nouvelles techniques opératoires (*Cf.* analyse épistémique, titre 1 du chapitre 2 des résultats). Pour accélérer l'avancée du savoir, elle adopte une position topogénétique surplombante.

Une position topogénétique en surplomb

Nous observons l'enseignante prendre une position topogénétique en surplomb pour accélérer l'avancée du savoirs en décidant elle-même :

- d'écarter le dessin comme procédure de résolution : « *si on veut dessiner les 94 cubes, ça va être trop long* » (min 1:33);
- du choix des réponses à valider pour le premier problème : « Moi, je trouve que ces trois propositions, elles sont intéressantes parce qu'elles ont toutes 7 dizaines » (min 7:34);
- d'orienter ainsi les élèves sur la preuve à obtenir par l'écriture de l'addition en colonne (min 7:34) ;
- de diriger fortement l'ajustement des unités ou des dizaines pour approcher la solution : « J'ai trouvé 6 unités là. Combien je dois en trouver des unités ? […] Hé oui, donc c'est pas la peine de continuer, je vais pas perdre de temps » (Car-S17-min 8:14) ; « on a trouvé le bon nombre d'unités, par contre on n'a pas le bon nombre de dizaines. Combien on a de dizaines de trop là ? […] Ah non, pas 10. […] Oui, on n'en a qu'une dizaine de trop. » (Car-S17-min 14:07).

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Description narrative de la séance **selon ce que dit et fait le professeur (P)**	Description narrative de la séance **selon les attitudes et procédures des élèves**
00:00	Problème 1 : j'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 29. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
	Col.		P profite de la taille des nombres pour écarter la procédure par dessin et remettre en mémoire ce qui a été fait la dernière fois : faire des essais et ajuster « *On proposait un nombre pour faire un premier essai, et ensuite on le prouvait, on prouvait si c'était la bonne réponse. Et si c'était pas la bonne réponse, qu'est-ce qu'on faisait ?* […] *On faisait un autre, on ajustait, voilà, sa réponse.* »	Océane lit le problème. Emmanuella rappelle la procédure de vérification
03:18		Proposer une valeur	P demande une première valeur pour le problème « *proposez un premier essai, un premier nombre* »	Loïc : « sans réfléchir … ? » Propositions des élèves : 33, 77, 73, 90, **75**, **65**,**70**
04:30		Recherche des valeurs impossibles	P : « *Est-ce que parmi vos propositions il y en a certaines qu'on peut éliminer parce que ce n'est pas possible ?* » Pour la valeur 90, reprenant Théo : « *si on lui rajoute 29 ça va être beaucoup plus grand que le total, que 94. Donc, déjà celui-là on peut l'éliminer.* » Pour la valeur 33, reprenant Théo : *« Et voilà, ça va faire entre 50 et 60. »*	Théo : « *90 parce que si on rajoute 2 dizaines, ça fait 119* » Yanis pense que 33 n'est pas possible mais ne sait expliquer pourquoi. Théo : « *parce que ça va faire 50 … 60 … moins que 94* »
07 :34		Tester des valeurs	P retient 4 valeurs possibles (77, 73, 70 et 65) et décide de tester la première 77 :	
			77 : « *Premier essai 29 + 77.* [P pose l'opération au tableau] *Alors, 9 et 7, ça fait combien ? Est-ce que je continue mon essai ? J'ai trouvé 6 unités là, combien je dois en trouver des unités ?* […] *Donc, ça veut dire que 77 c'était trop petit ou trop grand ?* »	Seules Saousem et Emmanuella réagissent ; Emmanuella : « on devrait trouver 14. »
08:36			73 : « *Je vais tester 73* [P pose l'opération] 9 et 3 … » P effectue l'opération 29 + 65 et conclut « 65, c'était la bonne réponse »	Les élèves repèrent que l'on travaille sur les unités : « *ça ne va pas* » « Il faut 2 unités... Non, il en faut 4, alors qu'il y en a 2 » Ils proposent d'essayer 65
10:18			« *Alors, vous voyez comment on s'y est pris là ? Pourquoi on a pas continué ces premiers essais ? Pourquoi on les a arrêtés ? »[…] Les unités correspondaient pas. Donc, c'est pas la peine de perdre du temps. Par contre, il faut bien réfléchir chaque fois qu'on fait un essai..., se demander "Est-ce que le nombre que j'ai proposé, il est trop grand ? Ou est-ce qu'il est trop petit ?". C'est ça la question, pour pouvoir ajuster après sa réponse.* »	« Parce que déjà, les unités, c'est pas bon. »
11:09	Problème 2 : j'ai 94 cubes dans la boîte. J'en enlève 17. Combien de cubes y a-t-il maintenant dans la boîte ?			
11:53	Ind.		P efface les données du problème précédent et les remplace par celles du problème 2. (effet Topaze) puis écrit la preuve à obtenir sous la dictée de Loïc	« *Il faut mettre 17. Après il faut mettre un + et après il faut mettre un nombre* »
12:43	Col.	Répondre et écouter	P recense les propositions des élèves « pour un premier essai » : **84**, 82, 87, 85 et demande pourquoi tous ces nombres sont « dans les 80 »	Yanis : « parce que c'est près de 80, c'est près du 9 »
13:14			P choisit le nombre à tester en premier : 84	Les élèves changent très vite le chiffres des unités pour un « 7 »
13:49			P teste 87, puis « *combien on a de dizaines de trop, là ?* » recommence l'addition avec 77	Les élèves s'esclaffent ; Emmanuella propose 7 comme chiffre des dizaines
14:32			« *là* ***on a fait 3 essais****. Vous voyez, 3 essais ça va vite hein, et on trouve assez rapidement. Donc, il faut toujours se demander "Est-ce que j'ai le bon nombre d'unités ?". Si j'ai pas le bon nombre, et bah "Qu'est-ce qui me manque ?", et après on ajuste pour les dizaines.* »	
14:54	Problème 3 : dans un troupeau, il y a 43 moutons, des noirs et des blancs. Il y a 7 moutons noirs. Combien y a-t-il de moutons blancs ?			
	Col.		P « *Alors, là je voudrais voir vos essais. Hop, vous proposez un nombre, vous le testez et vous ajustez vos essais.*»	Yanis lit le problème Sami demande avec insistance s'il faut trouver 43
16:46	Ind.	résoudre	P relit le problème, lance la recherche, puis circule d'élève en élève pour les amener à faire un premier essai. P insiste sur le nombre total de moutons et la preuve (trilogue)	Élèves perplexes: pourquoi faire des essais alors que la solution est facilement accessible du premier coup en comptant sur ses doigts ?
22:08	Col.		P écrit les données au tableau sous forme d'un tableau. P cherche à faire dire pourquoi les élèves commencent par essayer un nombre « *dans les 30* », en vain.	Les élèves ne reconnaissent plus l'opération en jeu : addition ou soustraction ? Plusieurs élèves donnent la réponse directement (comptage à rebours) Loanne : *« Parce que par exemple si on faisait 33, ça faisait déjà 10 »*
29:03	Problème 4 : Pierre a 35 billes et Jean a 65 billes. Jean dit à Pierre : j'ai 25 billes de plus que toi. Jean a-t-il raison ?			
	Ind.	chercher	P lit le problème	Les élèves cherchent à résoudre collectivement
29:42			P résiste aux questions des élèves.	
34:26		corriger	P écrit les données au tableau, en colonne.	Sami et Yanis dictent l'opération et concluent. Élèves démobilisés.
	Fin de la séance			

Tableau synoptique 32: séance 17, site Caroline (Étape 4 : « La stratégie des essais »)

- L'incompréhension des élèves face à la tâche

Poursuivant sa logique de résolution par essais successifs, l'enseignante pousse les élèves à proposer rapidement une réponse au troisième problème (min 14:54). Or, l'opération en jeu, 43 – 7, est facile à effectuer par décomptage ou décomposition du second terme. L'échange entre Caroline et Anatole est significatif de l'incompréhension des élèves :

> *P : **Je veux pas vous voir réfléchir avant de proposer un nombre**. Là le but c'est de prouver que vous pouvez faire des essais, que vous êtes capables de proposer un nombre.*
> *Anatole : **et si on a trouvé du premier coup ...(**min 15:34)*
> *P : Moi ce que je veux voir là c'est que vous êtes capables de proposer un nombre, de prouver que c'est la bonne réponse et si c'est pas la bonne réponse, de proposer un autre nombre. C'est ça qui m'intéresse. **ça m'intéresse pas que vous trouviez la solution du premier coup-là.*** (min 15:48)

Extrait 69 : Caroline – séance 17 - incitations pour obtenir des réponses

Outre le fait que proposer une réponse « *sans réfléchir* » est une consigne inhabituelle, les élèves ne comprennent pas pourquoi leur enseignante leur déclare « *çà m'intéresse que vous trouviez la solution du premier coup !* » (*cf.* extrait ci-dessus). Par ailleurs, il est difficile de s'obliger à ne pas fournir la solution du premier coup, en particulier si elle est facilement accessible. Cette incompréhension génère une résistance ou un empêchement chez les élèves à faire ce que l'enseignante leur demande, résistance qui se manifeste par le comptage sur les doigts (Colleene, Saousem, Yanis) (min 17:20, 18:31, 18:33), ou par une procédure de calcul s'appuyant sur un ordre de grandeur (Loane) (min 22:08). L'extrait ci-dessous illustre notre propos.

> *P : Donc, comment vous avez fait pour proposer un premier essai. Dites-moi comment vous avez fait ? Loane ...*
> *Loane : J'ai fait au hasard et j'ai trouvé la bonne réponse.*
> *Enseignante : T'as fait au hasard. T'as pris quoi comme premier essai ?*
> *Loane : 36.*
> *Enseignante : T'as fait au hasard et t'as trouvé directement la bonne réponse ?*
> *Loane : Oui, j'ai fait au hasard.*
> *P : Et bah tu as de la chance, il faut jouer au loto alors hein…*

Extrait 70 : Caroline – séance 17 - résistance d'une élève à fournir une réponse au hasard.

Dans cet extrait, nous interprétons la résistance de Loane en terme de contrat didactique : lorsque la maitresse donne un problème, il est d'usage de chercher à le résoudre correctement. Or dans cette situation, l'enseignante va à l'encontre du contrat usuel.

Au final, la non explicitation de l'enjeu d'étude n'a pas permis pas aux élèves de comprendre le glissement de la recherche d'une solution par essais successifs (séance 16) à la recherche d'une technique opératoire pour le calcul d'une différence difficile à effectuer par soustraction (séance17). Pour les élèves, la séance demeure une séance de résolution de problèmes soustractifs tout comme les précédentes. Ils n'accèdent pas aux visées de l'ingénierie, et Caroline n'identifie pas réellement cet écart.

2.2.3.2. Conclusions à propos de la quatrième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Caroline

Rappelons que l'enjeu de cette étape est de « faire travailler la technique opératoire » (Berté, 1996, p.32). Il s'agit d'amener les élèves à définir une stratégie pour obtenir le résultat d'une soustraction qu'ils ne sont pas encore capables d'effectuer, en le moins d'essais possibles. L'addition, qui était un outil de vérification dans les étapes précédentes, devient alors dans cette quatrième étape un outil de résolution. Pour conclure sur la manière donc Caroline conduit la mise en œuvre de cette quatrième étape, nous résumons dans les paragraphes qui suivent les traits récurrents qui ressortent de nos analyses.

- Un enjeu didactique justifié tardivement auprès des élèves.

L'enseignante conduit cette étape en donnant à chacune des séances un objectif spécifique. La séance 15 sert de remise en mémoire didactique du « moyen de preuve » construit lors de l'étape 2 afin de rendre disponible la vérification par addition pour les séances suivantes. La séance 16 voit la mise en œuvre raisonnée d'essais successifs : les élèves se rapprochent de la solution en comparant la somme obtenue par vérification "au tout" à atteindre. La séance 17 fait émerger la résolution par ajustement du chiffre des unités puis des dizaines de la solution. Cette progression nous conduit à conclure que l'enseignante cherche à suivre le déroulé de l'ingénierie didactique, séance après séance.

Néanmoins, elle ne relie cette étape à la précédente que par l'écriture d'une différence sous la forme « a – b ». Dans aucune des séances, les nombres en jeu dans l'opération ne sont pointés comme rendant l'opération difficile à effectuer et donc susceptibles d'être à l'origine d'erreurs (erreur de comptage, ou erreur de nature algorithmique par exemple). Or, pointer ces erreurs permet de justifier la nécessité d'un apprentissage et donc pour rendre visible le glissement de l'enjeu didactique « reconnaître et calculer une différence» à « développer une stratégie d'essais pour déterminer le résultat d'une opération difficile à effectuer ». Celui-ci tarde à se révéler, ne devient explicite qu'en séance 16 : « [à propos de la résolution du problème 2] ***ça serait 87 – 49. Mais on ne sait pas le faire, c'est pour ça qu'on fait des essais*** » (min 32:38). Ce sont ces éléments qui nous amènent à interpréter les actions de

Caroline comme le résultat d’une mécompréhension de ce qui est en jeu dans la conception de cette étape.

- Une rupture de contrat didactique activant la résistance des élèves à entrer dans la tâche d’apprentissage

L’enseignante provoque de manière artificielle les essais, en leur demandant de proposer un premier nombre « *au hasard* » (séance 15), « sans réfléchir » (séance 16) ou leur déclarant « *cela ne m’intéresse pas que vous trouviez le résultat du premier coup* » (séance 17). Ce faisant, elle crée une rupture du contrat didactique usuel à l’école qui veut que d’une part, l’on ne réponde pas au hasard, et d’autre part, que l’on essaie de répondre correctement du premier coup. Par ailleurs, Caroline n’ayant écarté l’usage ni des dessins ni des schématisations, une partie des élèves obtient la solution en un coup à partir des schémas qu’ils produisent. L’enjeu de l’étude restant non explicité et les attentes de l’enseignante difficiles à identifier, les élèves ne sont pas en mesure, dans l’action conjointe, d’entrer dans les stratégies visées par l’ingénierie.

- Une position topogénétique haute de l’enseignante qui s’affirme au fil de l’étape

Les difficultés des élèves à répondre à ses attentes amènent l’enseignante à prendre une position topogénétique de plus en plus en surplomb au fur et à mesure de l’étape. Si en séance 15, l’enseignante laisse les élèves expliciter leurs procédures de résolution, la séance suivante la montre dans une situation d’ostension assumée : en position surplombante, Caroline donne à la première situation (le premier problème) une fonction de monstration, tandis que la seconde est réduite à un exercice d’application : « *voilà,* [faites] *comme au tableau* » (séance16). De la même façon, lors de la dernière séance, elle prend à sa charge l’avancée du savoir : les élèves proposent une première réponse (un premier essai) tandis que l’enseignante dirige par un jeu de questions/réponses fermées la succession des essais. Nous considérons que Caroline, tout au long de l’étape, privilégie des stratégies d’ostension de manière à faire comprendre à ses élèves quelles sont les techniques de résolution par essais successifs qu’elle souhaite voir apparaître (séance16) : par la méthode de la fausse position (séance17) ou par ajustement des unités ou des dizaines (séance17).

- Des phases d’institutionnalisation segmentées

Comme pour les étapes précédentes, les temps dévolus à l’institutionnalisation restent quasi inexistants. Par contre, nous constatons que l’enseignante clôt chaque résolution de problème en faisant systématiquement appel aux explications d’un élève, explications qu’elle reformule à l'ensemble des élèves, ce que nous avons interprété comme des indices fugaces d'institutionnalisation. Apparaissant en conclusion de chaque résolution de problème, ces micro-institutionnalisations ne sont pour autant pas reconnues par les élèves comme références communes à la classe, aucune trace écrite ou orale ne les mettant en exergue.

Nous synthétisons dans les deux tableaux en pages suivantes les éléments principaux composant le milieu didactique au fil de l'étape ainsi que l'évolution du savoir relatif à la construction d'un algorithme de la soustraction.

L'analyse du tableau relatif à la mésogénèse met en évidence que Caroline tente de rester au plus près des milieux didactiques proposés par l'ingénierie. Toutefois, et comme les analyses mésodidactiques de chacune des séances de cette étape le montrent, elle est amenée au regard des difficultés rencontrées par les élèves à adapter certaines pièces du milieu didactique prévues par l'ingénierie et à en introduire de nouvelles.

- Une utilisation ostensive du premier problème de la séance 16

Alors que l'ingénierie indique une recherche individuelle (Berté, 1996, p.34), Caroline mène la recherche collectivement : « *je vais pas faire comme on demande* [dans l'ingénierie], *10 minutes de recherche, je pense que je vais tout faire à l'oral, en collectif,* […] *Sinon, certains seront vite bloqués …* » (Car-S16-entr.post). Elle adopte ensuite volontairement une stratégie ostensive lors du premier problème : celui-ci devient alors une trace modélisante pour le suivant : « *je vais vous laisser chercher tout seuls et écrivez bien, voilà, comme au tableau.* » (Car-S16-min16:01). Cette manière de faire est pleinement assumée par l'enseignante « *ça les a aidés… Si on regarde, ils ont fait pas mal d'essais.* » (Car-S16-entr.post).

- L'introduction d'un objet didactique non prévu : la calculatrice

Caroline introduit la calculatrice dans les milieux didactiques des séances 15 et 16. La raison évoquée relève à la fois d'une gestion de classe (les élèves commencent à se dissiper, S15 min 9:55 ; S16 min 35:29), d'une attractivité de la calculatrice, «*la calculatrice, ça plait* » (Car-S16-entr.post) et d'un souci de maintenir une relation didactique « [j'ai fait] *des maths quand même, des problèmes comme ceux de l'ingénierie* » (Car-S16-entr.post). Elle introduit quatre problèmes non prévus dans l'ingénierie didactique. Les trois premiers de catégorie e t- E sont aisément reconnus par les élèves, le dernier de la catégorie e T+ e, non reconnu, est résolu par un effet Topaze de l'enseignante (schématisation « partie-tout »)

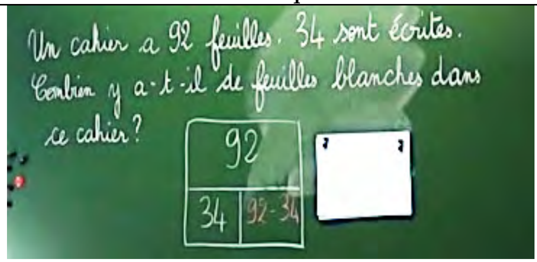
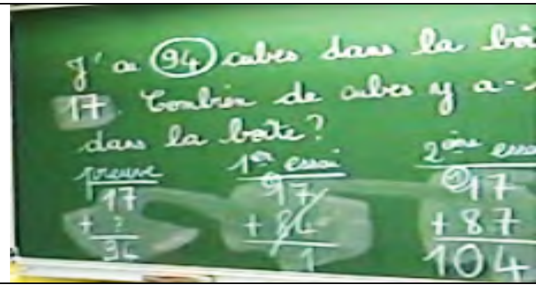
	Séance 15	Séance 16	Séance 17
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Pb1 : en collectif dans sa totalité. Pb2 : Alternance entre travail collectif et travail individuel Pb3, 4, 5, 6 : résolus avec la calculatrice	Alternance entre travail collectif et travail individuel
Catégorie de problèmes	Combinaison e E e (avec mot inducteur de l'addition pour le second problème)	Combinaison e E e Transformations e t- E e t+ E e T+ e (avec mot inducteur de l'addition)	Combinaison e E e Transformation e t- E Comparaison e e |C+
Variables numériques	Nombres M et N tels que M < N < 100 et le chiffres des unités de N est inféreur au chiffre des unités de M		
Traces au tableau			
Matériel	Cahier pour illustrer le problème 1 Fiche de travail Calculatrice	Pb 1 : tout se fait au tableau Pb 2 : sur fiche individuelle Pb3, 4, 5, 6 : Calculatrice	Pb 1 et 2 : sur ardoise Pb 3 : sur fiche individuelle
Savoirs et/ou techniques mathématiques utilisés	Comptage / dénombrement Preuve par l'addition Nombres et propriétés dans le système décimal	Nombres et propriétés dans le système décimal Preuve par l'addition Ordre de grandeur	Nombres et propriétés dans le système décimal Preuve par l'addition Ordre de grandeur

Tableau 42 : Synthèse des trois séances de l'étape 4 – « stratégies des essais » – du point de vue mésogénétique (Site Caroline)

- La non prise en compte des erreurs des élèves pour conduire ses régulations

Bien que l'enseignante cherche à respecter le déroulement proposé de cette quatrième étape, elle ne la lie à la précédente étape que par l'écriture de la différence sous la forme « a – b ». La raison d'être d'une recherche par essais n'est, de ce fait, que tardivement énoncée. En ne relevant pas les erreurs des élèves, (92 – 34 = 60, 92 – 25 = 77, 94 – 29 = 70, 94 – 29 = 75, 94 – 17 = 84), celles-ci restent absentes du milieu didactique. Par voie de conséquence, le débat ne peut porter sur les propriétés de la soustraction, ses différences du point de vue algorithmique avec l'addition (seule opération connue des élèves, à ce moment-là).

Si certains problèmes soustractifs ont été difficilement reconnus, l'analyse du tableau de synthèse de la chronogenèse (en page suivante) met en évidence une progression dans les techniques de résolution des problèmes soustractifs lorsque ceux-ci sont reconnus.

- Des difficultés de reconnaissance de certains problèmes

Trois problèmes présentés dans cette étape ont posé des difficultés aux élèves.

- Le premier problème, appartenant à la catégorie eEe, se situe en séance 15 (min 22:48). La difficulté provient d'un mot « encore », qui induit chez les élèves une addition. Lors de l'entretien *post*, Caroline reconnaît ne pas y avoir fait attention : « je pense que c'est le mot 'encore' qui les a perturbés. Je l'avais pas vu celui-là » (Car-S15-entr.post).
- Le second problème, en séance 16 (min 9:53), est bien repéré avant la mise en œuvre de la séance, mais cette fois-ci, c'est la quantité d'informations, « *beaucoup de choses* » (Car-S15-entr.ante) que Caroline désigne comme source de difficultés. En le laissant tel quel dans une première lecture, puis en le reformulant, elle ne néglige pas la confrontation à la difficulté, mais le rend ensuite plus accessible.
- Enfin le troisième, en séance 16 (min 50:31) est un problème inventé *in situ* par l'enseignante, appartenant à la catégorie e T+ e. Les élèves ne le reconnaissant pas, Caroline utilise un alors ostensif en schématisant la situation.

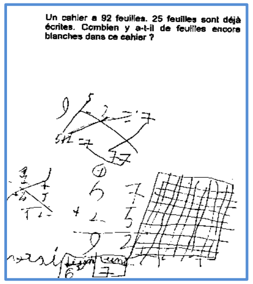
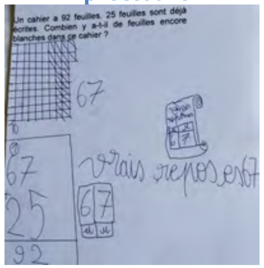
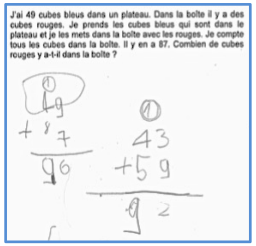
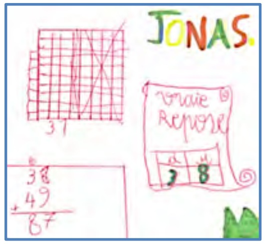
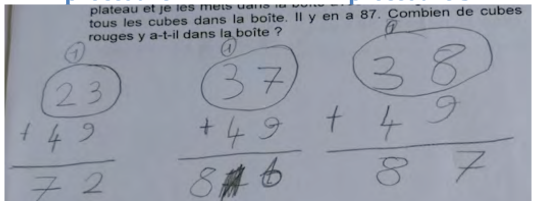
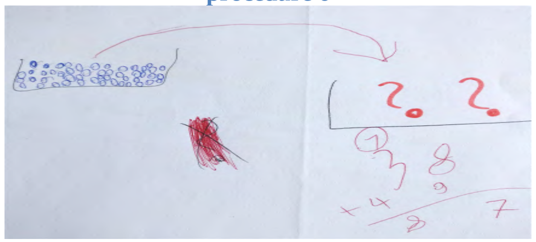
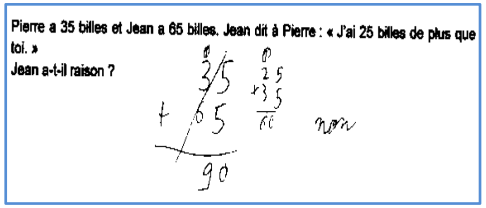
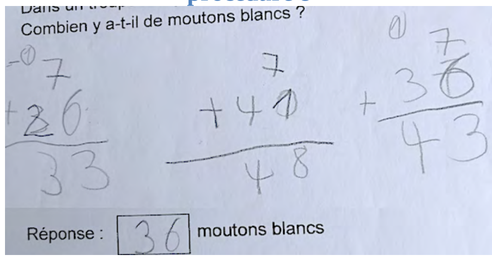
	séance 15	séance 16	séance 17
Reconnaissance d'un problème soustractif	Pb1 : oui Pb2 : non	Pb 1 : oui Pb 2 : non	Pb 1, 2, 3, 4
Procédures élèves lors de la recherche individuelle	Dessins / schémas / dénombrement / numération / essais successifs  procédure 1  procédure 2  procédure 3	Schémas / choix du premier nombre « au hasard » / ordre de grandeur / essais successifs / ajustements  procédure 4  procédure 5  procédure 6  procédure 7	Schémas / choix du premier nombre « au hasard » / ordre de grandeur / essais successifs / ajustements  procédure 8  procédure 9
vérification empirique	non	non	non
Niveaux de preuve apparaissant au fil de l'étape	NP2	NP2 ; NP3	NP2 ; PN4 ; NP5
Type d'ajustements	Par réduction de l'écart entre le résultat de la somme et le résultat attendu.	Ajustement par essais successifs Méthode de la fausse position.	Ajustement des unités, puis ajustement par réduction de l'écart entre le résultat de la somme et le résultat attendu.

Tableau 43 : Synthèse des trois séances de l'étape 4 – « stratégies des essais » – du point de vue chronogénétique (Site Caroline)

Ces trois problèmes ont en commun d'être nouveaux pour les élèves, soit du fait de l'introduction de mots inducteurs perturbant la reconnaissance de l'opération (« encore », « manque », « mettre »), soit du fait d'une saturation d'informations difficile à gérer par les élèves.

- Une évolution vers des procédures uniquement numériques

Au fil de l'étape, les résolutions s'appuyant sur une schématisation ou un dessin disparaissent laissant place aux procédures de calculs numériques : sur quinze traces recueillies lors de chacune des séances, dix présentent une schématisation en séance 15 (procédures 1, 2 et 3), trois présentent une schématisation ou un dessin en séance 16 (procédure 5 et 7), et plus aucune en séance 17.

Le niveau de preuve NP2 est utilisé pour mettre en œuvre les procédures par essais successifs (procédures 4 et 8) ou par la méthode de la fausse position (procédures 4 et 8). Cependant, une trace écrite du problème 3 de la séance 17 (procédure 8) laisse deviner un effet de contrat : alors qu'un simple comptage à rebours permet d'effectuer le calcul 43 – 7, cette procédure montre une résolution par essais. Les traces écrites ainsi que les interactions en classe laissent par ailleurs entrevoir une utilisation d'un autre niveau de preuve (NP5) en tant qu'outil de résolution, prémices de la construction de l'algorithme de l'addition lacunaire.

Au final, l'enseignante cherche à rester au plus près de l'ingénierie didactique en retenant les problèmes mis à l'étude tout en tenant compte des difficultés de ses élèves, sans pour autant exploiter didactiquement leurs erreurs. Aussi, la première séance est traitée comme une séance de consolidation de la preuve par addition, afin de la rendre disponible dans les séances suivantes.

Caroline agit sur deux leviers pour amener les élèves à résoudre les problèmes de l'étape : (i) un premier d'ordre mésogénétique, en aménageant le milieu didactique par des adaptations de certaines situations (introduction de la calculatrice, reformulation de certains énoncés), et par l'introduction de nouvelles situations (problèmes à résoudre avec la calculatrice) ; (ii) un second en adoptant une position topogénétique haute par une pratique ostensive assumée. Cependant les erreurs de type algorithmiques des élèves ne sont pas exploitées, ne permettant pas alors de différencier le fonctionnement de la soustraction de celui de l'addition : la non commutativité de la soustraction n'est pas évoquée. Nous émettons l'hypothèse que le glissement d'enjeu d'étude de la reconnaissance et la résolution de problèmes soustractifs à la construction du sens de l'algorithme de la soustraction n'est perçu à cette étape ni des élèves, ni de l'enseignante.

2.2.4. Analyse de l'étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »

Cette étape a pour objet de faire débattre les élèves sur des procédures de résolutions autres que celles produites par la classe. Pour ce faire, l'ingénierie didactique introduit des procédures de personnages fictifs (des Schtroumpfs). Si les élèves ont produit de multiples stratégies de résolution, il s'agit maintenant de faire en sorte que « toutes les stratégies convergent vers celles donnant la réponse en un seul coup » (Berté, 1996, p. 38). L'analyse de procédures « externes » à la classe vise à faire émerger d'autres procédures que celles des élèves de Caroline qui procèdent jusqu'à présent par essai/erreur et, pour quelques-uns, par ajustements.

2.2.4.1. Analyse mésodidactique des séances

2.2.4.1.1. Séance 18

Dans cette séance, il s'agit d'analyser successivement les procédures de trois personnages fictifs (des Schtroumpfs) : rappelons brièvement que le Schtroumpf Bricoleur trouve un ordre de grandeur à la dizaine près de la solution, le Schtroumpf Musicien fait un premier essai puis qui ajuste par les unités, Azraël ne reconnaît pas l'opération en jeu. Lors de l'entretien *ante*, l'enseignante déclare: « *l'enjeu de cette séance c'est améliorer le nombre d'essais en travaillant sur le choix du premier nombre, du premier nombre testé donc avec ça, enfin pour ça on va travailler à partir du... d'exercices, à partir de réponses de Schtroumpfs. Donc ce sont pas les élèves qui vont proposer une réponse. On va analyser des travaux d'autres d'élèves, des Schtroumpfs ...* », précisant un peu plus tard « *on oblige les élèves à réfléchir sur d'autres procédures* ». Ces extraits d'entretien confirment que Caroline a bien identifié les enjeux de la séance. Comment va-t-elle la conduire ?

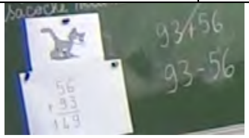
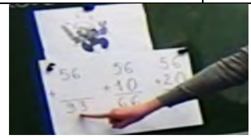
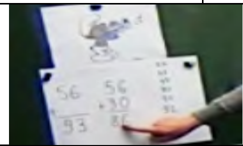
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
	Problème 1 : ce matin le facteur avait 93 lettres à distribuer. Il en a déjà distribué 56. Combien en a-t-il dans sa sacoche maintenant ?			
0:00			P écrit le problème au tableau. Explication du terme « sacoche » « *Alors aujourd'hui, c'est pas vous qui allez le résoudre. Il y a des élèves qui l'ont déjà résolu, et on va analyser ce qu'ils ont fait. Alors ces élèves, je pense que vous les connaissez : ce sont des Schtroumpfs.* […] *Que pensez-vous du travail d'Azraël ?* »	Saousem lit le problème
3:35		Analyser la réponse d'Azraël	P laisse les élèves intervenir librement.	Les élèves ne sont pas habitués à ce type de tâche : léger flottement.
4:28 6:29	Col.		P ne comprend pas Théo, elle attend l'opération : « *qu'est-ce qu'on fait comme calcul quand on veut savoir ce qui reste ?* » Conclusion : « *Donc lui, il a pas compris le problème. Il a pas compris qu'il fallait faire une soustraction, il a pas compris qu'il fallait enlever. Donc Azraël, il a faux, il a pas compris le problème.* » 	Jonas : « *c'est pas du tout ça !* » Colleene : « *vu que ça fait plus que 93, c'est pas bon* » Théo cherche à appliquer la méthode par essais de la séance précédente : « par exemple 43 + 56 » puis ajuster. Nicolas avance la soustraction : « *93 – 56* »
7:11		Analyser la réponse de schtroumpf bricoleur (SB)	Présentation du travail du schtroumpf bricoleur	Les élèves décortiquent la démarche : la preuve à obtenir, les différents essais.
			P porte l'attention sur ce qui est écrit en en demandant la signification : « *A quoi il correspond ce calcul ? […] qu'est-ce qu'il fait ? Qu'est-ce qu'il trouve ? […] c'est trop ou pas assez ? D'après vous, qu'est-ce qu'il va tester, après ? Parce qu'il a continué son travail. Mettez-vous, voilà, à la place du Schtroumpf bricoleur. Qu'est-ce qu'il a testé ?* » 	Jonas pense qu'il va essayer 30 puis 40. Les autres élèves cherchent à résoudre : Sami: « *l'unité de 30, c'est zéro, alors ça va faire un 6 et c'est pas assez* » Théo « *il faudrait tester au moins 30 avec une unité, deux unités* » Nicolas veut faire la soustraction,
			P affiche la suite : « 56 + 30 = 86 » posée en colonne et « je n'essaie pas 40 c'est trop. »	Les élèves sont perplexes devant une résolution inachevée
	Ind./Col.	Résoudre	« *est-ce que vous pourriez l'aider à finir ?* » « Comment vous avez fait pour trouver les 7 unités ? » « Pourquoi il n'a pas essayé 40 ? »	Saousem (37), Emmanuella (37) vérifient au tableau la valeur 37. Jonas part du dernier essai de SB puis « *86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, et là il y a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Il y en a 7.* »
17 :07	Col.	Analyser la réponse de schtroumpf musicien (SM)	Présentation du travail du schtroumpf musicien P oriente sur le chiffre des dizaines : « *est-ce qu'il aurait pu prendre une autre dizaine ?* » puis sur les unités : « *qu'est ce qu'il a fait à côté ?* » P fait écrire sur ardoise ce que SM a fait ensuite … « *comme dernier essai* »P fait comparer le nombre d'essais de SB et SM. 	- Théo : « *5 + 3, ça fait 8, et après il faudrait qu'il rajoute des unités pour que ça fasse une retenue et qu'il trouve 93.* » - Les élèves écrivent l'addition en colonne 56 + 37 = 93 ou seulement 37.
21 :19 22 :34			*P : « qu'est-ce qui est important pour faire le moins d'essais possibles ? »* « *Et voilà ! il faut trouver entre quelles dizaines çà sera. On va s'entrainer à trouver les dizaines qu'il faut tester en 1er.* »	Jonas *: « Il faut qu'on trouve... une au moins dizaine qui met que une ça ne fait pas assez et que l'autre ça fait trop »* *Théo : « et il a compté avec les mains 81, 88, 89, 90, 91, 92, 93... »*
23:39	S'entrainer à l'ordre de grandeur : 65 – 39, puis 84 – 18, puis 71 – 34, puis 55 - 28			
31:44		Trouver un encadrement à la dizaine de la différence	65 – 39 → *P : « C'est 39 + quelque chose = 65. Alors, ce nombre-là, pour le trouver, je veux que vous me proposiez justement 2 dizaines. Entre quelles dizaines d'après vous ça va être ? »* P s'appuie sur Loane pour montrer comment trouver la première dizaine : « *entre 6 et 3, il y a 3 dizaines, donc on peut tenter 30, mais ça ferait trop puisque 69, donc on peut tenter 20* » Conclusion : « *voilà, donc là on sait que c'est 20 ou 30.* » P demande ensuite de trouver « *les deux dizaines* » *pour les autres calculs* P appelle ensuite Jonas pour effectuer la soustraction. « *Très bien. Tout le monde a compris, là, comment on fait pour choisir la 1ere dizaine qu'on va tester ?* »	65 – 39 → La plupart des élèves propose 20. Loane : « *Ca va faire dans les 70, si on rajoute avec un trente* » *84 – 18* → la plupart propose 70. Mais c'est trop. D'où 60. 71 – 34 → la plupart propose 40, quelques-uns proposent 30 et 40. Jonas refuse d'entrer dans la tâche: « *j'ai envie qu'on les pose en vrai* ». Jonas effectue le calcul comme SM 55 – 28 → les élèves répondent "30 ou 20", ou "30", ou "20". Théo : « *En fait, je suis parti de 20. J'allais choisir...30, mais c'était trop, parce que ça allait faire 38* […] *Alors j'ai enlevé, j'ai mis 20, après j'ai regardé, j'ai fait 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, et c'était 7.* »
38:03	Problème 2 : dans une boite il y a 91 cubes, des rouges et des bleus. Il y a 28 cubes bleus. Combien y a-t-il de cubes rouges ?			
	Col.		Lecture de l'énoncé.	
	Ind.	Chercher	P va s'occuper du groupe CE2, puis s'assoit au bureau : les élèves viennent un à un lui montrer leur copie. Les échanges sont individuels. Une file d'attente se forme. Activité occupationnelle : effectuer les calculs 65 – 39, 84 – 18, 71 – 34, 55 - 28	Les élèves cherchent sur leur ardoise et répondent sur la feuille. Loane a testé directement 70 puis « essayé 63 au hasard »
			Le discours de l'enseignante avec les élèves (dialogue) montre que l'activité glisse vers la recherche par essais successifs.	
0:53:41	Bilan : Pas de conclusion, pas de bilan.			

Tableau synoptique 33 : séance 18, site Caroline (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

- Un aménagement du milieu didactique

Contrairement à l'ingénierie didactique qui l'introduit en dernier dans le milieu didactique, l'enseignante fait le choix d'introduire la résolution d'Azraël dans le milieu didactique primitif : « *j'ai envie d'amener en premier la soustraction grâce à Azraël. En plus, c'est vraiment l'erreur la plus fréquence donc je trouve que c'est bien de commencer par celle-là.*» (S18-Car-entr.post). Plusieurs interprétations peuvent expliquer ce choix :

- Il peut s'agir d'une simple régulation destinée à orienter les élèves vers la reconnaissance du problème. En classe, Caroline conclut d'ailleurs ce moment d'analyse par *« lui, il a pas compris le problème. Il a pas compris qu'il fallait faire une soustraction, il a pas compris qu'il fallait enlever. »* (min 3:35).

- Il peut aussi s'agir d'un « effet d'habitude ». Lors de l'entretien post, l'enseignante déclare connaître cette activité consistant à faire travailler sur des productions externes à la classe. Elle la relie à une activité de communication dans un « *cadre de maitrise de la langue* » : les élèves se corrigent et améliorent leurs textes. En introduisant la procédure d'Azraël (le seul des trois Schtroumpfs à faire une erreur), elle réactive les élèves selon un mode habituel de « correcteur ». Les élèves repèrent l'erreur et la corrigent : « *c'est pas du tout ça !* » (min 4:28).

- Il peut enfin, s'agir d'une manière de « travailler le contrat didactique » pour des élèves en difficulté. Ainsi, Colleene, élève en grande difficulté, déclarant « *parce que normalement, le facteur avait 93 lettres, et là il a fait 56 +93. Vu que ça fait plus que 93, c'est pas bon* » (min 4:28) pose dans le milieu le niveau de preuve NP1. Théo rappelle la technique des essais : « *il pouvait choisir 43 + 56* » (min 5 :16), enfin Nicolas introduit la soustraction « *On fait 93 – 56* » (min 6:29). Le contrat didactique se alors rend plus accessible : il s'agit de comprendre comment les Schtroumpfs résolvent une telle soustraction.

Ce faisant, l'enseignante introduit judicieusement des premiers ingrédients nécessaires à la poursuite de la séance : la reconnaissance du problème, la preuve d'un résultat et l'écriture soustractive du résultat.

- Une démarche maïeutique

Le fait que les élèves aient déjà travaillé sur des productions autres que les leurs dans un cadre de corrections en maîtrise de la langue (comme déjà indiqué *supra*) les amène à s'inscrire dans un contrat similaire et à corriger les procédures des Schtroumpfs, comme l'illustrent quelques interactions d'élèves en début de séance (min 07 :11) :

P : mettez-vous à la place du Schtroumpf Bricoleur, qu'est-ce qu'il fait ?
Sami : [30] ça va pas faire assez, [désignant l'addition lacunaire 56 + ••• = 91] l'unité de 30 c'est zéro, alors ça toujours faire un 6.
Théo : il faudrait tester au moins 30 avec une unité, deux unités…

Extrait 71 : interactions élèves – professeur lors de l'analyse de la procédure du Schtroumpf Bricoleur

Pour orienter les élèves vers une activité d'analyse, l'enseignante développe une démarche maïeutique, formulant des questions courtes, fermées, laissant peu de place à une dérive vers l'expression de procédures de résolution propres aux élèves : « *qu'est-ce qu'il fait ? Qu'est-ce qu'il trouve ? Qu'est-ce qu'il a testé ?* (min 7 :11) *Combien d'essais il a fait lui ? Pourquoi d'après vous il a trouvé en deux essais, lui ?* (min 17 :07). L'extrait ci-dessous exemplifie l'évolution des réponses des élèves : celles-ci se ne rapportent plus qu'à la procédure du Schtroumpf Musicien (min 17 :07).

P : comment il a fait d'après vous pour tomber directement sur 30 ?
Théo : 5 plus 3, ça fait huit, et après il faudrait qu'il rajoute des unités pour que ça fasse une retenue et qu'il trouve 93
P : qu'est-ce qu'il a fait là ?
Jonas : Il a fait combien il faut aller encore
Renaud : il va trouver qu'il en manque 7
P : d'après vous, qu'est-ce qu'il va proposer comme autre essai ?
[l'ensemble des élèves propose 37]

Extrait 72 : interactions élèves – professeur lors de l'analyse de la procédure du Schtroumpf Musicien

Dans l'action conjointe, l'enseignante ouvre progressivement ses questions pour, dans l'interaction, laisser un petit espace aux élèves leur permettant de comprendre et formuler une nouvelle procédure.

- Une institutionnalisation absente

Comme à l'accoutumée, l'enseignante termine l'analyse des procédures sans donner au savoir nouvellement constitué un statut officiel commun à tous. Elle fait appel à deux élèves chronogènes, Jonas et Théo (min 21:19), pour expliquer à l'ensemble de la classe la technique de recherche d'un premier essai, puis l'ajustement pour obtenir le résultat de 71 – 34 puis de 55 - 28. Nous remarquons que le choix du premier nombre est systématiquement l'ordre de grandeur à la dizaine inférieure et l'ajustement par conséquent joué en sur-comptant. Malgré les remarques d'une autre élève (Loane à propos du calcul 65 – 39), aucune allusion n'est faite à un ajustement par comptage à rebours. Comme pour la plupart des séances précédentes, la conclusion de la séance repose essentiellement sur ces deux élèves (min 22 :34).

- Des procédures non réinvesties dans le travail individuel

Les travaux d'élèves relatifs au deuxième problème (min 38:03) font apparaître que seuls cinq élèves (Jonas, Sami, Loane, Colleene, Anatole) profitent de la séance en effectuant comme premier essai 70 ou 60. Leurs traces écrites ne nous permettent pas de l'affirmer, mais nous pouvons envisager que l'ajustement ait été obtenu par le comptage sur les doigts ou par translation de l'écart entre la somme obtenue et le tout, procédure déjà émergée en étape 4. Une seule trace (celle d'Emmanuella) montre une procédure analogue à celle du musicien. Deux élèves (Ashley, Théo), semblent déjà maitriser la technique de l'addition à trous en opérant au sein du même calcul d'abord sur les unités puis sur les dizaines. Trois élèves (Yanis, Renaud, Loïc) ne reconnaissent pas le calcul d'une différence et additionnent les deux nombres inscrits dans le problème. Les recherches des quatre autres élèves n'ont pas abouti et/ou ne nous permettent pas la moindre interprétation. L'entretien *post* de la séance fait ressortir que l'enseignante englobe les difficultés de ces cinq élèves dans une problématique plus large d'handicap : « plusieurs sont en en situation de handicap, suivi par la psychologue, ou en CLIS[99] » (Caroline-S18-Entr.post). Le rapport idoine à l'ingénierie que nous évoquions dans les deux premières étapes s'affaiblit, et se traduit par des écarts à l'intentionnalité didactique qui y préside.

2.2.4.1.2. Séance 19

Cette séance poursuit le travail de la séance précédente en s'appuyant sur les situations de l'ingénierie dans lesquelles quatre autres procédures sont présentées : la première opère d'abord sur les dizaines puis ajuste avec les unités, la deuxième opère d'abord sur les unités puis ajuste avec les dizaines, la troisième est une addition lacunaire tandis que la dernière présente une soustraction effectuée sans autre explication.

L'enseignante prévoit d'organiser la séance « *comme la dernière fois : 1, 2, 3, 4 en collectif et ensuite le problème en individuel.* » (Car-S13-entr.post). Elle projette de profiter du problème individuel pour « *aider ceux qui n'arrive pas à trouver la preuve à fournir, pour pouvoir faire les essais* » (*Ibid.)*. Le synopsis ci-après décrit le déroulement de la séance.

[99] CLIS : **Classes d'Insertion Scolaire :** Les Classes d'Insertion Scolaire accueillent de façon différenciée, dans certaines écoles élémentaires ou exceptionnellement maternelles, des élèves handicapés physiques, sensoriels ou mentaux qui peuvent tirer profit, en milieu scolaire ordinaire, d'une scolarité adaptée à leur âge et à leurs capacités. Leur objectif est de permettre à ces élèves de suivre totalement ou partiellement un cursus scolaire ordinaire.

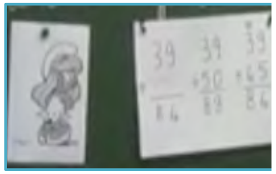
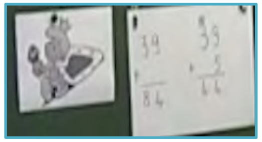
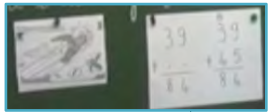
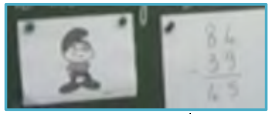
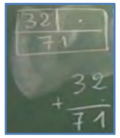
Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0:00	Col.		Rappel de la séance précédente : « *qu'est-ce qu'on avait fait ?* »	Loane rappelle qu'on avait travaillé sur le travail des Schtroumpfs.
	Problème 1 : Dans les classes de CP, de CE1 et de CE2, il y a 84 enfants. Nous avons compté 38 filles. Combien y a t-il de garçons ?			
0:37			Écriture du problème au tableau et demande à Théo de le lire.	Théo lit l'énoncé
		Analyser la réponse de Schtroumpfette (ST)	Présentation du travail du Schtroumpfette (ST).Identification de la première écriture : « *la preuve à obtenir* », puis pose des questions sur chacune des opérations. : « *pourquoi elle a choisi 50 ? […] et au deuxième essai, qu'est-ce qu'elle a fait ?* […] *Comment elle a su qu'il fallait en enlever 5 ?* » P apporte elle-même la réponse : « *elle avait 5 unités de trop, oui. Donc qu'est-ce qu'elle a fait ? bein, elle les a enlevés au premier nombre qu'elle avait proposé*» 	Océane pense que ST a choisit un premier nombre au hasard. Loane : « *parce que 3 + 5 = 8* » Théo : « *9 + 5 , ça fait 4…heu il fallait 4 unités.* » Les élèves ne répondent pas Jonas se désintéresse ostensiblement de la classe.
7:10 10:42	Col.	Analyser la réponse de Schtroumpfissime (SFI)	Présentation du travail du Schtroumpfissime (SFI). P : « *qu'est-ce qu'il a fait ?* […] *qu'est-ce qu'il a fait de différent ?* […] *comment il a fait, d'après vous, pour proposer 5 ?* » P cherche à faire dire ce que SFI fera ensuite. Seul Théo l'anticipe. Comparaison les deux procédures (ST et SFI): « *la Schtroumpfette, a commencé par les dizaines, le Schtroumpfissime par les unités […]* » Retour sur la preuve comme outil « *pour trouver le nombre* » 	Renaud décrit sans interpréter. Anatole : « *il a mis les unités* ». Théo : « *Puisque 4 + 4 ça fait 8, il y a déjà une retenue, en fait. 3, et 1 ça fait 4, je remets un 4, ça fait 8*» Renaud ne voit pas la différence avec la procédure de ST : il ne voit que le résultat. Théo fait remarquer que la preuve est la même, mais « *la façon pour chercher, ils ont pas fait pareil* ».
12:51 16:24	Col.	Analyser la réponse de Super Schtroumpf (SS)	Présentation du travail du Super Schtroumpf (SS) : « *il trouve en un coup, en un seul coup* » P interroge sur les deux points dans l'addition lacunaire. « *Quand on fait une addition comme ça qu'il manque des choses, comment on l'appelle ?* » P explique dans le détail comment effectuer une addition à trous : « *combien il manque au 9 pour aller à 14 ? 5. Je mets la retenue. Ensuite, je compte les dizaines. J'en ai 4. Combien il m'en faut pour arriver à 8 dizaines ? 4.* » 	L'ensemble des élèves répond spontanément « *additions à trous* » Théo explique que l'on « *sait que ça doit aller à 84 alors il doit trouver le nombre* » Certains élèves avaient déjà l'addition à trous, mais avec des nombres à un chiffre.
18:28 29:29	Col.	Que fait Grand Schtroumpf (GS)	Présentation du travail du Grand Schtroumpf (GS) « *on essaye de comprendre* » « *on ne peut pas enlever 9 de 4 et 8 – 3 ça fait pas 4* ». Utilisation du matériel de numération : barres et cubes aimantés et illustre les nombres avec le matériel P fait elle-même l'échange d'une dizaine contre dix unités : « *regarde ce qu'on va faire, est-ce que j'en ai assez* [d'unités] *? On va la Transformer* ». **Conclusion :** « *Si on commence par les dizaines, après on est embêtés pour les unités. Il faut toujours commencer par les unités. Alors on apprendra à faire comme le GS* » 	Théo pense que GS : « *il fallait qu'il inverse le 45 à la place du 39, et le 39 à la place du 84* » réaction de Loane : « *non, ce serait un plus* » Loane : « *on peut faire 9 - 4 !* » Loïc manipule au tableau le matériel de numération aimanté. Les élèves ne suivent pas et ne voient pas la manipulation de l'enseignante.
	Problème 2 : Dans un troupeau, il y a 71 moutons. Des noirs et des blancs. Il y a 32 moutons noirs. Combien y a-t-il de blancs ?			
34:48	Ind./Col.	Résoudre	Distribution de l'énoncé aux élèves : les élèves travaillent sur fiche	
39 :14	Groupe de consoli-dation		Constitution d'un groupe de consolidation : lecture de l'énoncé puis questionnement sur les données de l'énoncé : « *il y a combien de moutons en tout ?* […] *des noirs, combien il y en a ?* […] *qu'est-ce qu'on cherche ?* » pour compléter un « *petit schéma* ». tentative de faire exprimer l'addition lacunaire : « *si on prend les moutons noirs et les moutons blancs, combien on doit trouver en tout, de moutons ?* P apporte elle-même l'addition lacunaire : «*je vous écris la preuve sur vos feuilles* » et leur demande de faire des essais.	Loïc se joint au groupe.  Renaud propose de « faire la moitié » mais il n'est pas compris. P attend une addition à trous. Le groupe exprime l'addition lacunaire à partir du schéma : « *on prend çà et on prend la réponse qui est là […] on l'ajoute…* ». Les élèves ont des difficultés à associer les nombres aux quantités « partie » « tout ». Peu concentrés, ils s'échappent peu à peu…
41:04	Ind.		P circule dans la classe, allant d'élève en élève, et demande la procédure utilisée.	Loane et Emmanuella : 1er essai 49, puis preuve puis ajustement à 39.Ashley : schéma (échec) puis 1er essai 29, puis preuve, puis ajustement à 39. Sami : essais successifs 41, 49, 78 et ajustement 39.
46 :15	Col.	Corriger	P fait appel à Théo pour corriger. P essaie de convaincre Jonas que le dessin n'est pas efficace. Analyse du travail de Sami (recopié au tableau) : « *on va voir si vous faites la même remarque que moi* » Après analyse, P revient sur le 1er essai de Sami et fait ajuster par translation de l'écart entre 73 et 61.	Théo explique à la manière de GS. Jonas a schématisé le nombre 71, soustrait 39, compté le reste, puis écrit l'addition. Réactions des élèves à propos du travail de Sami : beaucoup d'essais. Loïc recherche un aparté avec P et explique ses essais combinant ajustements des unités et des dizaines.
1:00 :00	Fin de la séance.			

Tableau synoptique 34 : séance 19, site Caroline (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

Une position topogénétique haute de l'enseignante

La dernière séance avait vu l'enseignante adopter une démarche maïeutique. Dans cette séance, nous observons l'enseignante opter pour une position topogénétique haute se manifestant au travers d'un contrat didactique d'ostension affirmé.

Pour chacune des quatre procédures, l'enseignante interpelle les élèves par une même question « *qu'est-ce qu'il a fait ?* ». Pour autant, l'enseignante interrompt rapidement la réflexion en apportant elle-même la réponse (min 06:30, min 10:42, min 16:24, min 29:29). Nous présentons ci-dessous quatre extraits significatifs de la position de l'enseignante durant cette séance, illustrant la position de l'enseignante pour les analyses de chacun des Schtroumpfs.

<u>Extrait 1 (procédures de Schtroumpfette : 1er essai, ordre de grandeur à la dizaine près par défaut, puis ajustement à l'unité)</u>

Dans cet extrait (min 6:30), l'enseignante endosse une posture ostensive. Si elle pose bien après le test du premier nombre (50) la question « *qu'est-ce qu'elle a fait ?* », elle ne laisse pas les élèves réagir, répondant immédiatement. Selon un effet Jourdain, elle reconnaît dans les acquiescements de certains élèves un signe du savoir en construction.

P : Qu'est-ce qu'elle a fait ? Bein, elle les a enlevés au premier nombre qu'elle avait proposé.
Qui aurait fait comme elle ? Renaud, tu aurais fait comme çà ? Océane aussi ? Colleene oui ?
[les trois élèves lèvent le doigt en acquiesçant]

Extrait 73 : Carine – S 19 - analyse de la procédure de Schtroumpfette

<u>Extrait 2 (procédure de Schtroumpfissime : 1er essai, nombre d'unités puis ajustement par les dizaines)</u>

L'enseignante au tableau (min 10:42) par une série de gestes ostensifs compare deux procédures, et interpelle les élèves : « *regarde* », « *hé oui !* » (voir extrait ci-dessous).

P : Regarde, le premier essai. La Schtroumpfette, elle s'est même pas occupée... La Schtroumpfette elle s'est occupée des dizaines d'abord. […]
P : Et après... hé oui ! Ils sont arrivés au même résultat tous les deux, mais ils n'ont pas commencé de la même façon. La Schtroumpfette a commencé par les dizaines, le Schtroumpfissime, par les unités

Extrait 74 : analyse de la procédure de Schtroumpfissime

Extrait 3 (procédure de Super Schtroumpf : addition lacunaire)

L'enseignante continue ses ostensions (min 16:24) et montre la technique de l'opération à trous. Si elle formule des questions, celles-ci ne sont que formelles, Caroline apportant elle-même la réponse. L'enseignante utilise un technique de trilogue : s'adressant à un élève, elle montre en réalité à l'ensemble de la classe comment procéder.

P : Donc j'ai 9 unités, et j'en veux combien ?
E : 4.
P : J'en veux 4. J'en veux 4 ?
Es : Non.
P : Si j'en ai 9 déjà ?
E : J'en veux 14.
P : J'en veux 14 ! Donc combien il manque au 9 pour aller à 14 ? 5. Je mets la retenue. Ensuite, je compte les dizaines. J'en ai 4. Combien il m'en faut pour arriver à 8 dizaines ? 4

Extrait 75 : analyse de la procédure de Super Schtroumpf

Extrait 4 (procédure grand Schtroumpf : soustraction)

Comme pour les procédures précédentes, l'enseignante montre elle même le fonctionnement de la soustraction, en la simulant avec le matériel didactique de numération (min 29:29).

Extrait 76 : analyse de la procédure de Grand Schtroumpf

Nous observons donc dans cette séance une enseignante en posture topogénétique haute dévoilant elle-même les procédures et laissant peu d'initiatives aux élèves, contrairement à ce qui était sa stratégie lors des deux premières étapes.

- Un étayage individualisé lors de la recherche individuelle

La recherche individuelle du second problème montre des élèves en difficultés (min 35:52). Caroline opte pour la constitution d'un groupe de soutien. Ce faisant, nous l'observons abaisser son intention didactique : voulant obtenir l'écriture d'une addition à trous, elle introduit la schématisation en « parties–tout » espérant ainsi obtenir la réponse souhaitée. L'effet de contrat escompté aboutissant, elle simplifie à nouveau la tâche des élèves introduisant elle même l'opération lacunaire : « *Donc si je prends les noirs, que je rajoute les blancs, je dois trouver 71.* […] *Et maintenant, c'est à vous de trouver le nombre qui manque, donc je vous écris la preuve sur vos feuilles.* » (min 39:14). Nous observons ici une enseignante tentant de faire avancer le savoir en serrant au plus prés ses élèves.

Pour conclure, remarquons que dans cette séance, l'analyse des trois premières procédures dure au total environ 18 minutes, la dernière dure environ 17 minutes, c'est-à-dire quasiment tout autant que les trois autres réunies. Cette dernière procédure donne lieu à une simulation avec le matériel didactique de la classe. Lors de l'entretien post Caroline indique : « *Je voulais arriver à la soustraction comme le Grand Schtroumpf* […] *mais j'ai trouvé difficile … peut-être parce que j'étais pas au clair par rapport à cette soustraction du Grand Schtroumpf* ». Elle poursuit, jugeant que « *cette séance finalement n'était pas nécessaire, elle a rien apporté de plus que la douze*» (Car-S19-entr.post). Caroline n'interroge pas la pertinence de l'apprentissage de la technique opératoire à cette étape de l'ingénierie, alors même qu'elle s'attachait jusqu'à présent à suivre au plus près le déroulement des étapes précédentes. Caroline, nous l'avons vu, identifie certains éléments clés de l'ingénierie, selon une sensibilité plus acérée que les deux autres enseignantes pourtant plus chevronnées, notamment en début de mise en œuvre. Il reste que, dans ces deux dernières étapes, certaines dimensions épistémiques du projet broussaldien ne résonnent pas suffisamment avec ses propres conceptions ce qui se traduit par les écarts que nous avons pointés. Nous y reviendrons en conclusion du cas.

Caroline intercale une séance supplémentaire avant d'entamer la suivante, pour revenir sur la procédure du Grand Schtroumpf, c'est-à-dire pour introduire la technique de la soustraction par cassage. Ce point résonne avec ce qui est le cœur de sa manière de voir l'enseignement de la soustraction comme en témoigne l'ajout d'une séance à cette étape que nous analysons maintenant.

2.2.4.1.3. Séance 20 (auto filmée)

Cette séance supplémentaire, d'une durée de trente minutes, est pour l'enseignante « *un complément* » (Car-S20-entr.post) de la séance précédente. Il s'agit d'initier la technique de la soustraction par cassage, ce qui n'est pas prévu à cette étape de l'ingénierie. Pour ce faire, Caroline met à l'étude deux opérations : 62 – 37 puis 83 – 56

Lors de l'entretien *post,* Caroline indique « *on est reparti du travail du Grand Schtroumpf, on a essayé de comprendre ce qu'il avait fait. Casser une dizaine, c'est revenu tout de suite.* […] *je leur ai demandé comment écrire, comment coder le fait qu'on a cassé une dizaine.* » (Car-S20-Entr.post). Il s'agit donc d'établir un codage de la technique de la soustraction du Grand Schtroumpf.

Nous rappelons que lors de la séance précédente, Caroline avait utilisé le matériel de numération habituel pour illustrer la technique de la soustraction par cassage. (*cf*. Extrait 76). Dans cette séance, elle utilise le matériel de l'ingénierie didactique : l'affiche relative à la procédure du Grand Schtroumpf ainsi que la boite et les cubes. Nous l'observons alterner les positions topogénétiques pour laisser les élèves rechercher un « codage » de la soustraction. En position topogénétique basse, ses interventions se limitent à désigner les élèves au tableau et à surveiller la simulation du cassage. En position haute, elle institutionnalise le codage proposé par un élève (min 18:19)

- Un ajout mésogénétique non prévu dans l'étape : la transcription du cassage de la dizaine pour l'écriture d'un algorithme de la soustraction.

Pour faire émerger ce codage, Caroline introduit un dispositif particulier : un élève manipule les cubes tandis qu'un autre transcrit au tableau les manipulations.

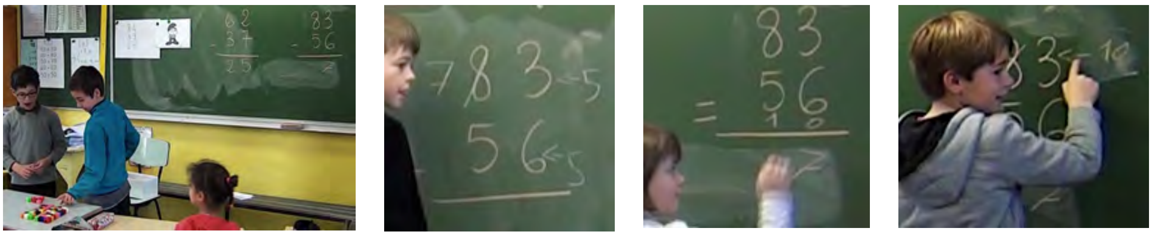


Figure 66 : recherche d'un codage du cassage des cubes pour un algorithme de la soustraction

Les photogrammes ci-dessus montrent des élèves en pleine discussion quant à la manipulation des cubes, les suivantes des propositions quant à leurs tentatives de transcription de ces manipulations.

Temps	Modalité de travail	Découpage selon la tâche de l'élève	Découpage selon ce que dit et fait le professeur (P)	Découpage selon les attitudes et procédures des élèves
0:00	Col.	Rappel à la mémoire didactique	P affiche la procédure du Grand Schtroumpf : « *est-ce que vous vous souvenez de ce qu'on avait trouvé ?*» P appelle Océane pour « *prendre 84 cubes* » puis Saousem pour enlever 39 cubes	Théo :« *Là on avait trouvé qu'il fallait casser une dizaine en 2.* » Océane prend 8 dizaines de cubes (agencés en barres) et 4 cubes Loïc : « *elle va casser la dizaine* »Saousem enlève sans hésiter 3 barres de 10 puis 4 cubes, et marque un temps d'arrêt.
			P incite Loïc à casser la barre en 10 cubes.	Loïc se déplace et rappelle à Saousem qu'il avait cassé une barre, puis hésite.
0:03:09			P : « *C'est bien ce qu'avait trouvé le Grand Schtroumpf. Donc on suppose qu'il a dû faire ça, il a dû casser une dizaine. Alors on va s'entrainer, on va faire comme le Grand Schtroumpf* »	Loïc finit la simulation de la soustraction ; on reste bien 45 cubes
0:04:29	Effectuer l'opération 62 - 37			
0:06:29	Col.	Simuler la soustraction	P : « Alors que fait-on ? » P demande à Yannis de détacher les cubes du morceau restant : « *on peut pas les laisser attachés, c'est plus une dizaine, ça, ce sont des unités.* » P rappelle à Yanis qu'il doit « *finir la soustraction* » Conclusion : « *Donc tu as bien enlevé 3 dizaines et 7 unités.[…] Il reste 2 dizaines et 5 unités.* »	Yanis va simuler l'opération devant le tableau : il prend 6 barres de 10 et 2 cubes puis prend une barre de 10, retire 5 cubes et les joins au deux autres cubes Après hésitations, Yanis enlève 3 barres de 10.
0:07:57	P écrit l'opération en colonne au tableau : 83 - 56			
0:09:26	Col.	Simuler la soustraction	P : « j'aimerais bien que quelqu'un vienne au tableau faire des choses. » P casse le morceau restant en cubes isolés. « *ça on peut pas les laisser accrochés. C'est plus, une dizaine* »	Ashley simule l'opération : elle écarte 5 dizaines, et les 3 cubes puis détache 3 cubes d'une autre barre de 10. Emmanuella complète le tableau en écrivant le résultat.
0:11:20		Rechercher un codage	P tente de faire retranscrire la manipulation au tableau : recherche d'un codage : « *Alors comment tu vas l'écrire, ça ? Que tu as enlevé une dizaine à 8 et que tu l'as... que tu l'as mise avec les 3 ?* » Interrogeant Théo : « *On l'a cassée, mais avant de la casser, on l'a prise. Où est-ce qu'on l'a mise ?* »	Jonas, écrivant le chiffre 3 au dessus du 3 de 83 : « *on a pris 3 unités de la dizaine* » Théo ne sait pas
0:14:06			P simule la soustraction : « *On avait 83. Vous êtes d'accord, on avait 83*[…] *Et on voulait enlever 56. On a commencé par enlever 6 unités. J'en ai que 3. J'en ai que 3 unités. Donc, qu'est-ce que je fais pour pouvoir en enlever 6 ?* […] *Avant de la casser, qu'est-ce que je fais ? Je la prends. Et je la mets avec [P met la barre avec les 3 cubes]. et ensuite je la casse pour pouvoir avoir mes 6 unités. Donc comment on pourrait l'écrire, ça ? Comment on pourrait écrire* »	
0:15:35 0:17:16			P fait appel successivement à Loïc, Loane puis Théo.	Loïc tente de montrer au tableau comment on enlève une dizaine. En vain. Loane propose d'écrire -10 sous le nombre 56 Théo : « *on barre le 8 et on met 7* » , il écrit ensuite 1 au dessus du chiffre 3 , puis l'écrit à droite du chiffre 3, puis écrit 10 avec une flèche orientée sur le 3.
0:18:19			P reprend la codage de Théo et l'effectue en l'exprimant devant tous les élèves puis vérifie en comptant les cubes sur la table.	Jonas intervient pour indiquer un autre codage : il barre le 8 du 83 et écrit 7 à sa gauche, puis à droite, « 5 » avec une flèche orientée sur chaque chiffre "3" et "6"
0:24:32			P : « *Sauf quand on en a besoin pour les soustractions. Donc là, ça va pas, ce que tu fais, parce que tu gardes pas les nombres.* »	*Jonas :« Quand on compte en colonnes, c'est interdit qu'il y a des dizaines dans les unités. Alors quand même... »*
0:25:05	Exercice : effectuer 91 – 24			
	Ind.	Effectuer la soustraction	P simule le problème avec les cubes : « regardez ce que je fais, j'enlève les deux dizaines et ensuite pour pouvoir enlever, je casse une dizaine »	Renaud a fait une addition Emmanuelle effectue l'opération au tableau.
0:30:04	Col.	Écouter la maitresse	P aide : « tu vas enlever 4 unités, tu en as qu'une. Comment tu vas faire ? […] Maintenant tu as combien d'unités ? […] et des dizaines, combien il en reste ? P : « je vais vérifier moi, pour voir si tu as juste ». P effectue l'addition posée en colonne au tableau. Donc tu as juste, j'ai vérifié, là, j'ai fait la preuve, pour savoir que la soustraction était juste »	
0:30:47	Fin de la séance.			

Tableau synoptique 35 : séance 20, site Caroline (Étape 5 : « Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs »)

Pour autant, les élèves peinent à transcrire : « *Ils disaient faut casser une dizaine, ils n'arrivaient pas à dire d'abord on la prend la dizaine, avant de la casser. Donc il manquait quelque chose… Ils avaient envie de rajouter les unités qu'ils avaient récupérées en cassant la dizaine. Mais il ne pensaient pas à diminuer le nombre de dizaine … Petit à petit c'est arrivé, c'est Théo qui a trouvé* » (Car-S20-entr.post). Comme les séance précédentes, Caroline s'appuie sur un élève chronogène (Théo) pour accélérer l'avancée du savoir visé.

Nous interprétons la lecture du texte de l'ingénierie par Caroline comme une lecture pilotée par son épistémologie pratique : elle reçoit la présentation de la procédure de Grand Schtroumpf à l'étape 5 comme une « *transition nécessaire avant d'entamer quelque chose* […] *de retomber sur ce qu'on fait d'habitude, la soustraction en colonne* ». Caroline n'envisage pas que la procédure du Grand Schtroumpf ne puisse être présentée en fin d'étape que pour justifier la nécessité d'un apprentissage supplémentaire et donc qu'elle puisse ne pas être analysée. Par ailleurs, n'ayant pas poursuivi la lecture de l'ingénierie didactique à l'étape cinq, « *je la lirai pendant les vacances* », elle ne se rend pas compte que les deux algorithmes de la soustraction par cassage et par conservation des écarts sont introduits dans la dernière leçon.

2.2.4.2. Conclusions à propos de la cinquième étape de l'ingénierie mise en œuvre par Caroline

L'objectif de cette étape tel qu'il est défini dans l'ingénierie didactique est de faire émerger de nouvelles techniques, techniques *a priori* non encore présentes dans le milieu didactique. Rappelons que les élèves de Caroline ont terminé l'étape précédente en mettant en œuvre principalement une nouvelle technique de résolution, la technique par essais successifs. Il s'agit donc dans cette étape de réduire le nombre d'essais.

Comme pour les étapes précédentes, Caroline utilise les éléments mésogénétiques de l'ingénierie didactique : les différentes procédures sont présentées aux élèves. Pour autant, Caroline perd de vue l'enjeu d'étude et s'éloigne peu à peu de l'esprit de l'ingénierie. En position topogénétique haute, le débat autour des procédures tourne court à la séance 19. Les séances prévues originellement comme des phases d'analyse et de formulation deviennent des séances de monstration et d'explicitation des procédures par l'enseignante elle-même. Caroline bifurque ensuite vers l'introduction de l'algorithme de la soustraction par cassage en incorporant une séance supplémentaire. Nous avons vu que Valentine met aussi l'accent sur cet algorithme du cassage. Cet enjeu de savoir, assez technicisé, appartient aux usages sédimentés des pratiques enseignante de la soustraction en France, même si les programmes suggèrent de ne pas limiter les apprentissages à cet algorithme (MEN 2002 – le nombre au cycle 2, p.45). Pour autant, ces deux enseignantes ne procèdent pas de la même manière. L'analyse des données met en évidence que Caroline travaille sur le codage alors Valentine s'appuie sur l'élève qui l'importe depuis le système didactique familial, qu'elle n'exploite pas sur le moment et qui ne sera appréhendé que sous une forme technicisée dans l'étape suivante.

Nous rassemblons dans deux tableaux de synthèse (en pages suivantes) les éléments les plus significatifs de l'évolution des milieux didactiques et de l'avancée des savoirs observés lors de la mise en œuvre de cette étape par Caroline.

- l'utilisation d'une procédure comme élément de régulation et de définition

Lors de la séance 18, Caroline présente d'abord la procédure d'Azraël (qui ne reconnaît pas l'opération en jeu et effectue une addition) alors que celle-ci n'est présentée qu'en fin de séance dans l'ingénierie. Nous interprétons ce geste comme relevant de son épistémologie pratique : en s'assurant que tous les élèves reconnaissent un problème soustractif, elle attribue à cette première analyse une fonction de régulation. Notre hypothèse s'appuie sur le fait qu'elle s'adresse principalement aux élèves les plus en difficultés : ce sont eux qui reconnaissent rapidement l'erreur d'Azraël (min 3:35), qui rappellent les niveaux de preuve (min 4:33) et qui énoncent l'opération en jeu (min 6 :29). Par ailleurs, l'enchainement vers l'analyse des procédures suivantes, « *bon, maintenant, on va regarder le travail de Schtroumpf Bricoleur* » (min 7 :11), nous laisse supposer que cette première analyse a eu aussi involontairement une fonction de définition. Ainsi que le montrent plusieurs interactions (Car-S18-min10 :33 ; Car-S19-min6:14 ; min9:56), les élèves n'analysent pas les procédures mais les corrigent, obligeant alors Caroline à les réorienter vers une activité d'analyse par un jeu de questions « *qu'est qu'il a fait ?* », « *pourquoi ?* ».

- Un élément mésogénétique récurrent : la schématisation en « parties-tout »

L'utilisation de la schématisation en « parties-tout » devient un recours quasi systématique à la reconnaissance de problème soustractifs. Caroline reconnaît que « *ça les aide beaucoup. Là, ils voient qu'il manque quelque chose. Et comme ça je trouve que la soustraction est claire c'est vraiment quatre-vingt-onze moins vingt-huit et l'addition aussi de la preuve prend son sens, vingt-huit plus quelque chose…* » (Car-S18-entr.post). Nous détectons ici une forme d'automatisation répondant à un souci d'outiller ses élèves les plus faibles.

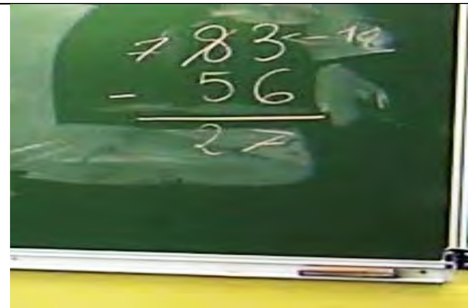
	Séance 18	Séance 19	Séance 20
Modalités de travail	Alternance entre travail collectif et travail individuel	Collectif et individuel	Collectif
Catégorie de problèmes	Transformations : e t- E Combinaison eEe	Transformations : e t- E Combinaison : eEe	-
Traces au tableau			
Matériel	Affiches des procédures des Schtroumpfs ; Ardoise ; Fiche de travail individuelle	Affiches des procédures des Schtroumpfs ; Ardoise Fiche de travail individuelle ; **matériel didactique de numération aimantés : buchettes (dizaines) et cubes-unité**	Affiche procédure Grand Schtroumpf ; Multicubes agencés en dizaines et unités
Savoirs et/ou techniques mathématiques mobilisés	Nombres et propriétés dans le système décimal Décomposition d'un nombre en dizaines unités / Addition / comptine numérique Niveaux de preuve : NP1, NP2, NP5	Système de numération décimal / Addition / suite des nombres (comptine) Niveaux de preuve: NP1, NP2, NP5 Techniques de résolution par essais successifs	Système de numération décimal

Tableau 44 : Synthèse des trois séances de l'étape 5 – « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » du point de vue mésogénétique (Site Caroline)

- Une ajout mésogénétique non prévu à cette étape de l'ingénierie

Caroline initie d'elle-même l'algorithme de la soustraction par cassage. Pour ce faire, elle tente en fin de séance 19 d'illustrer la technique de la soustraction. L'utilisation d'un matériel pédagogique (des cubes et buchettes aimantés) lui permet de commencer à illustrer le cassage d'une dizaine pour effectuer une soustraction. En entretien *post* de la séance 19, elle précise « *J'ai voulu faire comme d'habitude pour expliquer une soustraction à retenue.* », rajoutant ensuite « *J'aurais quand même aimé arriver au Grand Schtroumpf, aller jusqu'au bout*». L'introduction d'une séance supplémentaire pour« *aller jusqu'au bout* » répond à son objectif : la 20ème séance focalise sur l'algorithme de la soustraction par cassage. Il n'est pas sans intérêt de rappeler que sous des formes différentes, Valentine, enseignante chevronnée de l'autre site français, fait aussi ce choix didactique, dont nous avons vu qu'il avait une certaine prégnance par comparaison à la Suisse, dans les usages professionnels au sein du système éducatif français.

- la technique des essais, un outil au service de la résolution

Les traces écrites des élèves (*cf*. tableau de synthèse page suivante) indiquent que la technique des essais pour trouver un résultat à un problème soustractif devient régulière pour la majorité des élèves. Le tableau de synthèse ci-dessus nous montre la variété des procédures observées. Si la plupart des élèves effectuent des essais pour résoudre les problèmes, tous ne mettent pas en œuvre les mêmes stratégies :

- les procédures 7 et 8 montrent une résolution par essai / erreur

- les procédures 1 et 3 indiquent une recherche de l'ordre de grandeur à la dizaine près puis un ajustement à l'unité.

- la procédure 2 détaille une recherche du complément par décomposition puis recomposition des nombres en jeu dans le problème.

-la procédure 9 met en œuvre la méthode de la fausse position : un premier essai, puis un ajustement par translation d'un écart

- la procédure 6 montre une connaissance de l'algorithme de l'addition lacunaire

- la procédure 5 montre la persistance d'une schématisation. Remarquons que celle-ci, efficace, permet d'obtenir rapidement le résultat en un coup, ce qui n'incite pas l'élève à modifier sa stratégie.

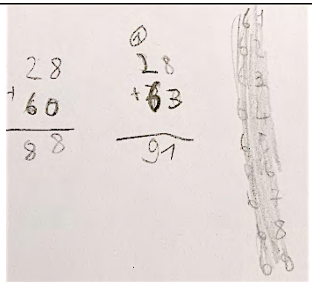
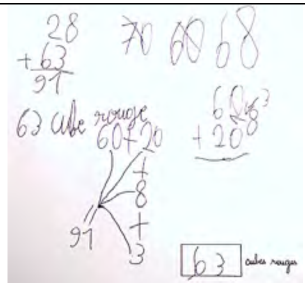
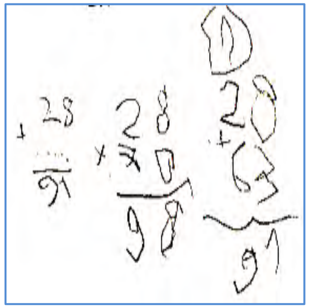
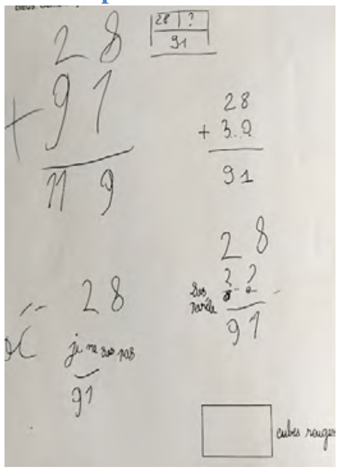
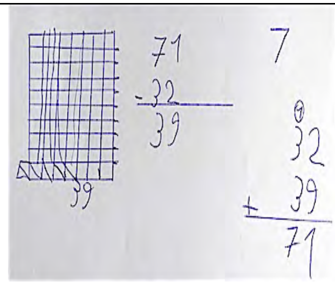
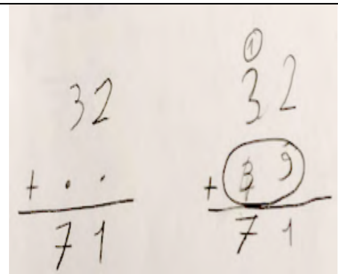
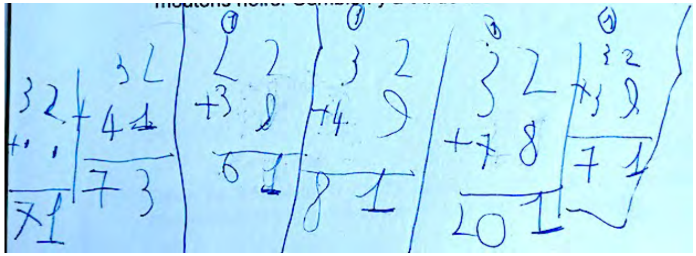
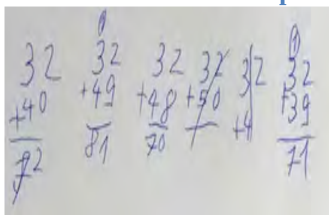
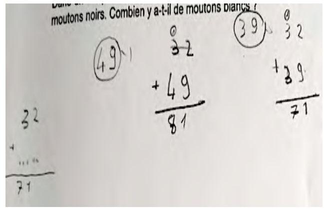
	séance 18	séance 19	Séance 20
Simulation des problèmes avec cubes	non	Tentative de simulation de la soustraction avec le matériel didactique de numération	Simulation de l'opération avec la boite et les cubes
Reconnaissance d'un problème soustractif	oui	oui	--
Procédures élèves lors de la recherche individuelle	 procédure 1  procédure 2  procédure 3  procédure 4	 procédure 5  procédure 6  procédure 7  procédure 8  procédure 9	--
vérification empirique	non	non	oui
Niveaux de preuve apparaissant au fil de la séance	NP2 / NP3 / NP5	NP3	NP 2
Émergence de propriétés ou savoirs mathématiques	Ordre de grandeur	Addition lacunaire	Algorithme de la soustraction par cassage

Tableau 45 : Synthèse des trois séances de l'étape 5 – « réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs » du point de vue chronogénétique (site Caroline

- Un hétérogénéité de plus en plus marquée.

Si une majorité d'élèves reconnait et résout les problèmes par les techniques dont nous venons de faire l'inventaire, quelques élèves progressent plus lentement. Les vidéos montrent ces élèves prenant souvent à partie leur enseignante dans des échanges dialogiques. Aussi, lors des recherches individuelles, nous la voyons constituer autour d'elle un petit groupe d'élèves qu'elle aide par un apport méthodologique. (Car-S19-min39 :14).

L'analyse de la procédure 4 est révélatrice des difficultés de ces élèves :

- une non reconnaissance du problème soustractif (l'élève effectue d'abord une addition)
- une intervention de Caroline dans la schématisation en partie-tout
- un premier essai
- un abandon : « *je ne sais pas* »

Nous notons la manière dont l'enseignante fait face, en tentant d'aider par une schématisation en « partie-tout ».

Pour conclure, nous constatons qu'au fil de l'étape, Caroline s'éloigne du texte de l'ingénierie. Lors de la séance 18, elle lui reste fidèle dans l'esprit tout en adoptant une démarche maïeutique amenant les élèves à analyser des procédures. Néanmoins, dans la séance suivante, se plaçant en position topogénétique haute, elle ne laisse pas les élèves analyser les procédures préparant à l'addition lacunaire mais les introduit de manière ostensive. En nous déclarant « *la séance 19 n'avait aucune utilité* », elle nous indique d'une certaine façon ne pas avoir saisi la fonction didactique de ces procédures comme donnant sens à l'algorithme de l'addition lacunaire. Par ailleurs, le temps accordé à l'analyse des trois procédures menant à l'addition lacunaire (18 minutes en tout) contraste avec celui accordé à l'analyse de la dernière procédure relative à l'algorithme par cassage (17 minutes). Ceci nous laisse penser que Caroline est plus préoccupée par l'introduction de la technique par cassage que par celle de l'addition lacunaire, comme le confirme l'ajout d'une séance supplémentaire focalisant sur cet enjeu. Cette interprétation nous semble confortée par le fait que d'une part, elle introduise dès cette séance un matériel didactique de numération habituellement utilisé dans l'école pour simuler le cassage de la dizaine (mais non prévu initialement dans l'ingénierie) et d'autre part, qu'elle intercale une séance supplémentaire entièrement dédiée au travail de cette technique algorithmique avant de passer à l'étape suivante.

Au terme de l'analyse des différentes étapes de mise en œuvre de l'ingénierie didactique dans le site de Caroline, nous concluons le cas en produisant une interprétation macrodidactique du processus observé. Comme pour les deux autres cas, nous nous appuyons sur les constats de l'analyse mésodidactique de chacune des séances et des quatre principales étapes pour documenter ce qui dans la pratique observée, relève des influences du programme français et des déterminants liés à l'épistémologie pratique de cette jeune enseignante française considérée à la suite des travaux d'Huberman (1989) comme en phase de stabilisation active de sa carrière.

3. Réflexions conclusives sur la mise en œuvre de l'ingénierie de la soustraction dans le site de Caroline : synthèse macrodidactique

Dans cette section, comme nous l'avons fait pour les deux autres sites, nous rapportons ce qui, dans la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Carine, relève des influences des déterminants institutionnels ou personnels liés à son épistémologie pratique. Les deux tableaux ci-dessous résument le déroulement de la mise en œuvre de l'ingénierie par Valentine au regard de celui prévu initialement par l'ingénierie.

Étape 1 : L1, L2, atelier, C1	**Étape 2 : L3, L4, L5**	**Étape 3 : L6 & C2, L7, ateliers, L8**	**Étape 4 : L9, L10, L11**	**Étape 5 : L12, L13**	**Étape 6 : L14, L15**
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction »	**« L'addition comme moyen de preuve d'un résultat. »**	**« Sens et vocabulaire de la soustraction. Signe + et – Calcul mental »**	**« La stratégie des essais »**	**« Réfléchir sur les choix et les essais des Schtroumpfs »**	**« La soustraction »**

Tableau 46 : vue synthétique de l'ingénierie didactique (Berté, 1996)

Étape 1 : 4 séances	**Étape 2 :** 3 séances	**Étape 3 :** 7 séances	**Étape 4 :** 3 séances	**Étape 5 :** 3 séances	**Étape 6 :** 3 séances
« Dévolution de l'apprentissage de la soustraction effective »	Dévolution partielle de la preuve Introduction d'un ostensif non prévu dans le texte initial	Techniques de calcul mental Introduction du codage de des opérations. Différentes écritures pour un même nombre. (principaux constats sur cette étape, analyse détaillée non présentée)	La preuve addition par addition devient un outil de résolution de problèmes propice à la technique des essais.	Étude de l'algorithme de la soustraction par cassage (cassage d'une dizaine pour obtenir un nombre d'unité suffisant)	Analyse non conduite

Tableau 47 : vue synthétique de la mise en œuvre de l'ingénierie par Carine

Avant de mettre en œuvre l'ingénierie didactique, Caroline nous a déclaré avoir toujours donné une place spécifique à la résolution de problèmes : « *Un jour dans la semaine on faisait des problèmes. Plutôt en fin de semaine. Avec ce qu'on avait fait en début de semaine.*» (Car-S10-entr.ante.seq). Comment Caroline conduit t-elle alors cette ingénierie qui, contrairement à ses usages d'enseignante introduit les concepts mathématiques par la résolution de problème, et donc en début d'apprentissage ? Ici, il est utile de revenir sur le fait que débutant dans le métier, 7 ans d'ancienneté, ses usages sont toujours en cours d'élaboration (Huberman, 1989). Entrée dans le métier plus récemment que les deux autres enseignantes, ces usages, disions-nous en introduction du cas (Cf. supra), risquaient d'être plus facilement remis en questions par l'ingénierie que dans les deux autres sites.

Résumons la manière dont Caroline s'y prend.

Durant la première étape, nous avons vu que Caroline dévolue le projet d'apprentissage de la soustraction à ses élèves : lors des recherches individuelles, elle attend, circulant parmi les élèves sans intervenir tandis que lors du travail collectif, elle délègue les simulations à des élèves indiqués comme étant en difficultés, les incitant ensuite à demander de l'aide à leur camarade. Tous les élèves de la classe sont ainsi engagés dans la simulation puis la vérification des problèmes avec la boite et les cubes. Par ailleurs, nous avons observé que, dans l'action, elle s'appuie sur les meilleurs élèves pour faire vivre la dévolution de la soustraction. Ainsi elle nous confirme avoir « *profité* [d'un élève chronogène] *pour modéliser la situation avec les cubes, les cubes attachés par 10 !* » (Car-S2-entr.post). Cette façon de jouer sur les difficultés ou facilités des uns et des autres dans les interactions des élèves peut être interprétée comme un trait de son épistémologie pratique quant à la manière de gérer la dévolution dans un groupe qu'elle a identifié comme « *très hétérogène* ».

Si la première étape consiste à dévoluer le projet d'apprentissage de la soustraction, la seconde engage la dévolution de la preuve d'un résultat pour donne sens à l'addition comme moyen de preuve. Cette dévolution s'opère par l'intermédiaire du pari. Nous constatons dans cette étape, que Caroline, si elle a saisi le sens mathématique du pari, ne mène pas jusqu'au bout la dévolution de la preuve. Nous avons, en effet, pointé que bien qu'elle ait une compréhension épistémique du pari, elle n'en retient que certaines dimensions. Les élèves parient, effectuent le sur-comptage, mais n'ouvrent jamais la boite pour valider le gain ou la perte de leur pari. C'est Caroline qui, court-circuitant les rétroactions du milieu didactique, valident les réponses (et non le pari) des élèves. De ce fait, le pari, conçu comme objet didactique préparant la construction de la preuve, ne peut plus jouer son rôle : les élèves ne re-questionnent pas la pertinence de leur pari, ce qui est justement un moment clé de la dévolution. Celle-ci s'en trouve du coup affaiblie. Les propos de Caroline, « [le pari], *on l'a vite oublié … à partir du moment où l'addition a commencé à sortir* » (Car-S6-entr.post), sont un indice que ce moment clé n'est pas détecté par Caroline.

Nous avons ensuite observé Caroline s'écarter du texte de l'ingénierie en introduisant dans le milieu didactique un ostensif qu'elle pense plus adapté à sa classe que celui proposé par l'ingénierie : écrire au recto d'une fiche la résolution de problème et au verso la preuve du résultat. En associant un geste de retournement au changement de procédure (procédure de résolution *vs* procédure de vérification), Caroline se montre à la recherche d'un procédé didactique lui permettant de résoudre ce qu'elle considère comme « *le nœud du problème* » (Car-S7-entr.ante). Nous observons donc ici le cas d'une enseignante dont les routines ne sont pas stabilisées mais qui, contrairement aux deux autres enseignantes qui ne perçoivent pas l'enjeu du pari et s'en dégagent par l'installation de techniques et d'automatismes, cherche des solutions pour rester dans l'esprit de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire ici, donner du sens à l'addition comme moyen de prouver un résultat à un problème soustractif.

Ajoutons que, comme pour les étapes précédentes, nous constatons une utilisation récurrente d'élèves chronogènes, les élèves les plus pertinents du point de vue du savoir visé, dans les moments conclusifs, moments prenant un statut de micro-institutionnalisation. Nous considérons cette manière « *d'utiliser* » (Car-S5-entr.post) certains élèves chronogènes comme relevant de son épistémologie pratique, trait que nous pointons aussi dans l'étape suivante.

La quatrième étape transforme la preuve en un outil permettant de calculer une différence par essais successifs. Dans la mise en œuvre de cette étape, plusieurs constats nous donnent accès à l'épistémologie pratique de Caroline. Tout d'abord, nous constatons qu'elle donne à la première séance de l'étape une fonction de consolidation de la preuve. Elle justifie cet écart à l'ingénierie par le fait qu'« *il fallait absolument qu'ils aient compris* […] *je ne peux pas passer par-dessus* » (Car-S15-entr.post), ce qui est pour nous une indication de sa vision cumulative des apprentissages en mathématiques. Ensuite, les erreurs des élèves ne font pas substrat pour justifier la nécessité de rechercher des techniques permettant de calculer une différence : la résolution par essais successifs est amenée de façon artificielle par Caroline, qui demande de proposer un premier nombre « *au hasard* », puis de le prouver. Ceci est, nous semble-t-il, un indice que Caroline n'accède pas aux soubassements didactiques de l'ingénierie broussaldienne : si elle introduit la résolution par essais successifs et par la méthode de la fausse position, elle ne les inscrit pas dans la logique de construction de l'ingénierie didactique. Par ailleurs, la demande express d'un nombre « *au hasard* » (séance 16) crée une rupture de contrat didactique qu'elle semble ne pas percevoir, l'amenant à prendre une position topogénétique haute, voire surplombante : elle pratique alors une technique ostensive espérant une avancée chronogénétique du savoir…mais lequel ? Il ne semble pas qu'à cette étape de l'ingénierie, Caroline ait perçu l'inflexion de l'enjeu didactique vers la recherche d'un algorithme de la soustraction. Nous faisons donc l'hypothèse que Caroline perçoit cette étape comme une étape de résolution de problème (au sens générique) et non comme une étape initiant la construction d'un algorithme opératoire.

L'étape 5 telle qu'elle est prévue par l'ingénierie est une étape d'analyse et de formulation. Si la première séance de cette étape est menée fidèlement au texte de l'ingénierie, nous constatons que par la suite Caroline s'en éloigne. La séance suivante la montre en position topogénétique haute dévoilant elle-même les procédures menant à l'algorithme de l'addition lacunaire, pour ensuite consacrer une grande partie de la séance à l'étude de la technique de la soustraction par conversion d'une dizaine en unités. Elle introduit de plus une séance supplémentaire entièrement dédiée à l'étude de cette technique, alors celle-ci est inscrite dans l'étape suivante. Nous avançons plusieurs explications à ce que nous considérons ici comme une bifurcation. La première est que Caroline a une lecture fragmentée étape par étape de l'ingénierie didactique. A propos de l'étape 6, elle nous déclare « *non, non, je l'ai pas encore lue… C'est après les vacances … je la lirai pendant les vacances. Et puis on a la réunion mercredi*[100] … ». Ce point peut être interprété en relation avec le fait que les enseignants en début de carrière ont une vision parcellaire des enjeux curriculaires, ce qui les amènent à « coller » aux préconisations didactiques, sans avoir encore construit un point de vue plus global (ce qui est, selon les études sur les savoirs des enseignants chevronnés, un signe de leur expertise : Tochon, 1993 ; Wanlin, 2009). Une deuxième explication nous est fournie par Caroline elle-même : « *j'avais envie de l'introduire* […] *j'avais le temps de faire le Grand Schtroumpf. L'addition à trous, ils connaissaient…* » (Car-S19-entr.post). Cette dernière remarque est à relever : ainsi que le dit Caroline, ses élèves connaissent bien l'addition lacunaire, mais ils ne la connaissent qu'intégrée dans une procédure de résolution par essais (étape 4). Pour autant, ils ne connaissent pas le procédé algorithmique. Cette remarque nous permet donc de penser que, comme Valentine, Caroline privilégie l'algorithme par cassage à l'addition lacunaire. Enfin, une dernière explication réside dans les usages professionnels bien installés dans les pratiques enseignantes en France,

[100] Caroline fait référence ici aux réunions au sein de la recherche collaborative.

qui est d'introduire cet algorithme par une manipulation avec le matériel didactique de numération. (*cf.* section 2.2.2.2 du chapitre 1 en première partie). Nous faisons ici l'hypothèse que Caroline a été "rattrapée" par une tradition professionnelle.

A la suite de la présentation des trois cas et des constats établis au fil de l'analyse des mises en œuvre, il est maintenant temps de revenir sur le questionnement comparatiste à l'origine de notre travail de thèse. Le chapitre suivant en sera l'occasion, selon les deux plans de comparaison présentés dans le chapitre méthodologique de la première partie (*cf.* Figure 3 en section1.2 du chapitre 3 de la première partie).

Chapitre 3. Comparaison du fonctionnement des systèmes didactiques observés : discussion de nos résultats

Ce chapitre rend compte du fonctionnement des trois systèmes observés à partir de leur comparaison deux à deux.
Il discute dans une première section, à la lumière de l'étude des pré-construits, les similitudes et les spécificités des modalités d'implémentation de l'ingénierie didactique en Suisse romande et en France.
Dans une seconde section, cette question des similitudes et des spécificités est reprise en s'intéressant plus particulièrement aux effets de l'expérience enseignante, dans le cadre de la comparaison des deux sites français.
La discussion conclusive de ces résultats met l'accent sur les difficultés majeures rencontrées par les trois enseignantes à deux moments cruciaux de la ressource didactique que constitue l'ingénierie broussaldienne de la soustraction.

Au terme de l'analyse longitudinale et descriptive des pratiques d'implémentation dans le site suisse et dans les deux sites française, et conformément à notre problématique de recherche qui vise à identifier quels sont, dans les manières d'utiliser l'ingénierie broussaldienne, les effets des pré-construits institutionnels et les effets des épistémologies pratiques des professeurs d'expériences contrastées, nous nous proposons dans ce chapitre de comparer le fonctionnement des trois systèmes didactiques observés. Rappelons que nous nous situons ici aux deuxième et troisième plans de comparaison de la thèse, le premier plan ayant fait l'objet du premier chapitre des résultats sur l'analyse des pré-construits institutionnels.

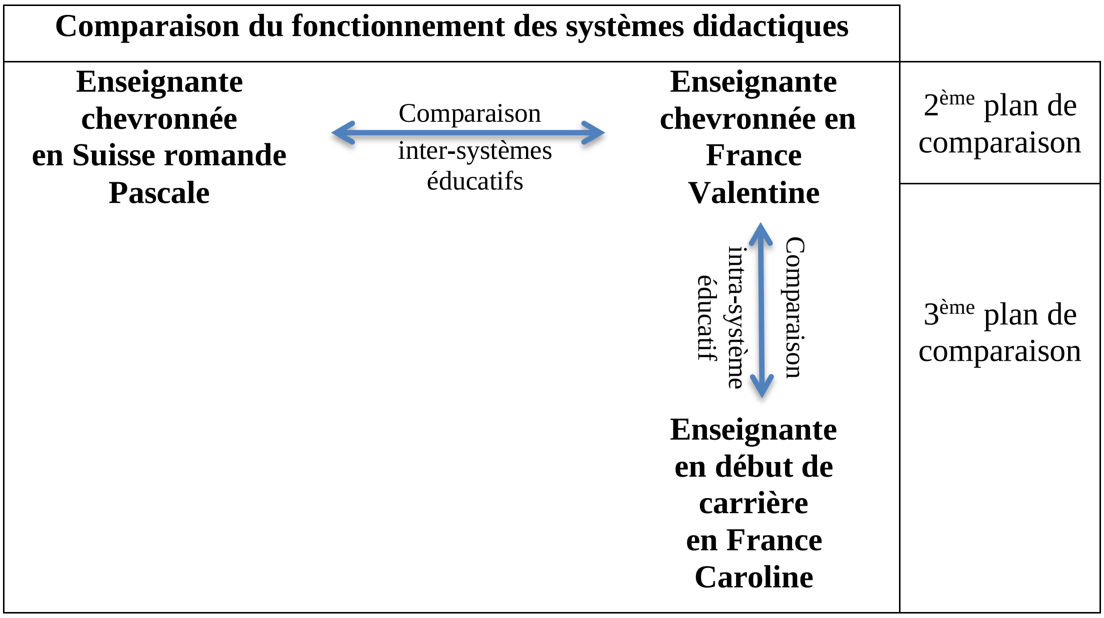


Figure 67 : Plans de comparaison des systèmes didactiques

Pour mener à bien notre discussion, nous présentons d'abord la comparaison inter systèmes éducatifs, c'est-à-dire celle portant sur le site suisse et le site français dont nous rappelons que les enseignantes (Pascale, Valentine) sont chevronnées. Nous poursuivons dans une deuxième section par la comparaison, interne au système éducatif français, entre l'enseignante chevronnée (Valentine) et l'enseignante en début de carrière (Caroline). Le *tertium comparationis* retenu pour documenter ces deux plans de comparaison s'adosse à l'analyse épistémologique de l'ingénierie didactique (*cf.* titre 1, chapitre 2 des résultats) afin d'identifier les inflexions, les prolongements, les écarts identifiés lors de l'analyse de son implémentation. Pour ce faire, nous nous appuyons plus particulièrement sur le tableau synthétique, présenté en fin de section 2.3 du chapitre précité, dont la visée était de synthétiser étape par étape les caractéristiques principales de la ressource didactique que constitue l'ingénierie broussaldienne de la soustraction :

- la fonction principale des situations proposées (action, formulation, validation, institutionnalisation),
- les enjeux didactiques liés à chaque étape,
- les catégories de problèmes au sens de Vergnaud,
- le matériel mis à disposition des élèves,
- le statut de la preuve visée.

Pour chacun des sites, nous avons construit un tableau synthétisant les résultats produits par nos analyses (correspondant aux étapes 1, 2, 4 et 5 de l'ingénierie) en reprenant les différentes rubriques ci-dessus, auxquelles nous ajoutons quelques éléments saillants observés tout au long du déroulement des mises en œuvre afin de dégager, *in fine*, la chronogenèse des savoirs réellement mis à l'étude. Nous débutons l'analyse par la comparaison Suisse romande France.

1. Comparaison des mises en œuvre en Suisse romande et en France : les cas des enseignantes chevronnées

Dans cette section, nous présentons site par site la synthèse des constats produits, puis nous comparons la manière dont l'ingénierie didactique a été conduite par les deux enseignantes.

1.1. Le cas de la Suisse (Pascale)

Dans ce qui suit, nous dégageons les traits caractéristiques qui président au fonctionnement du système didactique du site de Pascale. Une première série de conclusions porte sur les cinq premières lignes du tableau de synthèse ci-après relatives aux enjeux, aux catégories de problèmes, au matériel et au fonctionnement de la preuve afin de pointer l'idonéité et les écarts à l'ingénierie. Une seconde série de conclusions traite des observables (dernière ligne du tableau) identifiés au fil de la mise en œuvre.

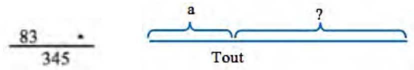
Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs				
	Identifier et déterminer une différence		Calculer une différence	
Étapes	Étape 1 : 5 séances	Étape 2 : 3 séances	Étape 4 : 3 séances	Étape 5 : 2 séances
Phase didactique	action	action / formulation	action / formulation	action / formulation
Enjeux	• Dévoluer le projet d'apprentissage relatif à la soustraction • Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs.	• Faire émerger une technique de recherche du complément • Résoudre les problèmes soustractifs selon deux procédures dont l'une par recherche du complément.	• Identifier et formuler les stratégies pour résoudre des problèmes soustractifs • Calculer la différence selon deux procédures, l'une par retraits successifs, l'autre par recherche du complément	• Algorithme de l'addition • Calculer la différence selon deux procédures : retrait des dizaines puis des unités du 2nd terme, recherche du complément
Cat. de pb	e t- E e E e **e T+ e**	e t- E e E e	e t- E E t+ e e E e e e | C+	e t- E e E e e e | C+
Matériel	• Boite et multicubes agencés en unités et dizaines • Fourre	• Boite et multicubes agencés en dizaine et cubes-unité ; Fourre ; fiche individuelle de travail	• Fourre • fiche individuelle de travail	• Fourre • fiche individuelle de travail
Preuve	• Vérification par ouverture de la boite puis comptage des cubes restants : NP0	• Vérification par comparaison des résultats obtenus selon deux procédures différentes.	• Preuve par addition : pb 1 et 2 de la séance 15 (L11) • NP1 et NP2	• Preuve des 1ers essais des Schtroumpfs par une addition • NP2
Idonéité et écart à l'ingénierie	Deux derniers pb de L1 non traités. Introduction par P. de mots inducteurs : « reste » (pb5 de L1)	Fusion de L3 (pb 1, 2 et 3) et L4 (pb 1, 2). Introduction par P. de mots inducteurs : « reste » (pb 9 de L5)	• Deux procédures en parallèles : - par retraits successifs - par ajouts successifs • Pas de procédure par essai / erreur.	La méthode de la fausse position n'émerge pas L'algorithme de l'addition lacunaire n'émerge pas
Observables dans la classe	• Dévolution effective du projet d'apprentissage relatif à la soustraction : • Elèves en situation de recherche et acteurs dans la simulation des problèmes. • Effets Topaze, **<u>Procédures élèves repérées</u>** • Dessin / comptage / file numérique / surcomptage de 10 en 10 **<u>Construction de la référence</u>** • Affiches institutionnelles – énoncés des problèmes – recueil des réponses des élèves	• Construction d'une procédure de résolution par recherche du complément. • Effets Topaze, ostensions **<u>Procédures élèves repérées</u>** • Dessin / comptage à rebours / sur-comptage **<u>Construction de la référence</u>** • Affiches institutionnelles – énoncés des problèmes – recueil des réponses des élèves.	• introduction de deux schématisations :  • Écriture de la différence sous forme a – b • Introduction de l'algorithme de l'addition Erreurs « Smaller-From-Larger » « Zero-Instead-Of-Borrow » (Resnick et al., 1982) • Effets Jourdain, effets Topaze, **<u>Procédures élèves repérées</u>** Dessin/ comptage / retrait par décomposition du 2nd terme / recherche du complément / tentative algorithmique **<u>Construction de la référence</u>** • Affiches institutionnelles – énoncés des problèmes – recueil des réponses des élèves – affiche des procédures de calculs	• Algorithme de l'addition posée en colonne • Soustraction par décomposition du 2nd terme en dizaines et unités • Méthodologie de lecture d'un énoncé • Ostensions déguisées **<u>Procédures élèves repérées</u>** • Dessin/ comptage / retrait par décomposition du 2nd terme / recherche du complément / tentative algorithmique **<u>Construction de la référence</u>** • Orale

Tableau de synthèse 2 : L'ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Pascale

1.1.1. Proximité et distance de la mise en œuvre de Pascale à l'ingénierie

Tout d'abord, Pascale reste relativement proche de l'ingénierie didactique broussaldienne dans son déroulement. Néanmoins, comme nous l'avons indiqué en section 3 du deuxième chapitre des résultats, Pascale ne traite pas la dernière étape relative à l'étude d'un algorithme de la soustraction, ce point n'est pas inscrit dans le plan d'étude romand (PER) au niveau 4P-H. Pour autant, elle respecte la chronologie de l'ingénierie didactique relativement à l'ordre de présentation des situations. Nous avons toutefois observé qu'elle s'écarte de l'ingénierie en fusionnant deux leçons en une séance dans la seconde étape, écart que nous avons analysé comme une absence de perception des différents paliers dans la construction de la preuve intellectuelle d'un résultat.

Un autre point caractéristique dans la succession des étapes de l'ingénierie, est que Pascale a introduit des activités portant sur la construction du nombre dans le système de n, de façon à rendre, selon ses dires, l'ingénierie didactique accessible à ses élèves. Ce point, avons-nous vu, n'est pas sans lien avec le fait que le plan d'étude romand incite à construire et donner sens aux concepts qu'ils relèvent des mathématiques ou des sciences ***par*** la résolution de problèmes (*cf.* visées prioritaires MSN 12 et 13, section 1 du chapitre relatif à la comparaison de pré-construits).

Concernant les enjeux de savoir visés par l'ingénierie et les phases didactiques associées (au sens de la théorie des situations didactiques : phases d'actions, de formulation et de validation), nous constatons que, *in situ,* les phases didactiques valorisées par Pascale relèvent majoritairement d'une dialectique action / formulation. Pascale gère les séances selon un même mode opératoire pouvant se répéter à plusieurs reprises dans une même séance : les élèves prennent ensemble connaissance des problèmes, reformulent les énoncés, puis résolvent individuellement, pour ensuite débattre de leurs propositions et procédures collectivement. Peu d'étapes font l'objet de phases d'institutionnalisation, sinon que quelques micro régulations institutionnalisantes, parcellaires, comme nous en avons fait le constat au fil de l'analyse. Les fins de séances se terminent pour la plupart de façon abrupte, sans référence aux savoirs travaillés et portant le plus souvent sur l'intérêt manifesté par les élèves ou sur des encouragements à poursuivre (voir plus particulièrement en séances 1, 4, 15 etc.). Pour autant, quasiment chaque séance débute par un appel à la mémoire didactique sous forme orale ou sous forme d'affiches qui, selon nous, ont un statut « officiel » au sein de à la classe assurant la continuité de l'action didactique et permettant de construire une référence commune.

Pour ce qui relève des enjeux de savoirs et des catégories de problèmes successivement mis à l'étude, la synthèse des constats établis montre que si l'ingénierie didactique broussaldienne poursuit deux enjeux (construire le sens de la différence entre deux nombres, puis maitriser les algorithmes opératoires pour résoudre des problèmes soustractifs), Pascale s'en détache en orientant, dès la seconde étape, les élèves vers une résolution des problèmes selon deux procédures : celle des retraits successifs, celle de la recherche du complément. Nous avons analysé ce constat en faisant l'hypothèse que le PER et les moyens COROME, mais aussi des usages professionnels genevois stabilisés, orientent l'enseignante dans cette manière de faire. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le PER inscrit « comptage et dé-comptage de 10 en 10 à partir d'un nombre donné » et « sur-comptage, calcul réfléchi, répertoire mémorisé » dans les module MSN 12 et 13 ; tandis que les moyens COROME, renvoyant aux commentaires didactiques[101], précisent que l'on cherchera à établir « l'équivalence fondamentale entre les expressions additives a + x = b et x = b – a ».

Le tableau met aussi en évidence que les milieux didactiques proposés aux élèves ne sont pas modifiés quant à la structure des problèmes (Vergnaud, 1991) proposés par l'ingénierie, ce que nous interprétons comme un effet de naturalisation de certains éléments de la théorie des champs conceptuels (ici les catégories de structure dans le champ additif), d'autant que nous avons montré en chapitre 1 que cette théorie a eu un impact sur les textes officiels en Suisse romande. En effet, dès les années 90, les travaux de Vergnaud ont été fortement travaillés dans la communauté des didacticiens genevois. Cette « culture genevoise » s'est alors traduite, via des méthodologues (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1998 ; Ging, Sauthier & Stierli, 1998), mais aussi via des didacticiens des mathématiques (Brun, 1990 ; Conne,1979, 1985 ; Fluckiger, 2000, 2004 ; Bovet, 1978) par une intégration de la théorie dans les plans de formation des enseignants. Pour autant, l'analyse des séances de Pascale a montré que certains mots inducteurs de l'opération ont été introduits, notamment le terme « *reste* », dans les reformulations des questions (« *combien en reste-t-il ?* »), orientant ainsi les élèves sur un des sens de la différence. Notre interprétation est que, si les problèmes ne sont pas structurellement modifiés (parce que justement naturalisés), la vision première de l'enseignante, vis-à-vis de la soustraction, se dévoile dans ces reformulations, montrant ainsi une composante épistémique de son rapport à l'objet « soustraction ».

[101] « Les relations additives et soustractives correspondent à une relation unique » (Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire, 1997)

Si Pascale conserve la structure des problèmes, en revanche, les milieux didactiques relatifs à l'addition, proposés par l'ingénierie comme moyen de preuve, ne sont pas retenus. Nous avons vu que cette enseignante perçoit le pari comme un objet anecdotique, ludique, voire motivant la réussite de production d'une écriture additive. Parallèlement, le matériel {boite, cubes}, support dans l'ingénierie d'une phase de formulation de la preuve, s'efface au fil de la mise en œuvre. Ce matériel conserve, lors de l'étape 1, les deux fonctions de simulation et de vérification empirique, mais il disparaît au fur et à mesure que la recherche d'un complément prend forme dans le milieu didactique. Ainsi, les niveaux de preuves NP1 et NP2[102] apparaissent seulement à l'étape 4 et ce, après que la représentation en « parties-tout » ait été installée dans le milieu didactique. Les résultats aux problèmes soustractifs obtenus par retraits successifs (décomposition du second terme) sont alors vérifiés par addition. Ici encore, nous pointons une manière de faire pilotée par les textes officiels, principalement les moyens d'enseignement qui introduisent l'addition et la soustraction par une schématisation en partie-tout (Gagnebin et al., 1998 ; Ging, Sauthier & Stierli, 1998). Nous retrouvons d'une certaine manière dans ce site, l'existence de tensions entre « les conceptions véhiculées par les ressources COROME et d'autre part des conceptions plus personnelles » décrites à propos de du travail d'enseignants genevois relativement à l'enseignement de la notion d'aire (Daina, 2013, p. 286). Ces tensions, dans le cas de Pascale, viennent faire obstacle à la compréhension de certains des enjeux de l'ingénierie broussaldienne.

1.1.2. Observables au fil du déroulement de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique

Nous avons pointé qu'au fil de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique, Pascale prend une position topogénétique de plus en plus haute : lors de la première étape, elle laisse les élèves prendre en charge la résolution des problèmes et ce, jusque dans la manipulation du matériel. Pour autant, dès cette première étape, comme nous l'avons vu, elle marque une première inflexion en orientant les élèves vers une vision des problèmes soustractifs proposés sous forme de « *partie-tout* » (*cf.* figure 19, titre 2). Lors de la seconde étape, Pascale s'éloigne de l'esprit de l'ingénierie didactique[103]. Nous avons noté une bifurcation qui oriente les élèves vers la recherche d'un complément. Les réponses des élèves aux problèmes sont alors vérifiées par comparaison avec celles obtenues par une autre procédure. De ce fait, le pari, apprêt didactique préparant la preuve d'un résultat, comme nous l'avons montré lors de

[102] NP1 : la différence doit être inférieure au tout ; NP2 : si d = a – b alors d + b = a

[103] Nous rappelons que l'ingénierie didactique construit le sens d'un différence à partir de sa définition : a - b est le nombre qui, ajouté à b est égal à a.

l'analyse épistémique de l'ingénierie (titre1 du chapitre 2) n'a plus sa raison d'être. Par voie de conséquence, la logique épistémique qui préside à cette ingénierie est mise à mal. Comme nous l'avons identifié lors de l'analyse des étapes 4 et 5, la technique des essais, la méthode de la fausse position n'ont pu être mises en œuvre alors même qu'elles étaient au cœur des enjeux.

Nous avons indiqué que les erreurs documentées dans les travaux de Resnick (1982), Brown et Van Lehn (1980) sont présentes dans les productions des élèves de Pascale : dès la quatrième étape (tableau 17, titre 2), certains élèves effectuent les soustractions en appliquant les règles « *Smaller-From-Larger* » ou bien encore « *Zero-Instead-Of-Borrow* » (*Ibid.*) Pascale répond aux erreurs de ses élèves en utilisant un argument signalé dans la littérature : « il n'est pas possible de prendre un plus grand nombre d'un plus petit » (Jonaert, 1993 ; Maurel, 2010 ; Nantais, 1993). Cet argument maintient les élèves dans un raisonnement quantitatif sur chacun des chiffres alors qu'un argument d'ordre mathématique (l'addition comme moyen de preuve, même introduit par la réunion de deux parties que Pascale a valorisée) aurait pu être utilisé pour invalider le résultat et par conséquence les règles énoncées par Resnick (1982).

Finalement, l'ensemble de ces faits didactiques traduit une lecture de l'ingénierie didactique au travers du prisme de la résolution de problème. Pascale se sert de l'ingénierie didactique comme d'une ressource lui permettant de donner sens à la notion de différence et d'introduire deux techniques de résolution. La preuve d'un résultat n'est, quant à elle, utilisée ni pour valider un résultat, ni pour introduire d'autres techniques de résolution.

Examinons maintenant les traits saillants de la mise en œuvre de cette ingénierie par l'enseignante chevronnée en France.

1.2. Le cas de la France (Valentine)

Comme nous venons de le faire pour Pascale, nous nous appuyons sur le tableau de synthèse ci-après pour caractériser la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Valentine.

Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs				
	Identifier et déterminer une différence		Calculer une différence	
Étapes	Étape 1 : 3 séances	Étape 2 : 5 séances	Étape 4 : 4 séances	Étapes 5 : 2 séances
Phase didactique principale	action	action et formulation	action et formulation	action et formulation
Enjeux	Reconnaître et résoudre des problèmes Dévoluer des problèmes soustractifs.	Résoudre des problèmes soustractifs Automatiser l'addition comme moyen de preuve.	Résoudre des problèmes soustractifs par essais successifs, puis réduire le nombre d'essais	Analyser des procédures et rechercher un algorithme opératoire.
Cat. de pb.	e t- E e E e e T+ e	e t- E e E e	e t- E E t+ e e E e e e | C+	e t- E e E e e e | C+
Matériel	• Boite et multicubes agencés en unités et dizaines • fiches de travail individuelles	• Boite et multicubes agencés en unités et dizaines • Fiche de travail individuelle	• Boite et multicubes • Fiches de travail individuelles • Ardoise et calculatrice	• Ardoises ; Multicubes • Affiches des procédures des Schtroumpfs • fiche de travail individuel
Preuve	Vérification empirique : NP0, NP1	Le niveau de preuve NP2 émerge par automatisme L'addition posée en colonne, avec retenue est disponible.	Niveaux de preuve : NP2 : NP3 ; NP5. Pas utilisés pour élucider certaines erreurs ou montrer la non commutativité de la soustraction.	Niveaux de preuve: NP1 ; NP2 ; NP3 ; NP4 ; NP5
Idonéité et écart à l'ingénierie	L2 phase 4 : deux calculs supplémentaires	Ajout de deux séances supplémentaires dans le but d'automatiser la preuve d'un résultat.	Simplification /reformulation / modification des énoncés (mot inducteur, valeur numérique (17 au lieu de 7) Ajout d'une séance supplémentaire	L12 : résolution des problèmes avant d'analyser les procédures présentées. L13 : introduction de l'algorithme par « cassage »
Observables dans la classe	• Dévolution partielle du projet d'apprentissage : position surplombante de Valentine faisant jouer les problèmes comme « un tout auquel on soustrait une partie » **<u>Procédures élèves repérées :</u>** Dessin / comptage / répertoire / système de numération décimal / comptine **<u>Construction de la référence</u>** • Affiches institutionnelles : – énoncés des problèmes	• La dévolution de la construction de la preuve n'a pas lieu • Automatisation de la preuve : « réponse + nombre de cubes sortis = nombre de cubes au départ ». • **effets Topaze, trilogue, pratiques ostensives** **<u>Prégnance du contrat didactique pérenne :</u>** « expliquer la procédure de résolution » **<u>Procédures élèves repérées :</u>** Dessin / sur-comptage un à un / sur-comptage de 10 en 10 / sur-comptage adossé à des procédures de calculs réfléchis / Apparition d'ajustements **<u>Construction de la référence</u>** • 2 fiches institutionnalisante : « pour résoudre » et « pour vérifier »	• Étayage important de Valentine : circulation dans la classe de groupe en groupe, d'élève en élève. • Écriture de la différence sous la forme a – b • **effets Topaze, trilogue, ostension déguisée** • **Accélération chronogénétique** Simulation par cassage d'une dizaine d'un algorithme de la soustraction **<u>Procédures élèves repérées :</u>** Recherche du complément par ajouts successifs / Soustraction par retraits successifs / Essais successifs / méthode fausse position dans le cas où l'écart est très petit Erreurs « Smaller-From-Larger » « Zero-Instead-Of-Borrow » (Resnick et al.,1986) non pointées par ens. **<u>Construction de la référence</u>** • Au tableau : méthode de la fausse position	• Analyse effective des procédures par comparaison avec celles des élèves. [Tout | a | ?] • Utilisation systématique de la schématisation « partie-tout » → **Topaze et ostension déguisée** • Écriture systématique de l'addition à trous **<u>Procédures élèves repérées :</u>** essais successifs / Recherche du complément par surcomptage de 10 en 10 / Méthode de la fausse position : ordre de grandeur à la dizaine près, puis ajustement par translation / Addition lacunaire / introduction algorithme de la soustraction

Tableau de synthèse 3 : ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Valentine

1.2.1. Proximité et distance de la mise en œuvre de Valentine à l'ingénierie

Comme Pascale, Valentine suit le déroulé de l'ingénierie didactique. L'analyse didactique a montré les difficultés de cette enseignante à faire émerger la preuve d'un résultat, difficulté qu'elle lève en insérant deux séances supplémentaires dans l'étape 2. L'étape 4 fait elle aussi l'objet d'une séance supplémentaire, répondant, comme nous l'avons vu, à une volonté de réduction de l'hétérogénéité entre les élèves (section 2.2.3.2 du titre 3).

Valentine mène chacune de ces étapes en alternant principalement des phases d'action et de formulation. Cependant, en particulier durant les deux premières étapes, l'enseignante opte pour une position topogénétique haute, ce qui a conduit à un affaiblissement de la portée des phases d'action et de formulation. Rappelons par exemple que lors de la première phase, elle ne laisse pas les élèves simuler les situations autrement que par un retrait, amoindrissant de ce fait la dévolution des situations (*cf.* section 3, réflexions conclusives du titre 3). Par ailleurs, nous avons noté dans le site de Valentine peu de phases d'institutionnalisation, ce qui a eu une incidence sur la construction d'une référence commune à la classe et, par ricochets, sur la relation didactique que l'enseignante entretient avec les élèves : contrat d'ostension, effets Topaze, étayage, appui sur des élèves chronogènes marquent sa manière d'enseigner. Nous avons cependant noté la présence « d'affiches institutionnalisantes » qui guident les élèves en particulier lors de l'étape 2. A partir de l'étape 5, nous avons vu Valentine endosser progressivement une position topogénétique basse, ce qui lui permet alors de mener à bien les phases de formulation (au sens de l'ingénierie). De ce fait, les élèves réussissent à raisonner sur les procédures présentées et à donner sens à des algorithmes opératoires. L'analyse didactique suggère que l'ingéniosité de cette enseignante (dont les traces sont repérables dans les extraits d'entretiens cités) relève de l'expérience acquise dans le métier et moins des textes officiels français. Cette ingéniosité se manifeste, dans ce site, par une idonéité plus grande à la logique didactique broussaldienne d'élaboration du sens des objets mathématiques et des algorithmes de résolution des problèmes soustractifs grâce à un usage adéquat des dialectiques d'action, de formulation, de validation.

Ainsi, relativement aux enjeux de savoirs visés par l'ingénierie didactique, Valentine reste en conformité avec le déroulement prévu. Dans un premier temps, c'est principalement l'enjeu « résoudre des problèmes soustractifs » qui sous-tend l'action didactique de Valentine, et dans un deuxième temps, celui de « donner sens à un algorithme opératoire ». L'analyse souligne que la mise œuvre de l'ingénierie par cette enseignante s'inscrit dans une pratique ritualisée d'organisation des séances alternant temps de recherche individuelle et débat collectif. Les observations montrent des élèves habitués à discuter leurs procédures de résolution. Nous avons pointé que Valentine déclare s'inspirer de la démarche de résolution de problème telle qu'elle est préconisée dans les programmes français, non seulement en mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines (*cf.* chapitre 1 des résultats). Ces constats suggèrent une combinaison d'influences de déterminants institutionnels et de dimensions épistémologiques liées à son statut de maitre formateur.

Comme Pascale, Valentine respecte scrupuleusement les structures des problèmes (au sens de Vergnaud). Lorsque Valentine introduit de nouveaux problèmes pour renforcer l'apprentissage des élèves, leurs structures sont identiques à celles proposées par l'ingénierie didactique. Ce point soutient l'idée qu'apprendre par la répétition est un trait marquant de son épistémologie pratique.

L'usage du matériel {boite, cubes} garde sa fonction de simulation et vérification lors des deux premières étapes de l'ingénierie. Sa présence dans les étapes suivantes, qui constitue un écart à l'ingénierie, témoigne, selon nous, de la volonté de l'enseignante de faire visualiser aux élèves l'algorithme de la soustraction qu'elle valorise : la nécessité du cassage d'une dizaine. Nous retrouvons ici des constats établis dans les recherches portant sur l'usage de cette même ingénierie didactique (Quilio et al., 2012). Nous avons montré que le choix de cet algorithme, parmi d'autres possibles, vient occuper tout le devant de la scène didactique grâce justement à l'usage de ce matériel tout au long des étapes suivantes. Nous interprétons la prégnance du matériel comme un effet Diénès (Brousseau, 1986), c'est-à-dire comme une valorisation par Valentine des effets du matériel didactique pour assurer la compréhension de l'algorithme de la soustraction par cassage.

La dynamique macrodidactique mise en œuvre dans ce site montre que si Valentine reste en conformité avec les visées de l'ingénierie didactique (dévoluer le projet d'apprentissage de la soustraction), elle ne réussit pas à donner sens à la vérification intellectuelle. Nous avons interprété ces difficultés comme résultant principalement de deux facteurs :

- L'impossibilité pour les élèves de percevoir le nécessaire changement de contrat didactique ce qui se traduit par le fait qu'ils continuent à agir selon la coutume de classe : expliquer la procédures de résolution et non prouver.

- La difficulté didactique de Valentine, qui n'ayant pas perçu le rôle du pari, ne parvient pas à faire advenir la preuve autrement que par la construction d'un automatisme (*cf.*

section 2.2.2.2. du titre 3). L'automatisation de la preuve par addition nous paraît un indice corroborant un trait de son épistémologie pratique : apprendre par répétitions qui se module ici en apprendre par la pratique.

Pour autant, Valentine exploite l'idée de preuve pour valider ou invalider les réponses des élèves dans l'activité de résolution de problèmes, mais elle ne s'en sert pas pour démêler les erreurs de nature algorithmique produites par les élèves : les niveaux de preuves ne sont de ce fait pas utilisés pour invalider un raisonnement quantitatif sur les chiffres dans les opérations. Nous versons ce constat plutôt du côté des déterminants institutionnels. En effet, les textes officiels français ne promeuvent pas la construction du sens des algorithmes opératoires au sens où l'entend Brousseau, tout au plus indiquent-ils une préférence pour un algorithme (par cassage) en début d'apprentissage, parce que cette stratégie s'inscrit dans le droit fil de la construction du nombre dans un système de numération décimal. Le poids des pré-construits renforce selon nous l'illusion de la construction d'un savoir algorithmique par l'utilisation d'un matériel (effet Diénès) et de ce fait, détourne l'enseignante de l'analyse des erreurs de ses élèves. Ceci la conduit à se rabattre sur un aspect techniciste de l'enseignement de la preuve en occultant le raisonnement mathématique nécessaire pour que les élèves comprennent leurs erreurs (Resnick, 1982).

1.2.2. Observables au fil du déroulement de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique

La synthèse des constats établis au fil des observations indique que Valentine adopte une position topogénétique haute en début de mise en œuvre pour ensuite progressivement, au fil des étapes 4 et 5 donner davantage, contrairement à Pascale, de responsabilités aux élèves. Cette modalité d'action s'observe particulièrement dans l'organisation temporelle des séances : l'enseignante laisse aux élèves un temps de recherche, mais reprend très vite la main dans les recherches ou débats collectifs. Nous avons pu pointer au fil du titre 3 qu'elle court-circuite les rétroactions du milieu didactique de la preuve, qu'elle contrebalance par une automatisation d'une procédure de vérification, ce qui affecte la qualité de la dévolution des situations.

Les élèves, quant à eux, délaissent rapidement les procédures empiriques (dessin, manipulation de cubes) au profit de procédures numériques, tirant profit de leurs connaissances en numération décimale. Ainsi, ils introduisent dans le milieu didactique des procédures telles que la « *split method* » ou « *jump method* » décrites par Fuson (1992a, 1992b), Peters et al. (2012) etc. (*cf.* section 2.2.2.1, chapitre 1 de la première partie). Comme dans le site de Pascale, nous avons observé un certain nombre d'erreurs, pointées par Resnick (1982). Cependant ces dernières, contrairement au site suisse, auraient pu être identifiées par l'enseignante comme les indices du passage de la résolution de problèmes soustractifs à la recherche d'un algorithme opératoire, ce qui n'est pas exploité par Valentine, focalisée par le cassage d'une dizaine.

Pour conclure, l'analyse de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique dans le site français montre que Valentine a une perception globale de la logique de l'ingénierie didactique. Il reste que cette enseignante chevronnée n'identifie pas finement quels en sont les ressorts, mais son expérience dans le métier lui permet de trouver, dans l'action conjointe, des moyens de contourner les difficultés. Pour autant, les visées de l'ingénierie didactique ne seront que partiellement atteintes : si les élèves reconnaissent un problème soustractif et développent de multiples procédures de résolution, l'étude de l'algorithme de la soustraction qui leur est proposé, demeure proche d'un enseignement technicisé, non appuyé sur les propriétés de l'opération, ce qui potentiellement peut mettre en péril le sens qui sera construit.

1.3. Éléments de généricités et de spécificités dans les mises en œuvre observées

Cette section compare les mises en œuvre de Pascale et Valentine. Nous nous intéressons dans un premier temps aux variations temporelles apportées aux étapes successives de l'ingénierie (et donc de l'avancée du temps didactique). Dans un second temps, nous pointons à la lumière des enjeux de savoirs portés par l'ingénierie et des synthèses des deux sections précédentes, quels sont les points communs et les différences dans l'implémentation qui en est faite à partir des descripteurs de l'action conjointe (dialectique contrat / milieu ; triplet des genèses).

1.3.1. Variation temporelle à l'échelle macrodidactique des mises en œuvre

Le tableau ci-dessous, illustre les variations temporelles de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par les deux enseignantes, toutes les deux confirmées et reconnues par leurs institutions d'appartenance.

Site 1 : Pascale (Suisse)

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique « la soustraction à l'école élémentaire »	
	Leçons	
1	Dévoluer l'apprentissage de la soustraction	Leçon 1
		Leçon 2
		Ateliers de soustraction
		Contrôle 1
2	L'addition comme moyen de preuve	Leçon 3
		Leçon 4
		Leçon 5
3	Sens et vocabulaire de la soustraction Introduction des signes « + » et « - » Calcul mental	Leçon 6 et contrôle 2
		Leçon 7 et contrôle 3
		Ateliers jeu de la boîte
		Exercices sur les écritures
		Leçon 8
4	La stratégie des essais	Leçon 9
		Leçon 10
		Leçon 11
5	Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs	Leçon 12
		Leçon 13 et contrôle 4
6	La soustraction	Leçon 14 et contrôle 5
		Leçon 15

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique implémentée par Pascale	
	Séances	
1	Séance 1	37 min
	Séance 2	60 min
	Séance 3	n. d.
	Séance 4	43 min
	Séance 5	n. d.
2	Séance 6	56 min
	Séance 7	n. d.
	Séance 8	1h16min
3	Séance 9	1h19min
	Séance 10	n. d.
	Séance 11	n. d.
	Séance 12	1h15min
4	Séance 13	51 min
	Séance 14	1h 04 min
	Séance 15	1 h
5	Séance 16	57 min
	Séance 17	37 min

n. d. : vidéos non disponibles

Site 2 : Valentine (France)

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique « la soustraction à l'école élémentaire »	
	Leçons	
1	Dévoluer l'apprentissage de la soustraction	Leçon 1
		Leçon 2
		Ateliers de soustraction
		Contrôle 1
2	L'addition comme moyen de preuve	Leçon 3
		Leçon 4
		Leçon 5
3	Sens et vocabulaire de la soustraction Introduction des signes « + » et « - » Calcul mental	Leçon 6 et contrôle 2
		Leçon 7 et contrôle 3
		Ateliers Jeu de la boîte
		Exercices sur les écritures
		Leçon 8
4	La stratégie des essais	Leçon 9
		Leçon 10
		Leçon 11
5	Réfléchir sur les choix et les essais des schtroumpfs	Leçon 12
		Leçon 13 et contrôle 4
6	La soustraction	Leçon 14 et contrôle 5
		Leçon 15

Étapes	Structure de l'ingénierie didactique implémentée par Valentine	
	Séances	
1	Séance 1	1 h 08 min
	Séance 2	1 h 13 min
	Séance 3	1h 47 min
2	Séance 4	1h 10 min
	Séance 5	1h 07 min
	Séance 6	1 h 19 min
	Séance 7	57 min
	Séance 8	1h 01 min
3	Séance 9	2h 02
	Séance 10	1h 46 min
	Séance 11	n. d.
	Séance 12	1h 37 min
	Séance 13	1h 21 min
	Séance 14	1h 13 min
4	Séance 15	1 h 07 min
	Séance 16	1h 16 min
	Séance 17	1 h 16 min
	Séance 18	1 h 06 min
5	Séance 19	2 h 01 min
	Séance 20	1 h 11 min
6	Séance 21	1 h 21 min
	Séance 22	45 min

n. d. : vidéos non disponibles

Tableau de comparaison 1 : structurations temporelles des mises en œuvre sur les sites de Pascale et Valentine

Comme développé dans le chapitre précédent, nous avons observé une différence de durée des séances sur chacun des sites : 1 heure en moyenne chez Pascale avec quelques séances autour de 1h15min, alors que chez Valentine elles durent environ 1h15min, certaines dépassant 1h30. Par ailleurs, alors que Pascale reste proche du déroulement de l'ingénierie, Valentine expanse certaines étapes. Nous avançons un point de vue institutionnel pour expliquer ces différences. En Suisse romande, les enseignants sont habitués à travailler avec des moyens d'enseignement qui guident leur pratique même si la cohérence descendante de ces moyens peut être réinterrogées (Daina, 2013). Aussi, nous pouvons supposer Pascale suit l'ingénierie telle qu'elle est présentée, comme elle le ferait pour une ressource issue des moyens COROME[104]. Valentine, s'autorise quant à elle, des libertés avec la ressource, liberté que nous relions aux principes institutionnels français selon lesquels les enseignants sont libres de choisir les manuels, les ressources et les méthodes considérés par eux comme les plus pertinentes. Suivant ce principe, les enseignants en France font un usage très personnalisé des ressources qui sont à leur disposition et qu'ils adaptent aux conditions et contraintes de la classe.

Nous poursuivons la comparaison en recherchant les généricités ou les spécificités observées dans les deux sites, d'abord dans les usages que font les enseignantes de

[104] Même si les fiches présentées dans ces moyens d'enseignement sont souvent lacunaires, laissant aux enseignants le soin d'interpréter ces ressources, comme l'a montré Daina (2013) relativement à la notion d'aire.

l'ingénierie didactique ensuite dans les traits saillants de leur action conjointe avec les élèves. Avant même que de décrire ces généricités et ces spécificités, pointons dans un premier temps, que les deux enseignantes divergent, en terme de visées, dans l'usage qu'elles font de l'ensemble de l'ingénierie. En effet, ce qui ressort des constats effectués au fil des analyses mésodidactiques du chapitre 2 et des récurrences résumées dans le tableau de comparaison 2 ci-après est que :

- Pascale (Suisse romande) focalise son enseignement sur la résolution de problèmes soustractifs quel que soit l'étape de l'ingénierie (*cf.* 2ème colonne grisée, site de Pascale). Nous avons considéré que Pascale agit probablement ainsi parce que les documents du plan d'étude romand, les moyens COROME ne lui imposent pas d'enseigner l'algorithme de la soustraction (étape 4 à 6 de l'ingénierie). Rappelons à ce propos, que c'est la raison pour laquelle elle s'est arrêtée à l'étape 5
- Valentine (France), s'inscrivant davantage dans l'esprit de l'ingénierie, consacre les deux premières étapes à la résolution des problèmes soustractifs de l'ingénierie puis bascule lors des suivantes vers la recherche d'un algorithme opératoire (*cf.* 2ème colonne grisée, puis bleutée, site de Valentine).

Pour faciliter la lecture comparative du tableau de la page suivante qui met en relation les modalités d'implémentation dans chacun des sites, les points communs identifiés ont été surlignés en vert et les différences en jaune.

1.3.2. Points communs observés dans l'implémentation de l'ingénierie par Pascale et Valentine

Rappelons tout d'abord que ces deux enseignantes chevronnées utilisent les problèmes soustractifs de l'ingénierie didactique sans en modifier la structure (au sens de Vergnaud) ni l'ordre de présentation. Lorsque Valentine introduit de nouveaux problèmes ils sont en adéquation avec ceux proposés par l'ingénierie broussaldienne et ont pour but de renforcer le nombre de répétitions. Dans les sections qui suivent nous traitons successivement des généricités au regard des dimensions épistémiques privilégiées par les enseignantes, puis au regard des traits saillants de l'action conjointe observée. Nous ferons de même pour rendre compte des spécificités des pratiques observées.

Site 1 : Pascale (Suisse)			
		Dimensions épistémiques principalement retenues	**Traits saillants de l'action didactique conjointe professeur-élèves observée**
Étape 1	Résolution de problèmes soustractifs	• Alternance ind. /col. • **Dévolution des situations de résolution** de problèmes soustractifs • Vérification empirique • NP0 ;	Mésogenèse : matériel {boite et cubes} un outil de simulation et de vérification ; brève apparition de la procédure de vérification par réunion des deux parties pour obtenir le tout. Topos du côté de l'élève : - simulations des situations à la charge des élèves. - émergence des solutions par interactions entre élèves Chronogenèse : ens. joue sur une contrainte temporelle pour amener les élèves à utiliser les nombres aux dépens d'une procédure empirique. Effets Topaze
Étape 2		• alternance ind. /col. **Vérification numérique par comparaison** de résultats obtenus selon des procédures différentes dont une par **recherche du complément** Pari, objet didactique non identifié, porte sur la production d'une écriture additive et non sur la réponse au problème.	Mésogenèse : le matériel {boite, cubes} disparaît au fil de l'étape. Topos partagé Chronogenèse : recherche d'un complément Effets topaze, Ostensions déguisées
Étape 4		• Alternance ind. /col. • schématisation en « partie-tout » • Écriture d'une différence sous forme soustractive. • **Calculs effectués par ajouts successifs** • **Calculs effectués par retraits successifs**	Mésogenèse : Introduction de l'addition : « *le plus tard possible* […] *pour l'ingénierie, j'ai suivi* ». Schématisation en « partie-tout » Topos basculant peu à peu du côté de l'enseignante Guidage serré vers deux procédures de résolution Chronogenèse : Appel à la mémoire didactique systématique : une affiche fait office de mémoire collective (trace institutionnalisante) Utilisation de l'addition pour vérifier deux résultats (réunion de deux parties) Effets Jourdain Topaze
Étape 5		• alternance ind. /col • **Calculs effectués par retraits successifs (décomposition du second terme)** • Introduction de la **preuve** par addition	Mésogenèse : Valence didactique des procédures des Schtroumpfs non identifiée. Introduction de l'algorithme de l'addition Topos du côté de l'enseignante : Méthodologie de lecture des énoncés : recherche des informations nécessaires, de la question, repérages des mots inutiles. Chronogenèse : - Procédures des Schtroumpfs non analysées - Résolution par retraits successifs ou recherche d'un complément Ostension déguisées

Site 2 : Valentine (France)			
		Dimensions épistémiques principalement retenues	**Traits saillants de l'action didactique conjointe professeur -élèves observée**
Étape 1	Résolution de problèmes soustractifs	• Alternance ind. /col • **Dévolution partielle des situations de résolution** de problèmes soustractifs • Vérification empirique • NP0 ; NP1	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes} → outil de simulation et de vérification. Topos du côté de l'enseignante : - situations jouées selon la vision de l'enseignante (retrait) - l'enseignante pose dans le milieu didactique les connaissances numériques acquises auparavant. Chronogenèse : utilisation du nombre pour résoudre (peu de dessins, mais comptage sur les doigts)
Étape 2		• Alternance ind. /col • Résoudre des problèmes soustractifs • Pari, objet ludique • **Automatisation** de la preuve par addition : NP2	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes}, reste présent tout au long de l'étape, davantage un outil de vérification que de simulation. Pari, objet didactique non identifié par l'ens. Affiche institutionnalisante de la preuve d'un résultat. Topos du côté de l'enseignante : pas de dévolution de la preuve Chronogenèse : Tension entre « résoudre » et « vérifier » d'où une automatisation de la preuve Effets Topaze, ostension Contrat didactique pérenne vif
Étape 4	Résolution de problèmes soustractifs / Recherche d' un algorithme opératoire	• Alternance ind. /col • schématisation en « partie-tout » • Écriture d'une différence sous forme soustractive Résolution par : • Essais → preuve → essais etc. • Ordre de grandeur (estimé) : • réduction du nombre d'essais • Erreurs algo inexploitées	Mésogenèse : La preuve, élément principal du milieu didactique : outil pour chercher ; Prégnance du matériel reste prégnant : utilisé pour montrer poser les premiers jalons vers un algorithme de la soustraction (par cassage). schématisation en partie-tout Topos en surplomb pour l'utilisation de la preuve puis équilibré ensuite. Reprise du topos pour introduire l'algorithme de la soustraction par cassage. Chronogenèse : Niveaux de preuve : NP2, NP3, NP5 Méthode « split » et « jump » Effets Topaze, trilogue, ostension
Étape 5	Recherche d' un algorithme opératoire	• alternance ind. /col • Analyse de procédures • Ordre de grandeur : NP3, NP4 • Méthode de la fausse position • Addition lacunaire	Mésogenèse : les procédures des Schtroumpfs Ajout mésogénétique par un élève : l'algorithme de la soustraction par cassage => nouvel apprentissage nécessaire Effets Topaze, ostension déguisée, élèves chronogènes Topos du côté des élèves. L'enseignante en réserve, amenant les élèves à comparer leurs procédures et celle des Schtroumpfs : phase de formulation importante : décrire, expliquer, comparer des procédures algorithmiques. Chronogenèse : une diversité de procédures. Erreurs de nature algorithme persistante. NP5

Tableau de comparaison 2 : mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Pascale (Suisse romande) et Valentine (France) [en vert : points communs ; en jaune : différences]

1.3.2.1. Concernant les généricités observées au regard des dimensions épistémiques principalement retenues

Trois points se dégagent concernant les généricités observées dans l'implémentation de l'ingénierie par des enseignantes chevronnées en Suisse et en France (surlignés en vert) :

- des pratiques valorisant l'articulation aux autres domaines mathématiques

- l'alternance du travail individuel ou collectif

- les mêmes mécompréhension de la logique épistémique de l'ingénierie didactique

- des pratiques valorisant l'articulation aux autres domaines mathématiques

Pascale construit les objets « nombre » et « addition / soustraction » en parallèle de façon à étendre les connaissances des élèves sur la suite des nombres. Elle mobilise pour ce faire de nombreuses ressources autres que celles de l'ingénierie. Ce faisant, elle rend possible l'accès aux problèmes posés dans l'ingénierie didactique. Rappelons que le PER présente les thèmes « Nombres » et « Opérations » dans deux rubriques différentes[105], alors que les programmes français les incluent dans un même domaine « Nombres et calcul». Mais pour Valentine, l'articulation aux autres domaines mathématiques est plus importante. Elle re-situe l'ingénierie en l'intégrant dans sa progression annuelle en mathématique comme le développe l'article Couderette et al., (2014), dépassant ainsi les préconisations institutionnelles française. D'une certaine manière nous pointons à l'occasion de ce constat, commun à ces deux enseignantes chevronnées, que l'implémentation de l'ingénierie broussaldienne est l'occasion de tisser des relations entre différents domaines mathématiques. Cette généricité observée n'est pas directement influencée par les pré-construits institutionnels. Dans les deux cas, les deux enseignantes s'autonomisent des textes.

- l'alternance du travail individuel ou collectif

Les enseignantes, qui, on l'a vu, assurent toutes deux des missions de formation auprès d'enseignants-stagiaires, ont stabilisé un usage professionnel de gestion des apprentissages des élèves selon une alternance de moments collectifs et individuels. Ces façons de faire sont fortement adossées à une approche socioconstructiviste et/ou à la doxa pédagogique des deux pays. Elles n'ont donc pas trouvé de difficultés à s'inscrire dans la

[105] Pointons toutefois que dans la version précédente des textes officiels de Suisse romande, ces deux thèmes étaient réunis dans un même chapitre.

perspective de l'ingénierie qui, de prime abord, a pu leur apparaître en continuité avec leur façon de faire. Ainsi l'alternance de moments (par elles jugées similaires) qu'induit l'ingénierie didactique ne modifie pas leur organisation habituelle qui consiste à faire verbaliser, à instaurer des débats entre les élèves pour faire émerger des savoirs. Pour autant, ces usages sédimentés nous l'avons vu, ne leur permettent pas toujours de se saisir de la logique épistémique propre à l'ingénierie de la soustraction, notamment leur perception des moments cruciaux de sa mise en œuvre comme nous le soulignons ci-après.

- les mêmes mécompréhensions de la logique épistémique de l'ingénierie didactique

Nous avons vu que le pari (étape 2) n'est reconnu didactiquement ni par Pascale, ni par Valentine. Toutes deux ne le perçoivent pas comme un apprêt didactique pour préparer, faire émerger la preuve d'un résultat. Elles ne le voient pas non plus comme un objet didactique donnant accès à la définition mathématique d'une différence. Il reste, pour toutes les deux, un objet motivationnel, voire une incongruité pour Pascale, alors que nous avons vu qu'il est une variable didactique de commande de la situation, cruciale dans la construction de la preuve. Il s'en suit que les élèves de Pascale ne passent pas de la vérification empirique à la vérification intellectuelle et que cette dernière, chez Valentine relève d'une procédure automatisée, non construite par les élèves et de ce fait, probablement dénudées de sens. Pour toutes les deux, le sens d'une différence par la définition mathématique, n'est pas atteint.

1.3.2.2. Concernant les généricités observées au regard des traits saillants de l'action didactique conjointe

La mise en relation des modalités meso-topo-chrono-génétiques (colonnes de droite par site sur le tableau de comparaison ci-dessus) permet de pointer des modalités de gestion des incertitudes liées aux contrats didactiques fort semblables. Nous avons souligné au fil des analyses la récurrence de monstrations, d'effets Topaze, d'ostension déguisée (Salin, 1999, 2002) qui, selon nous, relèvent de leurs manières de faire, probablement portées par une certaine assurance liée à leur ancienneté. Ces usages professionnels rendent possible le maintien de la relation didactique mais parfois au prix de l'évanouissement du savoir (par exemple celui relatif au pari ou celui relatif aux essais lors de l'étape 5 des Schtroumpfs. Nous verrons plus tard, des différences avec le cas de l'enseignante moins expérimentée en France.

Nous avons aussi noté une quasi absence d'institutionnalisation dans les deux cas que nous retrouverons aussi dans le cas de l'enseignante en début de carrière (voir 3ème plan de comparaison, section suivante). Il existe quelque cas de traces plus importantes d'institutionnalisation sous forme d'affiches dans le site de Valentine. Au sujet de ces institutionnalisations, lorsque les deux enseignantes enrichissent le milieu didactique par des affiches, on a pu observer qu'elles valorisent dans le contenu de ces affichages, ce qu'il y a à faire pour réussir : la preuve par addition pour Valentine, les deux procédures de résolution pour Pascale (ajouts successifs ou retraits).

Examinons maintenant les spécificités caractérisant les modalités d'implémentation dans les deux sites.

1.3.3. Spécificités observés dans l'implémentation de l'ingénierie par Pascale et Valentine

Il s'agit ici de repérer les spécificités propres à chaque site et de voir dans quelle mesure elles relèvent (ou non) de possibles influences de pré-construits institutionnels suisse romand et français. Dans le tableau de comparaison 2, ci-dessus, ces éléments sont surlignés en jaune.

1.3.3.1. Concernant les spécificités observées au regard des dimensions épistémiques principalement retenues

Même si les deux enseignantes sont focalisées sur les procédures de résolution des problèmes soustractifs, les perspectives retenues, comme nous l'avons pointé dans les sections précédentes, diffèrent :

- Pascale, nous l'avons déjà dit, valorise la « résolution des problèmes » mais n'aborde jamais la question « donner du sens à un algorithme ». Elle s'écarte de l'ingénierie en faisant travailler principalement deux techniques de résolution, ne laissant pas alors la possibilité au élèves de construire un algorithme opératoire. Nous avons interprété ce constat comme la prégnance des pré-construits de Suisse romande, qui rappelons-le, recommande de « résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux mathématiques », visées confortées dans les titres mêmes des deux thèmes, « **poser et résoudre des problèmes pour** construire et structurer des représentations des nombres naturels » (MSN 12) et « **résoudre des problèmes** additifs en … » (MSN 13).

- Valentine pour sa part s'inscrit dans les deux temps de l'ingénierie, à savoir la « résolution de problèmes » des étapes 1 et 2, et la construction d'un algorithme dès l'étape 4, restant en cela, nous l'avons vu, relativement proche de l'ingénierie. Pour autant, la question de la preuve en tant qu'outil pour résoudre et élucider les erreurs de nature algorithmique des élèves n'est pas mobilisée.

Pour illustrer ces spécificités rappelons que Valentine utilise l'artifice des Schtroumpfs comme un objet didactique, afin de faire émerger des procédures algorithmiques alors que Pascale le considère comme une modalité d'étude, qu'elle considère inutile voire comme une incongruité.

Un deuxième élément de spécificité dans les mises en œuvre observées réside dans une inflexion radicale apportée à l'ingénierie sur le site genevois qui réduit la visée d'apprentissage à deux procédures menées parallèlement : l'une consistant à soustraire par retraits successifs et l'autre à soustraire par la recherche du complément. Cette inflexion nous semble être aussi pilotée par l'influence des pré-construits institutionnels. En effet, nous rapprochons le propos de Pascale lors d'un entretien (« *A Genève, nous travaillons l'addition et la soustraction en parallèle* ») aux textes des deux documents institutionnels genevois (*cf.* chapitre 1 des résultats). Les moyens COROME indiquent que « le champ de l'addition englobe les deux opérations réciproques » (p. 181) tandis que le livre d'accompagnement « Apprentissages et enseignement des mathématique » indique que « toute situation additive peut être exploitée en termes de soustraction. […] L'enfant doit le constater, le pratiquer dans de multiples occasions, y réfléchir, comparer les écritures pour acquérir cette conviction que l'addition et la soustraction entretiennent des liens très étroits » (p. 100). Néanmoins les entretiens rétrospectifs que Pascale nous a accordés nous laissent entrevoir que les raisons de cet écart à l'ingénierie ne se trouvent pas seulement dans les textes institutionnels, mais aussi dans son propre rapport à l'enseignement de la soustraction. S'il ne fait aucun doute que Pascale sait prouver un résultat issu du calcul d'une soustraction et pense l'enseigner, nous pensons que cette enseignante ne perçoit pas la nécessité de permettre aux élèves de prouver un résultat issus du calcul d'une soustraction, ni la dimension épistémique de ce geste mathématique, alors que ces points sont au fondement même de l'ingénierie broussaldienne. (Pour un argument, *cf.* section 3 du titre 2).

1.3.3.2. Concernant les spécificités observées au regard des traits saillants de l'action didactique conjointe

Ce qui ressort de la comparaison des modalités spécifiques de conduite de l'action didactique dans les deux sites est un topos enseignant évoluant en sens contraire.

- En Suisse romande, les premières étapes de l'ingénierie se structurent autour d'une recherche active des élèves qui ont la charge de simuler les situations et, dans leurs interactions, de faire émerger des solutions. Dans les usages genevois, il convient de laisser les élèves autonomes, et selon une tradition empruntée à Piaget (1975), de s'appuyer sur leurs propositions pour conduire la classe. Selon les usages genevois le professeur endosse un topos relativement bas[106]. Or, l'ingénierie didactique a conduit Pascale à intervenir plus fortement pour pouvoir la mener à bien. Mais on a montré que ces usages perdurent, par exemple lors de la quatrième étape, l'enseignante prend la responsabilité d'intervenir sur le milieu didactique en ne retenant des interactions entre élèves que celles lui permettant d'introduire une technique de recherche du complément (ostension déguisée). Cette manière de faire l'éloigne de l'esprit de l'ingénierie didactique et peut être interprétée comme le poids des usages professionnels, mais aussi comme la volonté de Pascale de rester en conformité avec le plan d'étude romand (voir section 2.2.4.2, titre 2).

- En France, nous avons observé une démarche inverse dans laquelle l'enseignante est en position haute au début de l'ingénierie, puis en position plus basse au fur et à mesure de l'avancée de l'ingénierie. Lors de l'étape 1, elle impose de simuler les situations selon sa propre vision de la soustraction, à savoir comme un retrait. Cette position topogénétique haute s'affaiblit ensuite rapidement, pour laisser les élèves résoudre les problèmes selon leurs propres procédures et pour les expliciter. On retrouve ici le contrat didactique coutumier qui caractérise le fonctionnement de cette classe. Pour autant, à l'étape de 4, lors de l'utilisation de la preuve puis lors de l'introduction de l'algorithme de la soustraction par cassage, Valentine ré-endosse brièvement un topos surplombant qu'elle abandonne dès lors que les élèves sont invités à décrire et expliciter les procédures utilisées.

Pour conclure sur le second plan de comparaison de la thèse qui met en tension les pratiques de deux enseignantes chevronnées en Suisse romande et en France, nous identifions des manières de faire assez semblables que ce soit au niveau de la gestion de la classe, de la manière de conduire les apprentissages, de la façon de maintenir la relation didactique en

[106] Le fait que Pascale ait laissé vivre dans la classe plusieurs procédures d'élèves lors des dernières étapes nous semble confirmer cette interprétation.

produisant des effets Topaze, des ostensions déguisées, des monstrations, etc. Nous avons pu l'interpréter au regard de l'épistémologie pratique de ces deux enseignantes et leur relation à l'ingénierie didactique. Par exemple, nous avons pu pointer aux mêmes moments cruciaux (le pari, le sens de l'algorithme) de la logique épistémique de l'ingénierie une certaine mécompréhension de cette dernière par Pascale et Valentine. Les spécificités observées nous semblent pour leur part davantage marquées par les effets des pré-construits institutionnels des deux pays et les usages des ressources didactiques qui en découlent. Ces constats recoupent ceux qui, dans une autre discipline, identifient un « entrelacs de processus épistémiques et institutionnels » déterminant l'action didactique conjointe (Amade-Escot et al., 2009). Mais ces constats interrogent aussi comme nous le conjecturions dans la section relative à la problématique de recherche, la question des usages par les enseignants des ressources didactiques et des dimensions épistémiques à leur fondement. Nous y reviendrons lors de la conclusion générale. Pour avancer sur ces questions envisageons maintenant le cas de l'enseignante en début de carrière à partir de la comparaison des deux sites français.

2. Comparaison des mises en œuvre en en France au regard de l'expérience des deux enseignantes

Il s'agit de discuter les résultats produits à la lumière du 3ème plan de comparaison. Pour la mener, nous reprenons la démarche utilisée pour la comparaison précédente, mais nous ne développons ici que le cas de Caroline, enseignante en début de carrière qui exerce depuis 7 ans. Dans une deuxième temps nous confrontons sa mise en œuvre au cas de Valentine enseignante chevronnée que nous avons synthétisé en section 1.2.

2.1. Le cas de l'enseignante en début de carrière (Caroline)

De la même façon que nous avons fait pour Pascale et Valentine, nous caractérisons la mise en œuvre de l'ingénierie didactique par Caroline en nous appuyant sur le tableau de synthèse ci-après.

	Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs			
	Identifier et déterminer une différence		Calculer une différence	
Étapes	Étape 1 : 4 séances	Étape 2 : 3 séances	Étape 4 : 3 séances	Étapes 5 : 3 séances
Ph. didactique	action	action et formulation	/	/
Enjeux	• Reconnaître et résoudre des problèmes • Dévoluer des situations	• Faire émerger l'addition comme moyen de preuve d'un résultat à un pb soustractif.	• Consolider la preuve • Reconnaître et résoudre des problèmes	• Reconnaître et résoudre des problèmes soustractifs • Algorithme de la soustraction
Cat. de pb.	e t- E e E e e T+ e	e t- E e E e	e t- E E t+ e e E e e e | C+ e T+ e	e t- E e E e e e | C+
matériel	• Boite et cubes / Ardoise • Tableau noir	• Boite et cubes / Ardoise / Tableau noir • Fiche individuelle de travail	• Ardoise / Tableau noir • Fiche individuelle de travail • Calculatrice ;	• Cubes / tableau noir • Fiche de travail individuel • Matériel didactique de numération
preuve	• ouverture de la boite puis comptage des cubes restants • niveaux de preuve : NP0, NP1	• Dévolution partielle : pas de rétroaction du matériel pour le gain (ou pas) du pari, l'ens. valide le pari. • niveaux de preuve : NP2	niveaux de preuve : NP1 / NP2 / NP3 / NP4/ NP5	• niveaux de preuve : NP1 / NP2 / NP3 / NP4 / NP5
Idonéité et écart à l'ingénierie	/	• fabrication d'une fiche de travail individuel : accompagnement d'une gestuelle pour différencier procédure et preuve	• reformulation de problèmes • Ajouts de pb à résoudre avec la calculatrice.	introduction de l'algorithme de la soustraction par cassage
Observables dans la classe	• Dévolution effective Caroline laisse aux élèves ; - un temps de recherche individuel - la simulation et vérification avec la boite et les cubes - les élèves enrichissent le milieu primitif : niveau de preuves, termes « rajouter », « manque », « reste » **<u>Rupture contrat didactique</u>** : problème *vs* devinette **<u>Procédures et connaissances des élèves repérées</u>** Dessin / comptage sur les doigts / répertoire / calcul réfléchi avec appui sur numération décimale **<u>Construction de la référence</u>** Pas d'institutionnalisation	- Apartés avec élèves ou groupes d'élèves - Effets Topaze, Jourdain - Appel à des élèves chronogènes (ostension déguisée) **<u>Milieu didactique</u>** - Écriture des données et mots clés essentiels au tableau par l'ens. - Introduction des termes «ensemble », « rassembler » en fin d'étape. - fiche de travail **<u>Prégnance du contrat didactique pérenne</u> :** « expliquer la procédure de résolution » **<u>Procédures et connaissances des élèves repérées</u>** dessin / sur-comptage/ schéma / calcul réfléchi avec appui sur numération décimale **<u>Construction de la référence</u>** • appels à la mémoire didactique en début de séance lors de l'étape suivante	• Apartés avec élèves ou groupes d'élèves de plus en plus nombreux • Pratique ostensive assumée **<u>Milieu didactique</u>** • Écriture de la différence sous la forme a – b • Utilisation de la schématisation en « partie-tout » Tout a ? • calculatrice • Justification tardive de la stratégie des essais **<u>Ruptures du contrat didactique :</u>** « donner une réponse au hasard », « ça ne m'intéresse pas que vous trouviez du 1er coup » **<u>Procédures et connaissances des élèves repérées</u>** • Dessin /comptage/ schéma / essais successifs / calcul avec appui sur numération décimale • Erreurs « Smaller From Larger » et « Zero instead of Borrow » (Resnick et al., 1986) non pointées par ens. **<u>Construction de la référence</u>** • Institutionnalisation segmentée	- démarche maïeutique - Une étape de monstration assumée peu d'analyse et de formulation - Apartés avec élèves ou groupes d'élèves nombreux - Appel à des élèves chronogènes **<u>Milieu didactique</u>** • Utilisation systématique de la schématisation en « partie-tout » **<u>Procédures et connaissances des élèves repérées</u>** - Schéma/dessin - schématisation « partie-tout » - utilisation du système de numération décimale - décomposition / recomposition des nombres (Verschaffel et al., 2007) - méthode de la fausse position - recherche du complément **<u>Construction de la référence</u>** Pas d'institutionnalisation

Tableau de synthèse 4 : l'ingénierie didactique telle que mise en œuvre par Caroline

2.1.1. Proximité et distance de la mise en œuvre de Caroline à l'ingénierie

Comme Pascale et Valentine, Caroline reste proche de l'ingénierie didactique dans son déroulement. Toutefois, à la différence des premières, seules les troisième et cinquième étapes sont expansées. Conçue initialement en 5 séances, l'étape 3, plus technique comme nous l'avons vu car centrée sur le codage de l'opération, sur des procédures de calculs, sur des écritures additives et soustractives, est développée dans le site de Caroline en 7 séances (*cf.* section 1.1 du chapitre 2 des résultats). L'étape 5, quant à elle, fait l'objet d'une séance supplémentaire introduisant l'algorithme de la soustraction par cassage, écart à l'ingénierie didactique marquant une volonté d'infléchir la chronogenèse vers une procédure en usage habituellement dans sa pratique d'enseignement, et les usages professionnels d'enseignement de la soustraction en France.

Si l'ingénierie didactique broussaldienne est construite sur un entrelacement de phases d'action, de formulation, de validation, nous observons que Caroline ne privilégie dans un premier temps que les phases d'action et de formulation pour, ensuite, conduire les séances selon un contrat d'ostension assumée laissant peu de place aux phases didactiques telles que prévues dans l'ingénierie broussaldienne. Ainsi, lors de la première étape, elle laisse les élèves agir sur le milieu didactique de façon à ce que la dévolution du projet d'apprentissage relatif à la soustraction soit effective. Lors de l'étape 2, qui vise la construction de la preuve d'un résultat à un problème soustractif, et qui s'inscrit principalement dans des phases de formulation et de de validation, Caroline valide elle-même le gain ou la perte du pari (*cf.* section 3, réflexions conclusives du titre 4). Ce faisant, les phases initialement prévues s'en trouvent affaiblies. La mise en œuvre des quatrième et cinquième étapes par Caroline met en évidence une enseignante en position surplombante, dans une pratique particulièrement ostensive. Nous avons vu qu'elle utilise beaucoup de monstrations et valorise les exercices d'applications. Nous interprétons cette posture comme relevant de l'épistémologie pratique de l'enseignante. Rappelons qu'avant de mettre en place l'ingénierie, la classe était disposée non pas en « U » (dispositif favorisant les interactions entre les acteurs de la classe), mais selon un dispositif en « *autobus* »[107] qui donne le prima aux interactions enseignant-élèves (*cf.* section1.2 du titre 4). Lors de ces étapes, nos analyses ont montré Caroline se positionnant sur une pratique de transmission directe des savoirs.

[107] Ce dispositif est aussi nommé « en lignes ». Les tables des élèves sont agencées en lignes orientées vers le tableau et l'enseignant. Cette disposition pose implicitement l'enseignant comme le modèle à imiter.

Relativement aux enjeux visés par l'ingénierie didactique, Caroline maintient les intentions de l'ingénierie lors des étapes 1 et 2 vis-à-vis de la reconnaissance des problèmes soustractifs et des différents sens d'une différence. Les analyses des premières étapes montrent qu'elle perçoit de façon plus fine que les deux autres enseignantes, le statut d'apprêt didactique du pari qui constitue un moment crucial dans l'ingénierie. Ainsi, même en n'ayant retenu que certaines dimensions du pari, Caroline réussit à faire advenir la preuve d'un résultat dans le milieu didactique des élèves. (*cf.* section 2.2.2.2 du titre 4).

Caroline a manifesté à plusieurs reprises un certain assujettissement au texte de l'ingénierie (*cf.* section 2.2.2.2, titre 4), ce que nous avons interprété comme une volonté de suivre l'ingénierie comme un plan du cours, modalité de la pratique enseignante décrite dans la littérature comme caractéristique des enseignants débutants. Néanmoins, Caroline introduit de son propre chef dans le milieu didactique de cette deuxième étape une fiche de sa fabrication destinée à aider les élèves à différencier l'acte de prouver de l'acte de résoudre. (*cf.* section 2.2.2.1.3, titre 4). Nous avons interprété cette action mésogénétique ingénieuse comme l'indice d'une compréhension des enjeux épistémiques de cette étape.

Paradoxalement, les constats établis lors des étapes 4 et 5, montrent qu'elle s'éloigne de la logique épistémique de l'ingénierie. La preuve construite lors de la deuxième étape est utilisée dans l'étape 4 comme un outil permettant d'introduire de nouvelles techniques de résolution des problèmes proposés (la technique des essais successifs, par exemple). Caroline ne profite pas de ce moyen intellectuel pour élucider les erreurs de nature algorithmiques des élèves, ni même pour faire émerger la non commutativité de la soustraction, alors même que nous avons pu observer des niveaux de preuve (NP2, NP3, NP4, NP5) qui se manifestent dans les interactions entre élèves. Nos analyses montrent que si Caroline a une connaissance épistémique des savoirs en jeu dans l'ingénierie, elle n'accède pas pour autant aux soubassements didactiques de celle-ci. Caroline ne tient pas non plus les enjeux visés par l'ingénierie broussaldienne à l'étape 5. Alors que cette étape était initialement prévue comme une phase d'analyse et de formulation de procédures opératoires, cette enseignante en début de carrière bifurque vers un autre apprentissage : celui de l'algorithme de la soustraction par cassage. C'est parce qu'elle nous déclare ne pas saisir l'utilité de l'analyse de procédures des Schtroumpfs (*cf.* Séance 19 du titre 4), que nous avons pu confirmer notre interprétation des difficultés de Caroline à saisir les fonctions de certaines variables didactiques relativement au second enjeux central de l'ingénierie. Ici encore, l'hypothèse d'un entrelacs de processus épistémiques et institutionnels comme déterminant de la pratique enseignante semblent se confirmer. En effet, les textes institutionnels français (*cf.* section 2.3.1, chapitre 1 des résultats) mettent l'accent sur la résolution de problème et l'algorithme de la soustraction par cassage est préconisé en début d'apprentissage. Aussi, nous attribuons la conduite des étapes 4 et 5 par Caroline tout à la fois à un effet des textes institutionnels et à une mécompréhension des enjeux épistémiques de l'ingénierie broussaldienne.

Par ailleurs, il est à remarquer que, comme chez Pascale en Suisse, les séances dans ce site débutent souvent par un appel à la mémoire didactique mais se terminent de manière abrupte, sans institutionnalisation. Une explication réside dans les contraintes de l'école : Caroline finit les séances à midi, heure de fin de matinée scolaire, mais ce contexte temporel ne nous semble pas totalement rendre compte de la difficulté de Caroline à stabiliser la référence commune à la classe en fin du temps d'étude collectif.

D'un point de vue mésogénétique, nous avons constaté que l'usage du matériel {boite, cubes} disparaît lors de l'étape 4, ce qui témoigne chez les élèves d'un certain niveau de résolution et de vérification intellectuelle. Cependant un autre matériel prend place dans le milieu didactique de l'étape 5, afin, comme chez Valentine, d'illustrer l'algorithme de la soustraction par cassage. Il s'agit d'un écart au texte de l'ingénierie qui dévoile une mécompréhension de sa logique épistémique : comme pour Valentine, l'utilisation d'un matériel didactique donne à Caroline l'illusion (effet Diénès) de la construction d'un savoir mathématique, ici algorithmique.

Notons enfin un dernier écart dans la pratique de cette enseignante en début de carrière. Caroline dit, lors de la première étape, se rendre attentive à ne modifier les problèmes ni dans leur structure (au sens de Vergnaud, 1991), ni dans le vocabulaire utilisé. Elle fait en particulier attention à ne pas utiliser de mots inducteurs de l'opération, et laisse ainsi aux élèves la responsabilité d'enrichir eux-mêmes le milieu didactique. Pour autant, dès l'étape 2, nous l'avons vue transcrire au tableau les données essentielles des problèmes, gestes décrits et étudiés dans la littérature comme aidant à représentation mentales des situations (*cf.* section 2.2.1.2 de la revue de littérature). Nous avons considéré que sa pratique habituelle de gestion des situations de résolution de problème prend le pas sur la ressource didactique en ramenant cette enseignante sur une manière de faire éprouvée comme pertinente.

2.1.2. Observables au fil du déroulement de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique

Comme indiqué dans la dernière ligne du tableau de synthèse 3, nous avons pointé au fil de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique, que le topos de Caroline évolue d'une position basse à une position haute. Lors de la première étape, elle dévolue les situations en alternant recherche individuelle et débat collectif. Les élèves simulent les problèmes et enrichissent le milieu didactique de niveaux de preuve (NP0, NP1), ainsi que de termes propres à la soustraction. Lors de l'étape 2, nous avons vu Caroline enclencher un mouvement topogénétique relativement en surplomb ce qui a eu pour conséquence de court-circuiter les rétroactions du milieu didactique et ainsi amoindrir la dévolution de la preuve. Lors des étapes 4 et 5 suivantes, Caroline opte pour des positions topogénétique hautes, voire par moment, surplombantes, ce qui nous semble lié aux difficultés épistémiques rencontrées et le non-repérage des variables didactiques décisives concernant la construction d'un algorithme. La nécessité du maintien de la relation didactique au regard de cette incertitude épistémique l'amène selon nous à s'appuyer sur de nombreux effets de contrats (ostension, Topaze, Jourdain, etc.). Elle prend elle-même en charge la démarche par essais successifs (étape 4) ainsi que l'algorithme de l'addition lacunaire (étape 5). Dès que cela devient possible, elle appuie l'avancée du savoir en faisant appel très régulièrement à des élèves chronogènes.

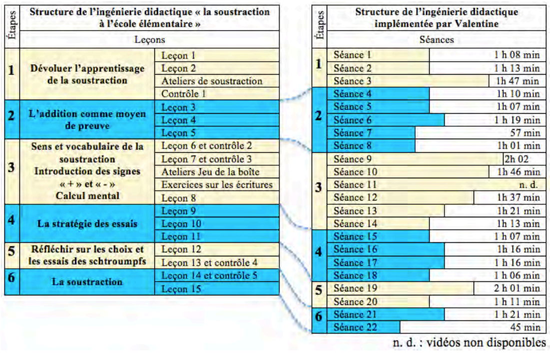
Sur le plan de la chronogenèse, nous avons noté quelques d'élèves s'appuyant encore sur un dessin, comptant sur leurs doigts, ou effectuant schématiquement une représentation des nombres (*cf.* tableaux 41 et 43, titre 4) ce qui laisse supposer que pour ces élèves le passage à un raisonnement abstrait n'a pas encore eu lieu. Néanmoins, dans les traces écrites des élèves, nous avons relevés, comme dans les autres sites observés, un certain nombre d'erreurs documentées dans les travaux de Resnick (1982). Pour autant, bien que les élèves aient introduit dans le milieu didactique des éléments lui permettant de les discuter (les niveaux de preuve notamment), Caroline n'est pas en mesure de les relever alors qu'ils auraient pu donner sens aux algorithmes opératoires ou encore pu mettre en exergue la non commutativité de la soustraction. Sur ce site aussi, la dimension épistémique de l'ingénierie « construire le sens la soustraction » n'est perçue qu'au travers de la résolution de problèmes soustractifs. Comme pour Valentine, nous attribuons ce constat au poids des pré-construits institutionnels français qui donnent la prééminence à la résolution de problèmes.

2.2. Éléments de généricités et de spécificités dans les mises en œuvre observées en France (Valentine et Caroline)

Dans cette section, comme nous l'avons fait pour Pascale et Valentine, nous nous intéressons d'abord aux variations temporelles à l'échelle macrodidactique, puis nous relevons, à la lumière des enjeux de savoirs visés par l'ingénierie didactique, les points communs et les différences au fil de ces mises en œuvre.

2.2.1. Variation temporelle à l'échelle macrodidactique des mises en œuvre

Site 1 : Valentine (France)



Site 3 : Caroline (France)

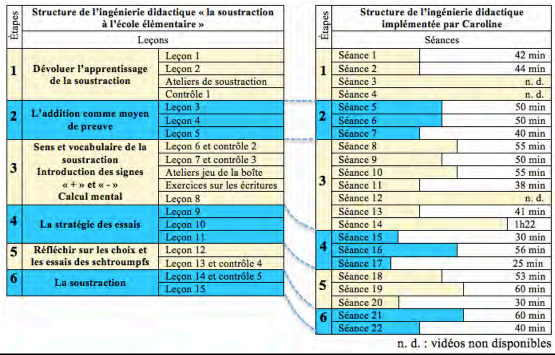


Tableau de comparaison 3 : structurations temporelles des mises en œuvre sur les sites de Valentine et Caroline

Comme développé dans le chapitre 2 des résultats, les deux mises en œuvre se différencient par la durée des séances sur chacun des sites ainsi que par les étapes expansées. Sur le site de Caroline, les durées des séances varient entre 25 minutes et 60 minutes à l'exception d'une séance de l'étape 3 ayant duré 1 heure 22 minutes, ce qui contraste avec celles de Valentine qui varient entre 57 minutes et 2 heures à l'exception d'une séance de l'étape 6 ayant duré 45 minutes. Par ailleurs, Valentine expanse les étapes 2, 3 et 4 alors que Caroline expanse principalement l'étape 3, celle du travail de la technique. Nous avançons l'idée que c'est l'expérience dans le métier qui explique ce contraste. Rappelons que Caroline s'est exclamée lors d'un entretien « *de toute façon, elle marche cette ingénierie !* » (*cf.* section 2.2.2.2, titre 4). Par ailleurs, nous avions relevé qu'elle utilise un fichier d'activités que nous qualifierons de « clé en main » (*cf.* section 1.2, titre 4). Ceci dénote, selon nous l'assujettissement d'une jeune enseignante aux documents ressources disponibles dans son environnement professionnel. Rappelons que Valentine, enseignante expérimentée, déclare lors des entretiens post séances avoir été étonnée par la longueur des leçons de l'ingénierie, dont elle s'autorise à s'autonomiser, comme décrit plus haut.

Relevons aussi que l'expansion de l'étape 2 chez Valentine prend sa source dans les difficultés qu'elle a rencontrées à faire émerger la preuve dans le milieu didactique, expansion que nous ne retrouvons pas dans le site de Caroline. Par contre, toutes les deux ont expansé l'étape 3, celle du travail de la technique, qui dans les deux sites français semblent le plus faciles à mener compte tenu de leur proximités avec des usages professionnels sédimentés dans le quotidien.

Comme nous l'avons fait précédemment, nous poursuivons la comparaison en recherchant les généricités et les spécificités du fonctionnement des systèmes didactiques des deux sites : d'abord du point de vue des usages que ces deux enseignantes françaises font de l'ingénierie et ensuite du point de vue de leur action conjointe avec les élèves.

2.2.2. Points communs observés dans l'implémentation de l'ingénierie par Valentine et Caroline

2.2.2.1. Concernant les généricités observées au regard des dimensions épistémiques principalement retenues

Trois points se dégagent concernant les généricités observées dans l'implémentation de l'ingénierie didactique sur chacun des sites (surlignés en vert dans le tableau ci-dessous) :

- l'articulation aux autres domaines mathématiques,
- l'émergence de procédures de résolution de problèmes soustractifs,
- la non exploitation de la preuve pour démêler les erreurs de nature algorithmique dans les calculs des élèves.

Site 1 : Valentine (France, enseignante chevronnée)			
		Dimensions épistémiques principalement retenues	**Traits saillants de l'action didactique conjointe professeur-élèves observée**
Étape 1	Résolution de problèmes soustractifs	• Alternance ind. /col • Dévolution partielle des situations de résolution de problèmes soustractifs • Vérification empirique NP0 ; NP1	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes} est un outil de simulation et de vérification. Topos du côté de l'enseignante : - situations jouées selon la vision de l'enseignante - l'enseignante pose dans le milieu didactique les connaissances numériques acquises auparavant. Chronogenèse : utilisation du nombre pour résoudre (peu de dessins, mais comptage sur les doigts)
Étape 2		• Alternance ind. /col • Résoudre des problèmes soustractifs • Pari, objet didactique non identifié par l'ens • Automatisation de la preuve par addition : NP2	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes}, reste présent tout au long de l'étape, davantage un outil de vérification que de simulation. Topos du côté de l'enseignante : pas de dévolution de la preuve Chronogenèse : tension entre « résoudre » et « vérifier » d'où une automatisation de la preuve Effets Topaze, trilogue, ostension, élèves chronogènes Contrat didactique pérenne vif, du côté des élèves
Étape 4		• Alternance ind. /col • schématisation en « partie-tout » • Écriture d'une différence sous forme soustractive Résolution par : • Essais → preuve → essais etc. • Ordre de grandeur (estimé) • réduction du nombre d'essais • Erreurs algorithmiques des élèves inexploitées • Niveaux de preuve : NP2, NP3, NP5	Mésogenèse : La preuve, élément principal du milieu didactique : outil pour chercher ; Le matériel reste prégnant : utilisé pour montrer poser les premiers jalons vers un algorithme de la soustraction (par cassage). schématisation en partie-tout Topos en surplomb pour l'utilisation de la preuve équilibré ensuite. Reprise du topos pour introduire l'algorithme de la soustraction par cassage. Chronogenèse : résolutions numériques Méthode « split » et « jump » Effets Topaze, trilogue, ostension
Étape 5		• Alternance ind. /col • Analyse de procédures : par comparaison aux procédures des élèves • Ordre de grandeur : NP3, NP4 • Méthode de la fausse position • Addition lacunaire	Mésogenèse : les procédures des Schtroumpfs Ajout mésogénétique introduit par un élève : l'algorithme de la soustraction par cassage → un nouvel apprentissage nécessaire Effets Topaze, ostension déguisée, élèves chronogènes Topos du côté des élèves. L'enseignante en réserve, amenant les élèves à comparer leurs procédures et celle des Schtroumpfs : phase de formulation importante : décrire, expliquer, comparer des procédures algorithmiques. Chronogenèse : une diversité de procédures. Erreurs de nature algorithme persistante. NP5

Site 2 : Caroline (France, enseignante en début de carrière)			
		Dimensions épistémiques principalement retenues	**Traits saillants de l'action didactique conjointe professeur-élèves observée**
Étape 1	Résolution de problèmes soustractifs	• Alternance ind. /col • Dévolution des situations de résolution de problèmes soustractifs • Vérification empirique NP0 ; NP1	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes} est un outil de simulation et de vérification. Topos du côté des élèves. L'ens. laisse les élèves prendre en charge la simulation des problèmes. Chronogenèse : dessin, comptage sur les doigts, utilisation du nombre : répertoire, bande numérique t
Étape 2		• Alternance ind. /col • Résoudre des problèmes soustractifs • Pari, apprêt didactique • Addition comme moyen de preuve d'un résultat à un problème soustractif : NP2	Mésogenèse : Le matériel {boite et cubes}, reste présent tout au long de l'étape, un outil de simulation et vérification. Le pari participe partiellement à la construction de la preuve. Fiche de travail fourni par ens. Topos équilibré: du côté des élèves sauf pour dévolution de la preuve. L'ens. ne laisse pas le milieu matériel rétroagir Appel à des élèves chronogènes, effets Jourdain et Topaze Chronogenèse : mettre ensemble →addition →preuve Prégnance du contrat didactique pérenne
Étape 4		• Consolidation de la preuve • schématisation en « partie-tout » • Écriture d'une différence sous forme soustractive • Résolution par (essais → preuve → essais etc.) • ordre de grandeur : NP4 • Erreurs algorithmiques des élèves inexploitées • Niveaux de preuve : NP2, NP3, NP4, NP5	Mésogenèse : disparition du matériel boite et cubes l'addition comme moyen de preuve, élément principal schématisation en partie-tout Calculatrice. Topos du côté de l'enseignante : Ostension assumée Apartés de plus en plus nombreux avec élèves ou groupes d'élèves / étayage important de l'ens. lors de la recherche individuelle Effets Topaze, Jourdain, ostension déguisée Chronogenèse : présence de dessins, comptage, schématisation en partie-tout, arbres de calcul ; techniques des essais dans les traces des élèves
Étape 5		• Analyse de procédures : démarche maïeutique puis abandon pour ostension • Ordre de grandeur : NP3, NP4 • Méthode de la fausse position • Addition lacunaire	Mésogenèse : les procédures des Schtroumpfs utilisation systématique de la schématisation en partie-tout. Introduction d'un matériel didactique de numération pour illustrer l'algorithme de la soustraction par cassage (Effet Diénès) Topos du côté de l'enseignante : démarche maïeutique puis ostensive. Nombreux apartés avec élèves. Appel à des élèves chronogènes. Effets Topaze, ostension déguisée. Chronogenèse : technique des essais, ordre de grandeur à la dizaine près, méthode de la fausse position, décomposition puis recomposition des nombres. Recherche d'un codage de l'algorithme de la soustraction par cassage

Tableau de comparaison 4 : mises en œuvre de l'ingénierie didactique par Valentine (France) et Caroline (France) [en vert : points communs ; en jaune : différences]

- L’articulation aux autres domaines mathématiques

Comme Pascale et Valentine, Caroline intercale entre les séances de l’ingénierie didactique des séances de mathématiques portant sur la numération. Pour ce faire, elle utilise le fichier de la classe et inscrit quotidiennement des séances de calcul mental afin de développer et/ou d’automatiser certaines procédures de calcul. Notons toutefois, que Caroline n’intègre pas de manière aussi importante que les deux autres enseignantes, l’ingénierie didactique dans sa progression en mathématique. Pour Caroline, il s’agit au travers d’activités d’accompagner et de consolider ses élèves en numération. Par ailleurs, nous avons vu que qu’elle a donné à la première séance de l’étape 4, une fonction de consolidation de la preuve n’envisageant pas de travailler la résolution par essais successifs sans que la preuve soit comprise de ses élèves. Rappelons que Caroline a aussi déclaré attribuer (les années précédentes) à la résolution de problème, un créneau particulier en fin de semaine, après l’acquisition de concepts mathématiques (*cf.* section 1.2, Titre 4, chapitre 2). Ce faisceau de constats renforce l’interprétation de l’influence de son épistémologie pratique, qui, selon nous, relève d’une vision cumulative des apprentissages, sur les modalités d’implémentation de l’ingénierie broussaldienne.

- L’émergence de procédures de résolution de problèmes soustractifs

Il ressort de la comparaison que les deux enseignantes françaises implémentent l’ingénierie broussaldienne de façon idoine en termes de procédures de résolution de problèmes soustractifs constitutives des milieux didactiques : recherche par ajouts ou retraits successifs (« *jump method* » ou « *split method* »), recherche d’un complément par utilisation de la preuve (essais successifs, méthode de la fausse position). Toutefois, nous avons vu que toutes deux ont anticipé l’introduction de l’algorithme de la soustraction par cassage en le simulant avec un matériel didactique, ce que nous avons interprété d’une part, comme une volonté d’avancée chronogénétique, d’autre part, comme un usage professionnel relevant d’un effet Diénès. Cette manière de faire, qui marque un écart avec l’esprit de l’ingénierie, leur permettant d’illustrer un algorithme de la soustraction s’inscrivant dans le droit fil de la construction du nombre, dont on a vu en chapitre 1 des résultats que cette construction est par ailleurs préconisée en début d’apprentissage de la soustraction dans les ressources institutionnelles françaises.

- La non exploitation de la preuve pour démêler les erreurs algorithmiques dans les calculs des élèves

Un dernier trait de généricité réside dans le fait que les deux enseignantes réussissent, selon des manières qui leur sont propres, à faire advenir dans le milieu didactique la preuve par addition d'un résultat à un problème soustractif, sans qu'aucune des deux ne l'exploitent pour débattre des erreurs algorithmiques des élèves. Comme nous l'avons déjà pointé, nous observons que les erreurs documentées dans les travaux de Resnick (1986) sont présentes dans les traces écrites ou orales des élèves, et ce pour chacun des trois sites. Nous avons aussi noté que les enseignantes avancent un argument quantitatif sur les chiffres de l'opération, argument lui aussi documenté dans la littérature scientifique (Maurel et al., 2010 ; Jonaert,1993 ; Nantais, 1991). Cette non exploitation de la preuve, alors même que les niveaux de preuve étaient présents dans chacun des sites, montre ici que la logique épistémique dans la construction de l'ingénierie didactique broussaldienne n'a pas été complètement saisie par les enseignantes. Ce constat se trouve renforcé par les discours institutionnels autour de la résolution de problème (au sens générique) qui tant en Suisse romande qu'en France a pu rendre peu visible cette dimension pourtant essentielle à la construction de l'objet mathématique soustraction et de son sens au cœur de l'ingénierie.

2.2.2.2. Concernant les généricités observées au regard des traits saillants de l'action didactique conjointe

D'un point de vue des genèses, la mise en regard des deux implémentations permet de faire apparaître des phénomènes identiques dans chacun des sites français (*cf.* les colonnes de droites du tableau de comparaison 4 ci-dessus). Tout d'abord, les élèves ont été confrontés à une rupture de contrat didactique lors de l'étape 2. Alors que le contrat en usage dans les classes les maintient dans « expliquer sa procédure de résolution », les enseignantes repoussent leurs explications, cherchant à les déplacer sur le terrain de la preuve. Comme nous le verrons dans l'analyse des spécificités (*cf.* 2.2.3.1, ci-après), chacune a géré suivant des modalités différentes la transition vers un nouveau contrat, notamment en usant d'effets Topaze, d'ostension suivie d'automatisation pour Valentine ou en introduisant un élément mésogénétique (une fiche de travail de sa propre fabrication) pour Caroline. Un autre fait remarquable réside dans l'introduction mésogénétique d'éléments orientant vers l'apprentissage de l'algorithme de la soustraction par cassage. Chez les deux enseignantes française cette évolution mésogénétique marque une volonté d'avancée chronogénétique ; elle documente aussi l'influence des préconisations officielles qui valorisent une illustration du fonctionnement de la soustraction, plus qu'ils ne soutiennent la construction du sens mathématique de cette opération. Enfin, l'analyse de l'action conjointe pointe chez Valentine comme chez Caroline des stratégies de régulations des apprentissages s'appuyant sur des techniques de trilogue, des conversations duales, apartés adressés à certains élèves, des aides individuelles, ou encore des modalités d'organisation leur permettant des temps dévolus au soutien de groupes d'élèves.

2.2.3. Spécificités observés dans l'implémentation de l'ingénierie par Valentine et Caroline

2.2.3.1. Concernant les spécificités observées au regard des dimensions épistémiques principalement retenues

Comme lors de la comparaison précédente, nous repérons les spécificités propres à chaque site pour identifier ce qui relève (ou non) des effets des pré-construits institutionnels français de ceux qui relèvent de l'épistémologie pratique chaque enseignante. Dans le tableau de comparaison 4, ci-dessus, ces éléments ont été surlignés en jaune.

- La disparition de l'alternance travail individuel et collectif dans le site de Caroline

Contrairement aux deux enseignantes chevronnées, Caroline ne maintient pas dans la seconde partie de mise en œuvre de l'ingénierie l'alternance entre moment de travail individuel et collectif. En effet, Caroline n'a pas tout d'abord rencontré de difficultés à entrer dans la modalité organisationnelle de l'ingénierie. Nous avons cependant observé qu'elle rompt avec cette manière de procéder dès les débuts de l'étape 4. L'alternance recherche individuelle/débat collectif, que nous relions, dans la comparaison des mises en œuvre de Pascale et de Valentine, à une manière habituelle de procéder en démarche de résolution de problème, disparaît progressivement au profit d'une démarche maïeutique, fortement ostensive, en surplomb. Nous avons déjà souligné que cette manière de faire peut être interprétée comme une solution permettant à Caroline de poursuivre le travail avec ses élèves dès lors qu'elle ne perçoit plus les fonctions didactiques des variables de situations des étapes 4 et 5. Le contrat didactique d'ostension qu'elle met alors systématiquement en œuvre (elle dévoile elle-même les procédures et algorithmes opératoires puis demande aux élèves de les appliquer en suivant un modèle dévoile une dimension de son épistémologie professionnelle relative à l'apprentissage. Ce ne sont même plus les traits de surface de l'ingénierie qui sont abordées lors du deuxième moment crucial de l'ingénierie (l'étape des essais et celle des procédures des Schtroumpfs). Ces constats suggèrent que lorsque les dimensions mathématiques des ressources didactiques ne sont pas intégrées, cette enseignante en début de carrière ne peut résoudre les difficultés de la relation didactique qu'en se rabattant sur une « contrat de reproduction formelle » au sens de Brousseau (1996) ; alors que les enseignantes chevronnées peuvent trouver des ressources dans leur expérience pour faire vivre aux élèves des expériences mathématiques, certes d'une épaisseur épistémiques plus faibles que celles prévues par l'ingénierie, mais leur permettent d'approcher le savoir algorithmique visé.

- Le pari : objet ludique chez Valentine, apprêt didactique chez Caroline

En ce qui concerne l'étape 2, les analyses ont montré que Valentine perçoit le pari comme un objet ludique, motivationnel. Si l'élève sur-compte les cubes sortis aux supposés restants dans la boite (*cf.* section 2.2.2.1.1, titre 3), nous avons vu que Valentine ne demande pas la confirmation du pari. En d'autres termes, Valentine ne dévolue pas la preuve. Alors que, pour sa part, Caroline poursuit la dévolution en redemandant à l'élève de confirmer son pari. Ce point souligne avons nous dit une certaine sensibilité épistémique à l'enjeu du pari. Pour autant, la dévolution n'est pas complète du fait que Caroline ne laisse pas le milieu didactique matériel rétroagir et indiquer le gain ou la perte du pari. Notre interprétation est de considérer que cette enseignante en début de carrière a bien saisi la dimension épistémique du pari, mais n'en a pas compris tout le soubassement didactique dans la construction de la preuve par addition. Néanmoins, alors que Valentine trouve une solution didactique dans l'automatisation de la preuve, Caroline cherche à lui donner sens au travers d'un élément mésogénétique (fiche de travail personnelle) dont nous avons pointé la pertinence dans une section précédente eu égard à la visée de la ressource didactique que constitue l'ingénierie.

- Des différences dans la perception du statut mathématique d'un algorithme

L'étape 5, visant à faire émerger des procédures algorithmiques, relève principalement d'une phase de formulation. L'analyse de cette étape illustre une dernière spécificité caractérisant les pratiques observées en montrant l'ingéniosité pragmatique avec laquelle Valentine amène les élèves sur un terrain inhabituel, celui de l'analyse. Nous considérons que dans cette étape, c'est toute l'expérience de l'enseignante chevronnée qui se donne à voir. Expérience dont ne bénéficie pas Caroline qui, parce qu'elle ne perçoit ni la logique mathématique ni l'intérêt de cette étape et bifurque sur un autre enjeu de savoir : appliquer l'algorithme de la soustraction par cassage de dizaine.

2.2.3.2. Concernant les spécificités observées au regard des traits saillants de l'action didactique conjointe

Comme pour la comparaison inter-systèmes éducatifs, ce qui ressort de manière forte est l'évolution des topos en sens contraire entre Valentine et Caroline.

Nous avons vu dans la comparaison précédente que Valentine évoluait au fil de l'implémentation d'une position topogénétique haute en début de mise œuvre à une position en retrait laissant davantage de responsabilités aux élèves. Nous avons attribué cette évolution à son expérience, et son épistémologie pratique qui lui permet de laisser les élèves produire des procédures de résolution originales, puis d'analyser des procédures proposées par l'ingénierie. Caroline, enseignante ayant moins d'expérience, a cependant une compréhension épistémique de l'ingénierie plus forte qui lui a permis de dévoluer les situations des étapes 1 et 2. Pour autant, ne percevant pas la logique architecturale des étapes de l'ingénierie portant sur la construction du sens de différents algorithmes de résolution de problèmes soustractifs, cette enseignante ne trouve d'autre solution pour maintenir la relation didactique que d'endosser une position topogénétique surplombante, selon une contrat de transmission de procédures, qui l'amène à gérer les séances suivantes en s'appuyant sur une pratique ostensive, sur des effets de contrats multiples (Jourdain, Topaze, ostension déguisée, etc..).

3. Discussion conclusive et retour sur deux moments cruciaux relatifs à la logique épistémique de l'ingénierie de la soustraction

La comparaison deux à deux du fonctionnement des systèmes didactiques observés en Suisse romande et en France met en évidence que pour des raisons propres à chacun des sites, les enseignantes ont des difficultés à faire vivre aux élèves les enjeux se savoirs décisifs qui sont au cœur de la logique épistémique et transpositive de l'ingénierie de la soustraction (établir la preuve d'un résultat ; construire le sens des différents algorithmes de soustraction).

Nous nous interrogions au début de cette recherche empirique sur les déterminants susceptibles d'influencer l'implémentation d'une ingénierie didactique élaborée au début des années 80 sur les pratiques didactiques actuelles (*cf.* chapitre 2, partie 1). Nous conjecturions à la suite de nombreux travaux en didactique des mathématiques et en didactique comparée, que les pré-construits institutionnels et culturels (notamment les textes des programmes suisse et français), ainsi que l'épistémologie pratique des professeurs jouaient un rôle dans l'interprétation de cette ressource didactique et seraient susceptible d'expliquer les adaptations et les écarts susceptibles de se produire.

Au fil des analyses (chapitre 2 des résultats) et des comparaisons que nous venons d'effectuer, nous avons pu montrer les effets entrelacés des déterminants institutionnels et de déterminants personnels qui relèvent de l'épistémologie propre à chaque enseignante observée. Les modalités de mises en œuvre décrites en termes d'idonéités ou d'écarts avec le texte de l'ingénierie peuvent être résumées de la façon suivante : Dans le cas suisse, elles sont davantage liées à l'influence des ressources (COROME) et des pré-construits institutionnels qui déterminent en partie l'action didactique conjointe (Ligozat, 2008 ; Ligozat & Leutenegger, 2015) ; dans les cas français, l'influence des textes officiels est plus diffuse mais renvoie pour les deux enseignantes d'expériences contrastées à leur assujettissement (ou non) à la doxa pédagogique de la résolution de problèmes comme forme d'apprentissage. Dans les trois cas, nous avons dégagé des données analysées que les difficultés les plus prégnantes dans l'implémentation de l'ingénierie de la soustraction relèvent de l'épistémologie pratique des enseignantes, c'est-à-dire leur compréhension fine, en actes, des soubassements didactiques de l'ingénierie ainsi que de certaines manière de faire pour guider les élèves dans leurs apprentissages mathématiques. Ces constats recoupent les résultats de recherches antérieures sur le rôle de l'épistémologie pratique des professeurs dans le façonnage de l'action didactique *in situ* dans d'autres disciplines (Amade-Escot, 2014 ; Amade-Escot, et al., 2009 ; Marlot & Toullec-Thery, 2014 ; Sensevy, 2007).

Nous avons pointé au niveau des deux plans de comparaison rapportés dans ce chapitre (inter-systèmes éducatifs et intra-système français) que c'est au niveau de ce que nous avons appelé des « moments cruciaux » que se situent les variations les plus importantes au texte de l'ingénierie et se cristallisent des difficultés d'enseignement. Aussi, pour conclure notre travail comparatif nous revenons sur quelques observables microdidactiques, qui dans nos études de cas, ont eu certes un statut indiciaire au sens développé par Ginzburg (2001) à propos de la micro-histoire, mais qui conformément à cet auteur permettent d'éclairer les raisons des bifurcations observées dans la chronogenèse des savoirs mis réellement à l'étude. Ces deux moments cruciaux relèvent de « L'addition comme moyen de preuve d'un résultat » (étape 2) et « La stratégie des essais » (étape 4) qui comme on l'a vu dans le chapitre 2 des résultats (titre 1) sont déterminants en ce qu'ils ont pour visée à partir de situations a-didactiques, de résoudre des problèmes aux fins de construire le sens des objets mathématiques visés par l'enseignement de la soustraction à l'école primaire (la preuve et les algorithmes)

3.1. La construction de la preuve

Le premier moment crucial, à l'étape 2, consiste à penser le pari comme la variable de commande de la situation (au sens de la TSD) pour établir la preuve par addition. Or, nos analyses ont pointé que seule Caroline en perçoit la valence épistémique et tente de maintenir la dévolution de ce pari, notamment en introduisant ingénieusement une fiche personnelle et ce, même si nous avons vu qu'elle n'en retient que certaines dimensions fonctionnelles. L'extrait microdidactique ci-après souligne sa posture dévoluante (nous soulignons quelques traits significatifs de ses énoncés) :

Caroline – S5 – min 9 :13

P : Là c'est pareil, excuse moi je te coupe, mais tu es en train d'expliquer comment tu as cherché la réponse, (gros soupir de Jonas), donc je répète moi <u>je veux savoir comment on fait pour vérifier sa réponse</u>, langue au chat ? (…)
P : donc Jonas il me dit il y en a 30, <u>Donc on va vérifier pour voir si</u> on tombe ..., si en ajoutant ceux-là, on arrive à 45. On fait ça ? (…)
P : Alors vas-y <u>je te laisse faire …</u> , non hep hep <u>interdit d'ouvrir, interdit d'ouvrir</u>. On dit qu'il y en a 30.Extrait 77 : Caroline – séance 5 – min 9 :13 (construction de la preuve)

Les enseignantes chevronnées, Pascale et Valentine, ne perçoivent pas, pour des raisons différentes, les nécessités du pari et de la situation a-didactique qui y est relative. Toutes deux ne saisissent ni son statut d'apprêt didactique pour préparer, faire émerger la preuve d'un résultat, ni la fonction didactique de cette variable de situation comme moyen d'accès à la définition mathématique d'une différence. Le pari reste soit un objet ludique ou motivationnel (Valentine), soit une incongruité (Pascale). Les extraits microdidactiques ci-après illustrent les difficultés qu'elles rencontrent, dans l'action, à le faire vivre. Les nombreux effets Topaze et leur position topogénétique haute illustrent leur mécompréhension de la fonction du pari.

(P sort un à un des cubes de la boite)
P : On a rajouté combien ?
E : 27.
P : On a rajouté 20 + les 7 ici. Donc j'ai rajouté combien ?
Thomas : 27.
P : A partir de combien ?
Thomas : 18.
P : Voilà, donc 18 + 27 ? Je retrouve... ?
Thomas : 45.
P : 45. Donc pour gagner mon pari, j'aurais dû dire quoi ? Marie-Laure ? Pour gagner mon pari, j'aurais dû dire... ?
Marie-Laure : 18

Extrait 78 : Pascale – Séance 6 – min 20 :42 (construction de la preuve)

P : chut (…) Maxine elle a dit qu'elle en avait 36 dans la boîte, on est bien d'accord ?
E : oui
P : bon alors Maxine tu vas compter à partir de ces 36 dans la boîte, et on va ajouter nos 18, d'accord ? Et en principe on devrait trouver combien en tout (*P montre le tableau*) ?
Léopold : 45

Extrait 79 : Valentine – séance 4 – min 17 :24 (construction de la preuve)

Dans ces deux extraits il n'y a pas dévolution du pari, c'est l'enseignante qui réduit l'incertitude en indiquant ou en montrant la solution. Les élèves de Pascale ne passent pas de la vérification empirique à la vérification intellectuelle ; cette dernière, chez Valentine relève d'une procédure automatisée, non construite par les élèves et de ce fait, probablement dénudée de sens. La conséquence est un effacement de la situation de validation

3.2. Les essais

Dans chacun des trois sites, les enseignantes se trouvent confrontées à des erreurs d'élèves de nature algorithmique. Par exemple lors d'une erreur de type 92 – 34 = 62 (type d'erreurs que nous avons observé dans les trois sites), les enseignantes réagissent toutes en plaçant 2 cubes dans leurs mains et en demandant aux élèves d'enlever 4 cubes. Ce faisant, en produisant un effet Diénès (Brousseau, 1986), elles pensent démontrer aux élèves que permuter les chiffres n'est pas possible. Elles privilégient un raisonnement quantitatif, comme le souligne l'usage du matériel exhibé aux élèves (quantité de cubes dans la main) alors que l'erreur est algorithmique. Cette façon de faire suggère l'existence d'un manque à savoir mathématique, qui maintient l'élève, lui aussi, dans ce type de raisonnement, à savoir que s'il doit enlever 4 cubes, comme il y en a que 2 dans la main, il ne restera rien. L'effet Diénes a pour conséquence non de faire saisir aux élèves quelle est l'erreur qu'ils produisent, mais de créer les conditions d'un autre type d'erreur : mettre le chiffre « zéro ».

Ces cas illustrent les difficultés d'implémentation rencontrées par les enseignantes lors des sauts informationnels constitutifs de ces deux étapes de l'ingénierie broussaldienne,, étapes construites sur une subtile dialectique du contrat et du milieu, dont plusieurs travaux en didactique des mathématiques ont montré la possible instabilité en raison de phénomènes de bifurcations potentielles et de dédoublement des situations (Grenier, 1998 ; Hersant, 2010; Perrin-Glorian & Hersant, 2003) . L'analyse épistémique que nous avons effectuée (titre 1, chapitre 2 des résultats) souligne que toute la robustesse de l'ingénierie de la soustraction est de construire la différence de deux nombres positifs sur sa définition mathématique : a – b est le nombre d tel que d + b = a (à savoir, en langage commun, d est le nombre que l'on doit rajouter au plus petit pour trouver le plus grand). C'est-à-dire la construction d'un des sens mathématiques de la différence, comme condition nécessaire pour permettre ensuite aux élèves de construire un raisonnement mathématique sur l'algorithmique. Relativement à l'erreur de type 92 – 34 = 62, si l'invalidation de l'erreur, conduite dans l'action conjointe, s'était adossée à la preuve par l'addition 4 + 2, les élèves auraient été confrontés au fait qu'on ne peut pas retrouver le chiffre 2 du nombre 92. Cette cécité des enseignantes au statut de la preuve les empêche de saisir la non commutativité inhérente à la soustraction.

Ce court exemple pointe ce que visait l'ingénierie et qu'aucune des trois enseignantes n'a réellement identifié : leurs usages professionnels les ont happées et remises dans les rails des préconisations institutionnelles.

Cette discussion, qui pourrait paraître pessimiste, nous amène dans la conclusion générale qui suit, à reprendre ces derniers éléments pour revenir d'une part, sur nos questions de recherche et parmi elles, celle, générique, des usages des ressources didactiques par les professeurs ; et d'autre part, sur l'intérêt que pourrait avoir une reprise des analyses à un niveau microdidactique notamment des séances relatives à ces deux moments cruciaux, comme perspective de recherche et aussi pour la formation des enseignants.

CONLUSION GÉNÉRALE

Nous souhaitons tout d'abord rappeler les questions de recherche à l'origine dans notre thèse. Il s'agissait de caractériser ce qui pouvait influencer la mise en œuvre d'une ingénierie didactique broussaldienne élaborée au COREM, portant sur l'introduction de la soustraction au primaire, dans les années 80 dans des classes actuelles en Suisse et en France. Après avoir mené une brève revue de littérature puis inscrit notre recherche dans le cadre théorique du comparatisme et de l'action conjointe en didactique, nous avions formulé cinq questions de recherche : (i) comment les enseignantes mettent-elles en œuvre cette ingénierie ? (ii) quels sont les savoirs réellement co-construits par les acteurs du système didactique ? (iii) quels sont les traits génériques ou spécifiques des modifications et aménagements produits dans la mise en œuvre ? (iv) en quoi les pré-construits institutionnels et culturels sont-ils de possibles déterminants de la mise en œuvre observée ? (v) en quoi l'épistémologie pratique du professeur l'influence-t-elle ?

Pour traiter ces questions, nous avons mené une analyse qualitative de longue haleine de trois systèmes contrastés, soit du fait de leur appartenance à des systèmes éducatifs différents, soit du fait de l'expérience des enseignantes.

Chacun des systèmes a été analysé selon un même *modus operandi* : nous appuyant sur les outils de l'action conjointe (mésogenèse-topogenèse-chronogenèse), sur la dialectique du milieu et du contrat, nous avons dans un premier temps analysé chacune des séances, pour ensuite remonter à celle des étapes de façon à produire une interprétation macrodidactique de la dynamique qui préside, dans chacun des sites suisse et français, à l'implémentation de l'ingénierie broussaldienne. Ce *modus operandi* nous a permis de répondre aux deux premières questions, en mettant en évidence au fil du temps didactique, les formes variées des mises en œuvre, leur plus ou moins grande fidélité au texte de l'ingénierie, les adaptations et les modifications apportées en contexte, dans l'action conjointe, à la logique épistémique de cette ressource didactique.

L'articulation des différentes échelles d'analyse (méso et micro didactiques informant l'interprétation macrodidactique) a mis en évidence, dans chaque site, les influences respectives et combinées des orientations institutionnelles et de l'épistémologie pratique des professeurs sur les pratiques d'enseignement observées. Leur mise en comparaison soutient l'idée, déjà pointée dans d'autres travaux comparatistes (Ligozat, 2008 ; Ligozat & Leutenegger, 2015), d'un tissage de ces deux déterminants comme dimension générique présidant à l'interprétation des ressources curriculaires au niveau de la transposition didactique interne. Mais se dégagent aussi, de la comparaison des phénomènes didactiques constatés dans chaque site, des spécificités et des généricités sur lesquelles nous revenons ci-après, lesquelles apportent quelques éléments de réponses aux trois dernières questions.

- Au plan des savoirs co-construits et de la manière dont les enseignantes ont procédé

Les trois enseignantes ont travaillé le sens de la soustraction au travers de la résolution de problèmes soustractifs. Chacune y est parvenue selon ses propres moyens, avec des distorsions plus ou moins importantes au texte de l'ingénierie.

Pascale est restée dans un premier temps conforme aux objectifs de l'ingénierie didactique de la soustraction en laissant les élèves résoudre les problèmes mathématiques qui leur étaient proposés. Confrontés à ceux où on leur demandait de calculer un reste, un écart ou un complément (ou encore, l'opérateur permettant de passer d'un état à un autre), les élèves ont pu construire plusieurs sens de la soustraction. Nous avançons l'idée que Pascale a négocié, dans le cadre des pré-construits institutionnels de suisse romande auxquels elle s'assujettit, les injonctions qu'elle perçoit de l'ingénierie. Ce faisant, elle en fait un usage qui bifurque vers un autre enjeu, celui centré sur la résolution par retraits ou ajouts successifs, éludant ainsi les autres techniques proposées par l'ingénierie. Ainsi, la preuve par addition d'un résultat n'ayant pas pris place dans le milieu didactique, la technique des essais successifs, puis la méthode de la fausse position ne pouvaient émerger. N'apparaissant pas explicitement au programme de 4P[108], la construction des algorithmes opératoires de la soustraction et de l'addition lacunaire n'a pas eu lieu.

Valentine est restée proche des enjeux de l'ingénierie, dans la mesure où les élèves ont pu faire émerger les différents sens de la soustraction mais aussi donner du sens à différentes techniques de calcul numérique. Nous avons notamment pointé que l'enseignante avait (certes par automatisation) introduit l'addition comme un moyen de prouver une réponse à un problème soustractif. Cette façon de faire, à distance de l'ingénierie, a ensuite soutenu la

[108] Même si, elle aurait pu se saisir de l'ingénierie pour préparer ce qui est un enjeu des programmes de l'année suivante en 5P.

construction de techniques telles que la technique par essai/erreur, la méthode de la fausse position, puis l'algorithme de l'addition lacunaire. Néanmoins, la preuve n'a jamais été utilisée pour élucider les erreurs de nature algorithmique produites par les élèves et par conséquence n'a pas participé à la construction mathématique d'un algorithme. Valentine a privilégié le recours au matériel (cubes) pour illustrer et justifier l'algorithme qu'elle valorise (l'algorithme de la soustraction par cassage), qui devient ensuite l'objet d'un enseignement plus technicisé, conforme à un trait saillant de son épistémologie pratique relativement à l'enseignement des savoirs du domaine additif.

Caroline, quant à elle, est restée proche du texte de l'ingénierie sur le plan de la reconnaissance des problèmes soustractifs. Comme dans les sites de Pascale et Valentine, les élèves ont été confrontés, au travers des problèmes proposés par l'ingénierie, à différents sens de la soustraction. À la différence des autres sites, Caroline réussit à faire émerger dans le milieu didactique la preuve par addition et à lui donner sens. Pour autant, elle ne tire pas profit de ce point décisif appartenant à la logique épistémique de l'ingénierie pour faire émerger de nouvelles techniques de résolution. La technique des essais est introduite selon un contrat didactique d'ostension pleinement assumé, que ce soit pour la méthode de la fausse position, l'algorithme de l'addition lacunaire, puis l'algorithme de la soustraction par cassage, tous régulés dans les transactions à partir d'une position surplombante de cette enseignante. En d'autres termes, si Caroline garde une proximité avec l'ingénierie didactique sur le plan de la reconnaissance des problèmes soustractifs, des différents sens de la soustraction, de la preuve par addition, elle ne la maintient pas ensuite en ne retenant pas l'enjeu relatif à la construction de techniques opératoires ou d'un algorithme opératoire. Au regard de cette dynamique, qui se rigidifie en fin de mise en œuvre, nous avons considéré que Caroline est restée à la surface de l'ingénierie didactique pour des raisons qui nous semblent liées à des mécompréhensions des enjeux mathématiques sous-jacents, associés à une expérience trop récente dans le métier pour qu'elle puisse résoudre les incertitudes inhérentes à la régulation et aux interactions collectives qui en découlent (Mottier-Lopez, 2006, 2015).

- **Au plan du jeu entrelacé des déterminants de leur action en classe**

Un trait caractéristique aux trois systèmes relève de l'influence des textes officiels institutionnels : la résolution de problème (au sens générique) préside au fonctionnement de chacun. Pour autant, l'épistémologie pratique des enseignantes module chacune des mises en œuvre.

Dans la mise en œuvre de l'ingénierie par Pascale, c'est l'influence des pré-construits qui est première : l'algorithme de la soustraction n'étant pas au programme, elle valorise alors la résolution des problèmes par ajouts ou retrait successifs. Cependant, quelques traits de son épistémologie pratique influent aussi sur la chronogénèse du savoir relatif à la soustraction, notamment : l'articulation de l'ingénierie à la construction du nombre de façon à rendre les problèmes de l'ingénierie accessibles aux élèves, le débat collectif comme outil favorisant l'émergence d'un savoir, le prima d'une position topogénétique haute (ostension, effets topaze, etc.) dès lors qu'il s'agit d'accélérer la chronogenèse.

Sur les sites de Valentine et de Caroline, bien que les textes officiels restent influents au travers de la résolution de problème, c'est davantage l'épistémologie pratique des enseignantes qui détermine leur action. Valentine articule l'ingénierie didactique aux autres domaines mathématiques, organise les débats collectifs et encourage les interactions dans la classe pour faire émerger un savoir. Cependant, nos observations soutiennent l'idée que les difficultés à faire émerger la preuve, puis à l'utiliser pour donner sens à un algorithme opératoire, relèvent de son épistémologie pratique c'est-à-dire d'une mécompréhension des soubassements épistémiques de l'ingénierie didactique. Si Caroline a eu moins de difficultés à faire émerger la preuve, elle n'en a pas non plus saisi toutes les dimensions épistémiques, ce qui l'a conduite progressivement à opter pour une position topogénétique haute et à délaisser le débat collectif au profit d'une démarche ostensive (démarche caractéristique de ce que nous avons pu souvent observer dans notre activité de formatrice chez les enseignants débutants). Ainsi, Caroline maintient la relation didactique grâce aux pratiques ostensives : les techniques opératoires sont montrées par l'enseignante, les élèves n'ayant plus qu'à les reproduire selon une logique de restitution. La construction du sens des techniques opératoires s'en trouve alors amoindrie.

Dans les trois cas, il ressort que ce sont des difficultés de compréhension des soubassements épistémiques de l'ingénierie didactique qui restreignent la construction du sens de l'opération, mécompréhension qui se révèle lors des deux moments cruciaux de l'ingénierie « l'addition comme moyen de preuve » et « la stratégie des essais ».

Pour résumer les apports de cette recherche de thèse

Plusieurs travaux de recherche ont porté sur la comparaison du fonctionnement de systèmes didactiques appartenant à des systèmes éducatifs différents à partir de l'étude de l'action didactique conjointe dans des classes ordinaires (Forest, 2017 ; Ligozat, 2008). Dans ce même cadre théorique, d'autres travaux ont repris des ingénieries broussaldiennes dans une perspective d'analyse et de conduite du changement des pratiques didactiques au sein d'un environnement de formation collaboratif, appelé « ingénierie coopérative » (Joffredo-Le Brun, et al., 2017 ; Morellato, 2017 ; Sensevy et al., 2013 ; Quilio & Morellato, 2016). L'originalité de notre thèse réside dans le fait que nous comparons les mises en œuvre, dans des classes ordinaires, d'une ingénierie didactique - prévue originellement pour produire des phénomènes didactiques - selon une perspective comparable à celle mobilisée par Ligozat et Forest dans leurs thèses afin de produire des connaissances sur le fonctionnement de systèmes didactiques contrastés. Dans cette perspective, nous avons mobilisé l'ingénierie de la soustraction comme la composante expérimentale du design de notre recherche comparatiste afin de produire des phénomènes didactiques dans le but de saisir en quoi les dimensions institutionnelles (pré-construits curriculaires) et personnelles (épistémologies pratiques professionnelles) façonnent et orientent l'action du professeur en classe. Le choix des trois enseignantes participant à cette recherche relevait de ce projet, rendant ainsi possible l'observation de pratiques d'enseignement contrastées, soit du fait des systèmes éducatifs auxquelles elles appartiennent, soit du fait de l'expérience des enseignantes. Nous avons pu ainsi pointer, à partir d'analyses qualitatives et interprétatives sur une durée de plusieurs mois, les effets combinés de deux déterminants de l'action conjointe professeur-élèves dans l'enseignement de la soustraction au primaire. Ce trait de généricité - quels que soient les sites - doit cependant être assorti de considérations spécifiques, car l'entrelacement des déterminants que sont l'épistémologie pratique des professeurs et les pré-construits institutionnels se décline très singulièrement suivant les contextes observés comme nous l'avons résumé dans les paragraphes précédents de cette conclusion.

Au titre des apports de notre recherche doctorale, soulignons aussi que la comparaison effectuée dans le dernier chapitre des résultats met en évidence deux moments cruciaux de l'ingénierie : l'un se situe lors de la deuxième étape « l'addition comme moyen de preuve », l'autre lors de la quatrième étape « la stratégie des essais ». Ces deux moments mettent au jour que les difficultés d'implémentation sont moins déterminées par l'influence des préconstruits que par une nécessaire et subtile compréhension de la logique épistémique présidant à l'architecture de l'ingénierie didactique. Nos analyses discutent ainsi ce que nous considérons comme une des conditions de possibilité visant à faire vivre (et continuer à faire vivre) les situations didactiques robustes que sont les ingénieries broussaldiennes, élaborées dans les années 80, comme ressources didactiques pertinentes pour l'action des professeurs des écoles.

Comme évoqué dans la section problématique du chapitre 2 de la première partie du manuscrit, de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques (et dans d'autres didactiques disciplinaires) se sont interrogés, depuis les constats initiaux de difficultés de reproductibilité des situations didactiques (Artigue, 1986), sur les usages de ressources didactiques. Nos résultats confirment les très nombreux constats élaborés, sous couvert de différentes approches, par les didacticiens des mathématiques quant au rôle joué par les interprétations que font les enseignants des ressources officielles (Daina, 2013 ; Dorier & Garcia, 2013 ; Ligozat, 2008) ; des ressources logicielles en ligne (Gueudet, 2012 ; Gueudet & Trouche, 2009 ; Gueudet, Soury-Lavergne & Trouche, 2011) ou encore produites par la recherche didactique comme les ingénieries (Artigues, 1986 ; Hersant, 2009 ; Tempier, 2013) pour ne citer que quelques travaux sur ces trois types de ressources. Les auteurs pointent le rôle central des épistémologies professionnelles (Artigue, 1986, Brousseau, 1986, Clivaz, 2011, Hersant, 2009 ; Perrin-Glorian, 1993 ; Perrin-Glorian & Robert, 2005).

Pour notre part, nous faisons l'hypothèse de l'existence, dans **toute** ressource didactique, d'éléments cruciaux d'un point de vue épistémologique qui sont à identifier pour pouvoir comprendre la pratique d'enseignement dès lors que la ressource est mobilisée dans la classe. Nous postulons à la suite de notre enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction en Suisse et en France, que l'indentification de ces points cruciaux (notion candidate à être générique au-delà du domaine que nous avons exploré) doit passer par des analyses très fines de transactions didactiques, *in situ*, relativement aux façons de faire des professeurs aux prises avec la mise en œuvre des ressources disponibles, si l'on veut pour comprendre les difficultés rencontrées et éventuellement proposer des stratégies pour les dépasser.

Ce point nous amène à pointer les limites de notre travail avant d'en examiner quelles en sont les perspectives.

Comme pour toute étude de cas, une première limite réside dans la singularité des systèmes observés et du nombre de professeurs ayant participé à cette recherche dans les deux pays. On retrouve ici la question de la généralisation des constats établis et la nécessité de multiplier les études pour le faire. Pour autant, il nous semble que les récurrences observées au fil des trois cas, leur recoupement avec des constats établis sur la même ressource d'ingénierie didactique de la soustraction (Quilio, Assude & Mercier, 2011 ; Quilio, Morellato & Crumière, 2012), leur convergence avec les résultats de recherches en enseignement des mathématiques conduites sous d'autres cadres théoriques (*cf.* chapitre 1 revue de questions) sont des indices permettant de produire quelques assertions plus générales. Pour le dire autrement, nos résultats convergeant avec d'autres, participent à leur mesure à la production de connaissances sur l'enseignement des mathématiques au primaire.

Une deuxième limite de cette recherche de thèse, reste selon nous, la sous-exploitation des données microdidactiques dont nous disposons, notamment aux deux moments cruciaux identifiés lors des comparaisons développées en chapitre 3 des résultats. Nous pensons en effet que leur approfondissement permettrait d'asseoir de façon plus étayée les résultats produits et serait de nature à raffiner les interprétations des bifurcations observées. Cet approfondissement constitue une première perspective de recherche que nous souhaitons poursuivre dans la mesure où nous disposons d'un corpus de données conséquent pour le faire et ainsi poursuivre notre recherche.

Ce commentaire nous conduit à identifier une seconde perspective de travail articulant formation et recherche.

Perspectives pour la formation et pour la recherche

Notre travail de thèse pose la question des conditions nécessaires à l'implémentation d'une ingénierie didactique en terme de formation didactique des enseignants, de façon à ce que ces derniers aient connaissance des déterminants des situations de l'ingénierie à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique. Nos analyses ont montré que si les arrières plans mathématiques étaient présents, les déterminants liés aux concepts didactiques (le pari en tant qu'apprêt didactique, par exemple) n'étaient pas, ou mal, perçus des enseignantes. Cette question a été travaillée par d'autres chercheurs. Pour Hersant (2009), la question d'une « migration réussie » d'une ingénierie didactique nécessite d'une part de « se donner les moyens de préserver les enjeux de savoir de la situation lors de sa réalisation en classe » et d'autre part de « laisser des marges de manœuvre aux enseignants ». Pour autant, cette auteure pose la question de la forme que devrait prendre alors la communication d'une telle ingénierie. Tempier (2013), pour sa part, montre la nécessité d'accompagner les enseignants par une « présentation claire des objectifs », mais aussi par « des variantes des situations principales qui guident la progression », « d'exemples d'entrainement et d'évaluation », « d'aides pour l'institutionnalisation ». En d'autres termes, sans pour autant fournir un document clé en main, il conviendrait de procéder à des réécritures de l'ingénierie didactique qui, tout en préservant sa logique épistémique, permettrait à l'enseignant une meilleure compréhension de ses phases didactiques. C'est la perspective suivie, notamment par Quilio (2010), pour ce qui concerne l'ingénierie de la soustraction. Cet auteur a repris et densifié le texte de Berté (1996) pour, dans les recherches d'ingénieries coopératives qu'il conduit avec d'autres chercheurs, le mettre à disposition des enseignants (comme cela a été le cas dans le site suisse[109]).

Cette piste est sans nul doute féconde, mais pour notre part, dans la recherche collaborative que nous continuons à mener avec 5 enseignantes (recherche-formation financée par l'ESPE de Midi-Pyrénées et la SFR AEF[110]), nous retenons une autre perspective d'accompagnement, consistant à conduire les analyses conjointement avec les enseignantes à partir d'extrait d'interactions en classe et de l'exploitation de données vidéo de leur pratique, afin de discuter avec elles des ruptures, des bifurcations qu'elles introduisent à leur insu dans leurs mises en œuvre.

Les données de cette recherche collaborative n'ont pas été toutes utilisées dans cette thèse comme nous l'avons indiqué, puisque seules celles concernant la première mise en œuvre de l'ingénierie ont fait l'objet d'analyses. Nous disposons toutefois, à propos de la réitération de deux mises en œuvre supplémentaires, de matériaux exploitables en termes d'effets de la recherche collaborative sur les pratiques enseignantes. La seconde perspective de recherche que nous envisageons est d'exploiter ces matériaux. Le point de vue alors pris relèvera d'une analyse des effets des collaborations, non pas selon une approche descendante comme examinée dans certains travaux en théorie anthropologique du didactique et dans la double approche, mais en nous appuyant sur les apports d'une analyse ascendante des phénomènes transpositifs tels qu'observés en classe (comme a pu le défendre Amade-Escot, 2013).

Cette perspective, qui rejoint les préoccupations professionnelles exposées en introduction de ce manuscrit, nous paraît aussi pertinente en formation initiale des professeurs d'École, dès lors que l'on souhaite développer avec eux l'usage de ressources didactiques

[109] Rappelons que les données relatives à ce site nous ont été confiées par Francia Leutenegger, sur la base d'un recueil préalable à celui effectué en France, dans le cadre de collaborations avec Serge Quilio.
[110] Voir à ce propos l'introduction à ce manuscrit de thèse et la section méthode (chapitre 3 de la première partie)

s’attaquant aux difficultés récurrentes de construction du sens et des fonctions des savoirs mathématiques par les élèves. Difficultés à propos desquelles cette thèse a montré combien l’enchevêtrement de dimensions institutionnelles et personnelles renforce les problèmes épistémiques rencontrés par les professeurs dans leur travail quotidien relativement aux enjeux mathématiques des apprentissages visés.

C’est à ces orientations de recherche et de formation, que je souhaite dans l’avenir continuer à réfléchir.

Bibliographie

Amade-Escot, C. (2005). Milieu, dévolution, contrat. Regard de l'éducation physique. In M.H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (Eds), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, (p. 91-98), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Amade-Escot, C. (2007). *Le Didactique*. Paris: Éditions Revue EP.S.

Amade-Escot, C. (2013a). L'épistémologie pratique des professeurs et les recherches sur l'intervention. Perspectives pour de futurs dialogues. In B. Carnel & J. Moniotte (Eds), *Intervention, Recherche et Formation: quels enjeux, quelles transformations,* (p. 37-58). Actes du 7ème colloque international ARIS.

Amade-Escot, C. (2013b). Les recherches en didactique, les IUFM et le comparatisme en France. In J.-L. Dorier, F. Leutenegger, & B. Schneuwly (Éds.), *Didactiques en construction, construction de la didactique*, (p. 63-83) Bruxelles : De Boeck

Amade-Escot, C. (2014). De la nécessité d'une observation didactique pour accéder à l'épistémologie pratique des professeurs. *Recherches en éducation*, *19,* 18-29.

Amade-Escot, C., Amans-Passaga, C., & Montaud, D. (2009). Les savoirs mobilisés dans l'action didactique par les intervenants en activités physiques et sportives : un entrelacs de processus épistémiques et institutionnels. *Sciences de la Société*, *77*, 43-62.

Amade-Escot C., & Leutenegger, F. (2013, janvier). Actualité de la théorie de l'action conjointe en didactique : questions théoriques et méthodologiques. Conférence d'ouverture à la journée des jeunes chercheurs. 3ème Colloque de l'ARCD, Marseille 9-12 janvier.

Amade-Escot, C., & Leziart, Y. (1996). *Contribution à l'étude de la diffusion des produits d'ingénierie didactique auprès des praticiens : analyse de cas chez des enseignants d'éducation physique volontaires* (Rapport scientifique No. 30506). Paris: INRP.

Amade-Escot, C., & Venturini, P. (2008). *Analyse de situations didactiques: perspectives comparatistes*. Presses Univ. du Mirail.

Amade-Escot, C., & Venturini, P. (2009). Le milieu didactique: d'une étude empirique en contexte difficile à une réflexion sur le concept. *Éducation & didactique*, *3*(1), 7-43.

Arsac, G. (1992). L'évolution d'une théorie en didactique: l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 7-32.

Arsac, G., Tiberghien, A., & Develay, M. (1989). *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*. IREM de Lyon : Lyon.

Arsenault, C., & Lemoyne, G. (2000). Une introduction non classique aux algorithmes d'addition et de soustraction. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 269-296.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(1), 5-62.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 9*(3), 281-308.

Artigue, M. (1996). Ingénierie didactique. In *Didactique des mathématiques* (p. 243-274). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, *4*(5), 527-538

Ashcraft, M. H., & Fierman, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology*, *33*(2), 216-234.

Assude, T., & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy & A. Mercier (Eds) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, (p. 153-185). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Audigier, F. (1988). Didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences sociales : Propos introductifs. *Revue française de pédagogie*, *85*(1), 5-9.

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 321-343.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A.Dowker (Eds), *Studies in mathematical thinking and learning. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*, (p. 1-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Berent, R., & Packman, D. (1982). The use of mathematical structure by inner city children. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *4*(2), 5-13.

Baroody, A. J., Ginsburg, H. P., & Waxman, B. (1983). Children's Use of Mathematical Structure. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 156-168.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 2-9.

Barrouillet, P., Mignon, M., & Thevenot, C. (2008). Strategies in subtraction problem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *99*(4), 233-251.

Baruk, S. (2000). *L'âge du capitaine: de l'erreur en mathématiques*. Paris: Editions du Seuil.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1984a). La numération: les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, *33*, 5-31.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1984b). La numération: les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, *34*, 5-17.

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S., & Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. In A. Mercier, G. Lemoyne, A. Rouchier (Eds) *Le génie didactique* (p. 43-69). De Boeck Université.

Bergeaut, J.-F., Billy, C., Cailhol, M., Couderette, M., Danos, P., Delbreil-Deblaize, R., … Vaultrin-Pereira, M. (2017). *Mathématiques: écrit - admissibilité : professeur des écoles, concours 2018 : CRPE 2018. Tome 1 et 2.* Paris, Dunod

Berté, A. (1996). Soustraction à l'école élémentaire. Document rédigé à partir des préparations des professeurs et des chercheurs et des observations faites dans l'école.

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, *91*, 1-28.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage

Bilsky, L. H., & Judd, T. (1986). Sources of difficulty in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and nonretarded individuals. *American Journal of Mental Deficiency*.

Blanchard-Laville, C. (Éd.). (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques: analyse d'une séquence, « l'écriture des grands nombres »*. Paris: L'Harmattan.

Blanchard-Laville, C. (2000). De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue française de pédagogie*, *132*(1), 55-66.

Blanchard-Laville, C., Chevallard, Y., & Schubauer-Leoni, M. L. (1996). *Regards croisés sur le didactique : un colloque épistolaire*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éd.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 627-638

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method*. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.* Thèse de Doctorat, Paris 5.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-123.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascon, J. (2004). Inconpletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 205-250

Boule, F. (1997). *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3. Éléments pour une pedagogie du calcul mental*. Thèse de Doctorat, Université de Dijon.

Boutin, G. (1997). *L'entretien de recherche qualitatif*. Québec: Presse de l'université du Québec.

Bovet, V. (1978). *Recherche sur quelques déterminants linguistiques de la compréhension de problèmes mathématiques*. Neuchâtel: Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques.

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse de Doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.

Brissiaud, R. (1988). De l'âge du capitaine a l'âge du berger : Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2 ? *Revue française de pédagogie*, 82, 23-31.

Brissiaud, R. (1994). Teaching and development: Solving "missing addend" problems using subtraction. *European Journal of Psychology of Education*, *9*(4), 343-365.

Brousseau - 82-83 Les « effets » du « contrat didactique » Consulté à l'adresse http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/82-83-effet-de-contrat.pdf

Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue française de pédagogie, 45*(1), 129-139.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *41*, 177-182.

Brousseau, G. (1982). D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *In Actes de la 2ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 39-60). Olivet: IREM d'Orléans.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Illusions et réalités de la régulation d'un curriculum d'enseignement. Approche systémique du rôle des recherches dans la définition d'objectifs et de contenus de formation pré-professionnelle ou professionnelle des enseignants. In *Recherche Formation Terrain*. Sèvres.

Brousseau, G. (1989a). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In Nadine Bednarz & C. Garnier. (Éds.), *Construction des savoirs , Obstacles et Conflits* (p. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (1989b). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. In N. Bednarz & C. Garnier. (Éds.), *Construction des savoirs. Obstacle et* *conflits* (p. 277-285). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9/3*, 309-336.

Brousseau, G. (1992). *Éléments pour une ingénierie didactique*. Voies livres.

Brousseau, G. (1996). Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique. *In Actes de la VIII école et université d'été de didactique des mathématiques* (p. 16-28). Clermond-Ferrand..

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1999). *Le cas de Gaël revisité (1999-2009)*. Consulté à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620.

Brousseau, G. (2013). Introduction à l'Ingénierie Didactique. [Ressource électronique] http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf [Consulté 24 août 2015]

Brousseau, G., & Brousseau, N. (2006). *L'ingénierie didactique en mathématiques*. Séminaire présenté à séminaire, DAEST, Bordeaux.

Brown, A. L., & Kane, M. J. (1988). Preschool children can learn to transfer: Learning to learn and learning from example. *Cognitive Psychology*, *20*(4), 493-523.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive science*, *2*(2), 155-192.

Brown, J. S., & Van Lehn, K. (1980). Repair Theory: A Generative Theory of Bugs in Procedural Skills. *Cognitive Science*, *4*(4), 117-135.

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math-Ecole*, (141), 2-15.

Brun, J., & Conne, F. (1993). Calculs et erreurs systématiques. *Journal de l'enseignement primaire*, (43), 29-31.

Brun, J., Conne, F., Cordey, P. A., Leutenegger, F., Portugais, J., Floris, R., & Lemoyne, G. (1993). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Artigue et al. (Eds), (p. 203-209) Grenoble, La Pensée Sauvage Edition

Brun, J., Conne, F., Lemoyne, G., & Portugais, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahiers de la recherche en éducation*, *1*(1), 117-132.

Bruner, J. S. (1996). *The process of education* (Harvard University Press). Cambridge.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique. Des difficultés des élèves aux élèves en difficulté*. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté.

Butlen, D. (2008). *Le calcul mental entre sens et technique: recherches sur l'enseignement* *des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté.

Butlen, D., & Masselot, P. (2010). Dialectique entre sens et techniques : l'exemple du calcul mental. In J. L. Durpaire, M. Mégard, *Le nombre au cycle 2, ressources pour faire la classe*. Orléans: CRDP du centre.

Butlen, D., Masselot, P., & Pézard, M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation. *Recherche et Formation*, *44*, 45-61.

Butlen, D., & Pezard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habileté calculatoires et résolutions de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale, Revue de Recherche en Education*, *31*, 117-140.

Butlen, D., & Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N*, (79).

Carpenter, T. P. (1985). How children solve simple word problems. *Education and Urban Society*, *17*(4), 417-425.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 3-20.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics education*, 27-39.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Addition and subtraction : a cognitive perspective* (p. 9-24). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *The acquisition of mathematical concepts and processes*, (p. 7-44), New-york : Academic Press

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in Mathematics Education*, 179-202.

Charnay, R. (1992). Problème ouvert-problème pour chercher. *Grand N*, (51), 77-83.

Chemla, K., & Shuchun, G. (2004). *Les neuf chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris, Dunod

Chervel, A. (1988). L'histoire des disciplines scolaires. Réflexions sur un domaine de recherche. *Histoire de l'éducation*, *38*(1), 59-119.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique: deux études sur les notions de contrat et de situation*. IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In *La Transposition didactique à l'épreuve* (Vol. 1–1, p. 135-180). Grenoble: La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In *Actes de l'Université d'été de la Rochelle*, 91–118.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury et M. Caillot *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Paris: Fabert

Chevallard, Y. (2012). Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. Présenté à Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques, IFE - (ENS-Lyon).

Chevallard, Y. (2014). Des didactiques des disciplines scolaires à la didactique comme science anthropologique. *Education & didactique*, *8*(1), 35-43.

Chevallard, Y & Ladage, C. (2010). La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable. In Actes du colloque international « Éducation au développement durable et à la biodiversité » (p. 334-351) Digne les Bains.

Chevallard, Y., & Johsua, M.-A. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (2. éd). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Choquet, C. (2012). Problèmes ouverts en mathématiques au cycle 3 : une réponse à l'émancipation chez tous les élèves d'une même classe. In *Actes du Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation*. Rennes

Clanché, P., & Sarrazy, B. (2002). Approche anthropodidactique de l'enseignement d'une structure additive dans un cours préparatoire kanak. *Recherches en didactique des mathématiques*, *22*(1), 7-30.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de Doctorat, Université de Genève.

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 41-61.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, Mathematical Thinking, and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds.) *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (p. 91-119). New York: Oxford

University Press.

Colomb, J., Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., & Guillaume, J.-C. (2005a). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CE2*. Paris: Hatier.

Colomb, J., Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., & Guillaume, J.-C. (2005b). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes: cours élémentaire (première année)*. Paris: Hatier.

Conne, F. (1979). Pierre, Bertrand, Claude, Paul, Laurent, Michel et leurs billes. In J. Brun, F. Conne *Approches en psychopédagogie des mathématiques,* Cahier 12 (p. 25-84.) Université de Genève.

Conne, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *5*(3), 269-341.

Coppé, S., & Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, *69*, 53-62.

Coppé, S., & Houdement, C. (2009). Résolution de problèmes a l'école primaire française: perspectives curriculaire et didactique. In *Actes du 35ème Colloque de la COPIRELEM : « enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? »* (p. 48-71). ARPEME.

Coquin-Viennot, D. (2001). Problèmes arithmétiques verbaux à l'école : pourquoi les élèves ne répondent-ils pas à la question posée ? *Enfance*, *53*(2), 181-196.

Coquin-Viennot, D. (1998). *Production of story problems : Effect of the topical introduction on the invention of questions.* Paper presented at the Writing and Learning to Write at the dawn of the 21st Century, Poitiers

Couderette, M. (2012). *Analyse didactique de pratiques d'enseignement de l'algorithmique en classe de seconde en cours de mathématiques*. Mémoire de recherche de Master 2 : Toulouse.

Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde : une introduction curriculaire problématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *21*, 267-296.

Couderette, M., Marrou, V.,Constant, C., & Iches, A. (2014). Recherche collaborative :questions d'intégration d'une ingénierie didactique broussaldienne aux pratiques enseignantes. In *Actes du 41ème colloque COPIREM*

Crumière, A. (2017). Un phénomène d'écologie des organisations mathématiques lié à l'organisation de l'étude : le cas des probabilités. In *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (p. 785-802).

Cummins, D. D. (1991). Children's Interpretations of Arithmetic Word Problems. *Cognition and Instruction*, *8*(3), 261-289.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology*, *20*(4), 405-438.

Daina, A. (2013). *Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques / cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois*. Thèse de Doctorat : Université de Genève.

D'amore, B., & Sandri, P. (1998). Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante. *Scientia paedagogica experimentalis*, *35*(1), 55-94.

Darcos, X. (2007). Programme de travail et d'action de Xavier Darcos pour le 2e trimestre de l'année scolaire 2007-2008. (s. d.). Consulté 18 janvier 2016, à l'adresse http://www.education.gouv.fr/cid20632/programme-de-travail-et-d-action-de-xavier-darcos-pour-les-mois-a-venir.html

Darcos, X. (2008). Présentation des nouveaux programmes du primaire - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Consulté 6 août 2015, à l'adresse http://www.education.gouv.fr/cid21007/presentation-des-nouveaux-programmes-du-primaire.html

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M., & Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology*, *83*(1), 61.

De Blois, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et francophonie*, *25*(1), 102-120.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, *73*(6), 765.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for research in mathematics education*, 363-381.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representations and Solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*(4), 460-70.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology*, *82*(2), 359.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction*, *20*(3), 205-215.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L., & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, *27*(1), 33-64.

Devidal, M., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'année psychologique*, 9-31.

Donaldson, M. (1978). *Children's minds*. New-York: Norton.

Dorier, J.-L. (1997). Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - perspective théorique sur leurs interactions. Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

Dorier, J.-L. (2015). Dimension épistémologique de la didactique des mathématiques. In *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques.* Alger : L. Theis. Consulté à l'adresse https://archive-ouverte.unige.ch/unige:84382

Dorier, J.-L., & Garcia, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, *45*(6), 837-849.

Dorier, J.-L., Leutenegger, F., & Schneuwly, B. (Éds.). (2013). *Didactique en construction, constructions des didactiques*. Bruxelles: de Boeck.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Thèse de doctorat : Université paris VII. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM, 15*, 37-61.

Douady, R. (1996). Didactiques des Mathématiques. Consulté 19 octobre 2016, à l'adresse https://www-universalis--edu-com.nomade.univ-tlse2.fr/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/

Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un Processus D'apprentissage du Concept D'aire de Surface Plane: (A Learning Process for the Concept of Area of Plane Surfaces). *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387-424.

Douaire, J. (2006). *Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris 7.

Douaire, J., & Hubert, C. (1999). *Vrai ? Faux ? On en débat ! : de l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. ERMEL, INRP.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, p. 37-65).

Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématique. Apprendre-enseigner l'arithmétique simple.* Paris : Nathan, 19-69.

Escarabajal, M.-C. (1984). Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie* *française*, *29*, 247-252.

Escarabajal, M.-C. (1988). Schémas d’interprétation et résolution de problèmes arithmétiques. *Revue française de pédagogie*, 15-21.

Fayol, M. (1990). *L’enfant et le nombre*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Fayol, M. (1991). Du nombre à son utilisation: la résolution de problèmes additifs. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischers (Eds.), *Les chemins du nombre* (p. 259-270). Lille: Presses Universitaires de Lille.

Fayol, M., & Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l’enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, *1*(1), 41-58.

Fayol, M., Abdi, H., & Gombert, J.-E. (1987). Arithmetic problems formulation and working memory load. *Cognition and Instruction*, *4*(3), 187-202.

Fischer, J.-P. (1987). L’automatisation des calculs élémentaires à l’école. *Revue française de pédagogie*, *80*(1), 17-24.

Fluckiger, A. (2000). *Genèse expérimentale d’une notion mathématique: la notion de division comme modèle de connaissances numériques*. Thèse de doctorat, Université de Genève.

Flückiger, A. (2004). Analyse didactique et schème: une étude qui articule théorie des situations et théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 169-204.

Flückiger, A. (2005). Macro-Situation and Numerical Knowledge Building: The Role of Pupils’Didactic Memory in Classroom Interactions. *Educational Studies in Mathematics*, *1-3*(59), 59-84.

Forest, E. (2017). *Interroger les « manières d’enseigner » l’éducation physique en France à la lumière d’une comparaison France-Suède: Les usages didactiques de la démonstration dans les activités de production de forme*. Thèse de Doctorat en Sciences de l’Éducation, non publiée. Université de Toulouse.

Forget, A., & Schubauer-Leoni, M.-L. (2008). Inventer un code de désignation d’objets au début de la forme scolaire. Des productions personnelles à la convention collective. In *Processus interactionnels et situations éducatives* (p. 183-204). L.Filliettaz et M.L. Schubauer-Leoni. Louvain-la-Neuve, Belgique : De Boeck Supérieur.

Foucault, M. (1963). *Naissance de la clinique*. Paris : Presses Universitaires de France

Fuson, K. (1986). Roles of representation and verbalization in the teaching of multi-digit addition and subtraction. *European Journal of Psychology of education*, *1*(2), 35-56.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 67-81.

Fuson, K. C. (1985). Teaching an efficient method of addition. In *Annual Meeting of the*

American Educational Research Association, Chicago.

Fuson, K. C. (1992a). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, R. A. Hattrup (Eds) *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (p. 53-187). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.

Fuson, K. C. (1992b). Research on whole number addition and subtraction. In D.A. Grouws (Ed.) *Hnadbook of research on mathematical teaching and learning* (p. 243-275). New-York: Macmillan.

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 180-206.

Fuson, K. C., & Fuson, A. M. (1992). Instruction supporting children's counting on for addition and counting up for subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 72-78.

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1988). Subtracting by counting up: More evidence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 402-420.

Gagnebin, A., Guignard, N., & Jaquet, F. (1998). *Apprentissage et enseignement des mathématiques: commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel: COROME

Georget, J.-P. (2012). Communauté de pratiques et situations de recherche et de preuve entre pairs: deux perspectives d'émancipation pour les enseignants en classe de mathématiques ... et au-delà ! In *Actes du Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation*. Rennes. Consulté à l'adresse https://esup.espe-bretagne.fr/colloque_cread_2012/paper_submission/Hersant.pdf

Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *13*, 5-39.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education & didactique*, *9*(2), 51-72.

Ging, E., Sauthier, M.-H., & Stierli, E. (1998). *Livre du maitre. Méthodologie.* Mathématiques 2P Neuchâtel: Commission Romande des Moyens d'Enseignement.

Ginsburg, H. P & Russell, RL. (1982). The development of addition in contexts of culture, social class, and race. In T.P.Carpenter, J.M. Moser & T.A.Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (p. 191-210), Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Ginzburg, C. (2001). *À distance: neuf essais sur le point de vue en histoire*. Paris: Gallimard.

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, *78*, 31-53.

Gombert, J. E., & Fayol, M. (1988). Auto-contrôle par l'enfant de ses réalisations dans des tâches cognitives. *Revue française de pédagogie*, 47-59.

Gravier, S., Payan, C., & Colliard, M.-N. (2008) Maths à Modeler. Pavages par des dominos.*Grand N*, 82, 53-68.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, *22*(3), 170-218.

Grenier, D. (1998). Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques. In J. Brun, F. Conne, R. Floris, et M.L. Schubauer-Leoni (Eds.).*Interactions didactiques, méthodes d'étude du travail de l'enseignant* (p. 123-146). Genève

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. In *Cahiers du Séminaire National de Didactique des Mathématiques* 189-203.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological review*, *79*(4), 329.

Guedj, D., & Truffault, P. (1996). *L'empire des nombres*. Paris : Gallimard.

Gueudet, G. (2012). Ressources et documents dans l'enseignement : le cas des mathématiques. [Ressource électronique] https://halshs.archives-ouvertes.fr/sic_01476966/document [Consulté 24 juin 2017]

Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., & Trouche, L. (2011). Les TICE à l'école primaire, virtualités, réalisations et conditions, Dossier l'Ecole numérique. *L'École Aujourd'hui*, 20-21.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques? In I. Bloch. et F. Conne (Éd.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 109-133). La Pensée Sauvage. Consulté à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459440

Halté, J.-F. (1998). L'espace didactique et la transposition. *Pratiques: théorie, pratique, pédagogie*, (97), 171-192.

Hersant M. (2006) Des problèmes pour chercher à l'école primaire. IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes.

Hersant, M. (2008). Problèmes pour chercher: des conduites de classes spécifiques. *Grand N*, *81*, 57-75.

Hersant, M. (2009). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants des situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. In *En amont et en* *aval des ingénieries didactiques*. Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage.

Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse des séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires.* Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches : Université de Nantes.

Hersant, M. (2012). Conditions d'une émancipation à travers la résolution de problèmes ouverts en mathématiques à l'école élémentaire. In *Actes du Colloque international Formes d'éducation et processus d'émancipation*. Rennes

Hirst, P. H., & Peters, R. S. (1970). *The Logic of Education* Londres: RoutLedge Library Editions

Hitt, F. (2006). Apprentissage en collaboration, débat scientifique et auto-réflexion (ACODESA). *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (p. 121-126.)

Hitt, F., & Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes: le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques,* 117-123

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*.

Huberman, A. M., & Miles, M. B. (1991). *Analyse des données qualitatives: recueil de nouvelles méthodes*. Bruxelles: De Boeck Supérieur.

Huberman, M. (1989). *La Vie des enseignants : Évolution et bilan d'une profession*. Paris: Delachaux & Niestle.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child development*, 84-90.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres: l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris : Robert Laffont.

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G., & Quilio, S. (2017). Cooperative Engineering as a Joint Action. *European Educational Research Journal*.

Johsua. (2002). Spécificités disciplinaires, spécificités didactiques : vers une didactique comparée. In P. Venturini, C. Amade-Escot, A. Terrisse (Eds). *Étude des pratiques effectives : l'approche didactique* (p. 256). Grenoble: La pensée sauvage

Johsua, S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques. In C. Raisky, M. Caillot (Eds), *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs,* (p. 61-73). Bruxelles: De Boëck.

Johsua, S. (1997). Le concept de transposition didactique au-delà de la didactique des sciences et des mathématiques. *Skholê*, *6*, 15–23.

Johsua, S. (1998). Des savoirs et de leur étude : vers un cadre de réflexion pour l'approche didactique. *Année de la Recherche en éducation*, 79–97.

Jucquois, G., & Vielle, C. (Éds.). (2000). *Le comparatisme dans les sciences de l'homme: approches pluridisciplinaires*. Bruxelles: De Boeck Université.

Kieras, D. E. (1980). Initial mention as a signal to thematic content in technical passages. *Memory & Cognition*, *8*(4), 345-353.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from. *Cognitive science and mathematics education*, 123-147.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-464.

Lemaitre, Y. (1985). Les systèmes de numération en Polynésie orientale. *Journal de la Société des océanistes*, *41*(80), 3-13.

Lemoyne, G. (1993). La quête du sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. In Philippe Jonnaert et Yves Lenoir (Eds.) *Sens des didactiques et didactique du sens* (p. 263-287). Sherbrooke : Edition du CRP

Lemoyne, G., Vincent, S., Brun, J., Conne, F., & Portugais, J. (1993). Addition, addition répétée, multiplication : un trajet éclairé par les schèmes d'action. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* (p. 236-242). Grenoble :La Pensée Sauvage

Leonard, F., & Sackur, C. (1991). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2/3), 205-240.

Leutenegger, F. (2003). Étude des interactions didactiques en classe de mathématiques: un prototype méthodologique. *Bulletin de psychologie*, vol. 56, n° 466, 556-571.

Leutenegger, F. (2004). Indices et signes cliniques : le point de vue de l'observateur. In *Situation éducative et significations* (p. 271-300). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.

Leutenegger, F. (2008). L'entrée dans un code écrit à l'école enfantine et l'articulation entre le collectif et l'individuel : comparaison de deux études de cas. *Éducation et didactique*, *2*(2), 7-42.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire: approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathematique*. Bern: Lang, Peter,

Leutenegger, F., & Ligozat, F. (2010). Le jeu du trésor dans le contexte genevois: gestion individuelle et collective d'une phase clé de la situation. In Mottier Lopez, L., Martinet, C. & Lussi-Borer,V. (Eds) *Actes du congrès AREF 2010*. Genève

Leutenegger, F., & Quilio, S. (2013). Hétérogénéité et attentes différentielles. Une approche de didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 35*(1), 147-165.

Ligozat, F. (2008). *Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques: étude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement/apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et suisse romandes*. Thèse de Doctorat, Université de Genève.

Ligozat, F. (2011). The Development of Comparative Didactics & Joint Action Theory in the Context of the French-speaking subject didactiques (p. 13-16). Présenté à European Conference on Educational Research, Berlin.

Ligozat, F. (2015). L'analyse didactique des pratiques de classe: outils et démarches d'identification des logiques d'action enseignantes en mathématiques. *Formation et pratiques d'enseignement en questions*, (18), 17-37.

Ligozat, F., Coquidé, M., & Sensevy, G. (Éd.). (2014). Didactiques et/ou didactique. D'une question polémique à la construction d'un espace de problématisation scientifique. *Education & didactique*, *8*(1).

Ligozat, F., & Leutenegger, F. (2008). Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe du professeur et des élèves. Le cas d'un problème d'agrandissement de distances. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(3), 319-378.

Ligozat, F., & Leutenegger, F. (2015). Teaching Resources in Early School Grades: A Comparative Approach to the Teacher's Interpretative Space in Three Subject Areas. *Interchange. A Quaterly Review of Education*, *46*(4), 1-23.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. In *ICME-13 Topical Surveys* (p. 1-50). Springer.

Liraud, F., & Roditi, E. (2016). Enseigner les mathématiques en RASED : effets différentiels d'un dispositif d'aide. *Recherches en Didactiques : Les Cahiers Théodile*, *22*, 65-84.

Majaj, M. (2011). *L'enseignement de l'arithmétique en France au collège et à la transition collège/lycée*. Thèse de doctorat : Université Claude Bernard-Lyon I.

Marlot, C., & Chabanne, J.-C. (2016). Didactique(s) : quel dialogue au sein des sciences de l'homme et de la société ? Une introduction. *Education & didactique*, *10*(3), 9-19.

Marlot, C., & Toullec-Théry, M. (2011). Caractérisation didactique des gestes de l'aide ordinaire à l'école élémentaire: une étude comparative de deux cas didactiques limite en mathématiques. *Éducation et didactique*, *5*(5.3), 7-32.

Marlot, C., & Toullec-Théry, M. (2014). Normes professionnelles et épistémologie pratique de l'enseignant: un point de vue didactique. *Revue canadienne de l'éducation (RCE) / Canadian Journal of Education (CJE)*, *37*(4), 1-32.

Marsenach, J. (1991). Quelques aspects du fonctionnement de l'enseignement de l'EPS. In J.

Marsenach et al. *EPS: Quel enseignement* (p. 33-58). Paris: INRP

Martinand, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière: des objectifs pour l'initiation aux sciences et techniques*. Berne ; New York: P. Lang.

Martinand, J.-L. (2001). Pratiques de référence et problématique de la référence curriculaire. *Didactique des disciplines. Les références au savoir*, 17–24.

Martinand, J.-L. (2014). Point de vue V – Didactique des sciences et techniques, didactique du curriculum. *Education & didactique*, *8*(1), 65-76.

Maurel, M., Sackur, C., Drouhard, J.-P., Perriollat, O., & Ciaravola, F. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, (85), 43-59.

Mead, G. H., Cefaï, D., & Quéré, L. (2006). *L'esprit, le soi et la société*. PUF.

MEN. (2005). *Les problèmes pour chercher.* Scéren CNDP.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M. L., & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue française de pédagogie*, *141*(1), 5-16.

Ministère de l'éducation national. (2012). Présentation du socle commun (jusqu'à la rentrée 2016) - Textes de référence - Éduscol. Consulté 2 août 2015, à l'adresse http://eduscol.education.fr/cid54178/textes-de-reference.html

Ministère de l'Education Nationale. (2005). Loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'Ecole. BO n°18 du 5 mai 2005. Consulté 27 juillet 2015, à l'adresse http://www.education.gouv.fr/bo/2005/18/MENX0400282L.htm

Ministère de l'Education Nationale. (2006). Socle commun de connaissances et de compétences. Consulté 29 juillet 2015, à l'adresse http://www.education.gouv.fr/bo/2006/29/MENE0601554D.htm

Ministère de l'Education Nationale. (2008). Programmes d'enseignement de l'école primaire. Consulté à l'adresse ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2008/hs3/hs3.pdf

Ministère de l'Education Nationale. (2010). Le nombre au cycle 2 - Ressources pour faire la classe - Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf. CNDP.

Morales-Ibarra, G., & Bueno-Ravel, L., (2012). Démarches d'investigation et modélisation en mathématiques en maternelle: l'exemple du jeu des trésors. *In Actes du colloque EMF, 2012,* (p. 1432-1444), Genève.

Morales, G., & Sensevy, G. (2013). La sémiose d'autrui dans la TACD. Le cas du «jeu du trésor». In *Troisième colloque de l'ARCD, Savoirs, compétences: Approches comparatives de l'organisation des contenus et des formes de l'étude; variations et constantes disciplinaires, institutionnelles, culturelles*. Marseille.

Morellato, M. (2017). *Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective.* Thèse de Doctorat, Université de Bretagne occidentale - Brest.

Mottier Lopez, L. (2003). Les structures de participation de la microculture de classe dans une leçon de mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 25*(1), 161-184.

Mottier Lopez, L. (2006). L’interaction collective suite à des travaux de groupes en mathématiques: pour quelle participation réflexive des élèves ? *Formation et pratiques d’enseignement en question*, (3), 83-102.

Mottier Lopez, L. (2008). *Apprentissage situé: la microculture de classe en mathématiques* (Vol. 138).Berne : Peter Lang.

Mottier Lopez, L. (2015). Évaluation-régulation interactive : étude des structures de participation guidée entre enseignant et élèves dans le problème mathématique « Enclos de la chèvre ». *Mesure et évaluation en éducation*, *38*(1), 89-120

Mottier Lopez, L. M., & Allal, L. (2004). *Participer à des pratiques d’une communauté classe: un processus de construction de significations socialement reconnues et partagées*. Bruxelles : De Boeck Supérieur.

Moyens d’Enseignements Romands. (2012). Consulté 10 novembre 2014, à l’adresse http://www.plandetudes.ch/group/mer/menu-2

Nédelec-Trohel, I. (2008). *Élaboration et mise en œuvre d’une ingénierie didactique en mathématiques par un chercheur, un maître E et un maître ordinaire en regroupement d’adaptation et en classe de CE2 : analyses des transactions didactiques*. Thèse de Doctorat, Rennes 2.

Normandeau, M.-P. (2010). *Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l’enseignant débutant: une analyse didactique en termes de schèmes*. Thèse de Doctorat, Université de Montréal.

Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P.-J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School. In *ICME-13 Topical Surveys* (p. 1-50). Springer.

Paillé, P., & Mucchielli, A. (2016). *L’analyse qualitative en sciences humaines et sociales* (4e édition). Malakoff: Armand Colin.

Peltier-Barbier, M. (2004). *Dur d’enseigner en ZEP. Dur pour les élèves, dur pour les enseignants.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M. J. (1994b). Théorie des situations didactiques: naissance, développement et perspectives. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 97-147) Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994a). Sens , algorithmes et représentations symboliques. In *Mathématiques et Langages* (p. 33-58). Paris: Hachette.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l’enseignement des mathématiques dans les classes ‘faibles’. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13/1-2*, 5-118.

Perrin-Glorian, M. J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l’analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(2), 5-118.

Perrin-Glorian, M.-J., & Robert, A. (2005). Analyse didactique de séances de mathématiques au collège : pratiques d’enseignants et activités mathématiques. *Les Dossiers des Sciences de l’Education*, *14*, 95-110.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children’s use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 335-349.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). La psychologie de l’enfant.

Plan d’Etudes Romand. (s. d.). Consulté 10 novembre 2014, à l’adresse http://www.plandetudes.ch/per

Portugais, J. (1992). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas des erreurs de calculs*. Thèse de Doctorat, Université de Genève.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Bern, Suisse : Peter Lang

Pourtois, J.-P., & Desmet, H. (2007). *Épistémologie et instrumentation en sciences humaines* (3e édition). Wavre (Belgique): Mardaga.

Priolet, M. (2014). Enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l’école élémentaire: un cadre didactique basé sur une approche systémique. *Education & didactique*, *8*(2), 59-86.

Quilio, S. (2010). Soustraction à l’école élémentaire – Reprise du document de Berté « soustraction à l’école élémentaire » augmenté de commentaires et apports didactiques.

Quilio, S. (2016). La dimension collective dans la théorie des situations didactiques. In Y. Matheron et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (Vol. 1, p. 113-125). Grenoble: La Pensée Sauvage

Quilio, S., Assude, T., & Mercier, A. (2011). Obstacles dans l’implémentation d’une ingénierie didactique sur la soustraction. In *XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*.

Quilio, S., & Mercier, A. (2010). Une phase du jeu du trésor dans une zone de discrimination positive: La mise en œuvre d’un collectif de pensée en moyenne section de maternelle dans la réalisation d’un code pour la désignation d’une collection d’objets. In *Actes de Xème congrès international AREF*. Genève.

Quilio, S., & Morellato, M. (2016). La coopération entre professeurs et chercheurs pour la conception, la réalisation et l’observation d’un enseignement en mathématiques: une double interaction didactique? In Liggozat, F.; Charmillot, M. ; Muller, A (Eds) .*Le* *partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (Louvain-la-Neuve : de Boeck).

Quilio, S., Morellato, M., & Crumière, A. (2012). Obstacle à l'usage du nombre et à l'enquête sur ses propriétés dans l'implantation d'une ingénierie sur la soustraction. In Dorier J-L, Coutat S. (Eds) *Espace Mathématique Francophone 2012*.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.

Rauscher, J.-C. (2001). Une production écrite des élèves au service des apprentissages dans le domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives.*, *7*, 49-76.

Rauscher, J.-C. (2006). Écriture réflexive et activité mathématique: le cas de la résolution de problèmes de proportions. *Annales de didactique et de sciences cognitives.*, *11*, 75-102.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in subtraction. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction : a cognitive perspective* (p. 136-155). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates

Reusser, K. (1989). Textual and situational factors in solving mathematical word problems (Research Rep. No. 7). *Bern, Switzerland: University of Bern, Department of Educational Psychology*.

Reusser, K. (1990). From Text to Situation to Equation: Cognitive Simulation of Understanding and Solving Mathmematical Word Problems. In H.Mandl, E De Corte, N. Bennett, H.F. Friedrich (Eds), *Learning and instruction in an international context* (p. 478-498). New-York: Université de Berne.

Reuter, Y. (2014). Didactiques et disciplines : une relation structurelle. *Education & didactique*, *8*(1), 53-64.

Richard, J.-F. (1982). Mémoire et résolution de problèmes. *Revue française de pédagogie,* 9-17.

Richard, J.-F. (1984). La construction de la représentation du problème. *Psychologie française*, *29*, 226-230.

Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales*. Paris: Armand Colin.

Riley M. S. ; Greeno J. G. & Heller J. I. (1983). « Development of children's problem-solving ability in arithmetic ». In H. P. Ginsburg (éd.), *The development of mathematical thinking*. (p. 153-196) New York : Academic Press.

Robert, A. (2008). Le cadre général de nos recherches en didactiques des mathématiques. In F. Vanderbrouck (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* (p. 11-22). Toulouse: Octarès.

Robert, A., & Robinet, J. (1993). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2), 145-176.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of sciences, Mathematics and Technology Education, 2*(4), 505-528.

Roditi, É. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement : le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(2), 183-216.

Roditi, É. (2010). Le développement des pratiques enseignantesen mathématiques d'un professeur d'école : une étude sur 10 années d'exercice. In M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger (Eds) .*Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*.

Roditi, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*. Thèse de Doctorat, Université René Descartes - Paris V.

Roditi, E., & Trgalova, J. (2016). Collectifs de professeurs et de chercheurs. In *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (p. 183-202). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Salin, M. H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In G. Lemoyne, F. Conne (Eds). .*Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 327-352). Montréal: Presse Universitaire de Montréal,

Salin, M. H. (2002). Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur. In P. Venturini, C. Amade-Escot, A. Terrisse (Eds) *Études des pratiques effectives: l'approche des didactiques.* (p. 71-81). Grenoble: La Pensée Sauvage

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander et A. Tiberghien. (p. 57-102). Paris: Armand Colin.

Santini, J. (2009). *Caractérisation de l'élaboration conjointe de la compréhension conceptuelle et des performances associées. Volcans et séismes au Cours Moyen.* Thèse de Doctorat, Rennes 2.

Sarrazy, B. (1995). Note de synthèse [Le contrat didactique]. *Revue française de pédagogie, 112*(1), 85-118.

Sarrazy, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique: Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*. Thèse de Doctorat, Bordeaux.

Sarrazy, B. (1997). Sens et situations: Une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(2), 135-166.

Schubauer, M.-L., Leutenegger, F., Ligozat, F., & Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves: les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier (Ed.). *Agir ensemble. L'action didactique* *conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Rennes: Presses Universitaires

Schubauer-Leoni, M.L. (1998). Les sciences didactiques parmi les sciences de l'éducation : L'étude du projet scientifique de la didactique des mathématiques. Raisons Educatives, 1-2, 329-352.

Schubauer-Leoni, M. L. (2003). La fonction des dimensions langagières dans un ensemble de travaux sur le contrat didactique. Présenté à Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement, Bordeaux, France. Consulté à l'adresse : http://airdf.ouvaton.org/archives/bordeaux-2003/atel/i_atel_2.htm

Schubauer-Leoni, M. L. (2009). Les outils de la comparaison en éducation. In D. Groux, F. Chnane –Davin (Eds).*Méthodologie de la comparaison en éducation. Raisons, comparaisons, éducations* (p. 15-30). Paris: L'Harmattan

Schubauer-Leoni, M. L., & Leutenegger, F. (2002). *Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire*. De Boeck Supérieur.

Schubauer-Leoni, M. L., & Leutenegger, F. (2005). Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, *27*(3), 407–429.

Schubauer-Leoni, M., & Ntamakiliro, L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des Sciences de l'Education*, *20*(1), 87-113.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1997a). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique: Quel «cognitif»? *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(1), 7-27.

Schubauer-Leoni, M.-L. (1997b). Interactions didactiques et interactions sociales: quels phénomènes et quelles constructions conceptuelles. *Skholê, Cahiers de la recherche et du développement*, *7*, 102-134.

Schubauer-Leoni, M.-L., & Leutenegger, F. (2003). Didactique comparée. In D. Groux, S. Perez, L. Porcher, V.D Rust, N. (Eds.) *Dictionnaire d'éducation comparée* (p. 70-74). Paris: L'harmattan

Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., & Forget, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues au commencement de la forme scolaire : interrogations théoriques et épistémologiques. *Education & didactique*, *1/2*, 9-35.

Schwab, J. J. (1958). Inquiry and the reading process. *The Journal of General Education*, *11*(2), 72-82.

Schwab, J. J. (1964) Structure of the Disciplines : Meaning and Significances. In G. W. Ford, & L.Pugno (Eds) *The Structures of Knowledge an Curriculum* (p. 6-30). Chicago: Rand McNally.

Selter, C. (1998). Building on children's mathematics-A teaching experiment in grade three. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(1), 1-27.

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 145-173.

Sensevy, G. (1998a). *Institutions didactiques. Etude et autonomie à l'école élémentaire.* Paris: Presses universitaires de France.

Sensevy, G. (1998b). Un prototype d'ingénierie didactique : le Journal des Fractions. IREM de Rennes. Consulté à l'adresse http://www.numdam.org/article/PSMIR_1997-1998___3_45_0.pdf

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. In J.M. Baudouin, J. Friedrich, *Théories de l'action et éducation* (p. 203-224). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.

Sensevy, G. (2006). L'action didactique. Éléments de théorisation. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, *28*(2), 205-225.

Sensevy (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique In G. Sensevy & A. Mercier (Ed.). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Rennes: Presses Universitaires

Sensevy, G. (2009). Contenus de savoirs et gestes d'enseignement. Professeurs et Chercheurs : vers de nouveaux modes de coopération ? In J. Clanet (Ed.) *Recherche/formation des enseignants* (p. 127-142). Rennes : Presse Universitaire de Rennes

Sensevy, G. (2013). Filmer la pratique : un point de vue de la théorie de l'action conjointe en didactique. In A. Tiberghien & L. Veillard (Éd.), *ViSA : Instrumentation de la recherche en éducation*. Paris: Éditions de la Maison des sciences de l'homme. Consulté à l'adresse http://books.openedition.org/editionsmsh/1954

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM*, *45*(7), 1031-1043.

Sensevy, G., Ligozat, F., Leutenegger, F., & Mercier, A. (2005). The teacher's action, the researcher's conception in mathematics. In Bosch (éd.), *Actes CD-ROM du congrès européen sur l'enseignement des mathématiques CERME 4.* 17-21 février 2005

Sensevy, G., Maurice, J.-J., Clanet, J., & Murillo, A. (2008). La différenciation didactique passive : un essai de définition et d'illustration. *Les Dossiers des sciences de l'éducation*, *20*, 105-122.

Sensevy, G., & Mercier, A. (2007b). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.

Sensevy, G., Mercier, A., & Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20/3*(3), 263-304.

Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben « gelöst »?: das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht [pourquoi le problème du capitaine est-il résolu ? Compréhension et résolution de problèmes verbaux du point de vue de la psychologie cognitive.] *L'enseignement des mathématiques,* 38(5), 7-29

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational psychology*, *85*(1), 7.

Stern, E., & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, *7*(2), 259-268.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de Doctorat, Paris-Diderot - Paris VII.

Theis, L. (2003). *Les tribulations du signe "=" dans la moulinette de la bonne réponse [The trials and tribulations of the "=" sign in the mill of the correct answer]*. Thèse de Doctorat, Université de sherbrooke.

Theis, L. (2005). L'apprentissage du signe=: un obstacle cognitif important. *For the learning of Mathematics*, *25*(3), 7-12.

Theis, L., & Gagnon, N. (2013). *L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques: bases théoriques et réalisation pratique*. Presses Universitaires du Québec.

Thomas, Y. (2007). Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N*, *80*, 29-42.

Tochon, F. V. (1993). *L'enseignant expert*. Paris: Nathan Pédagogie.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 79-91.

Torbeyns, J., Peters, G., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2016). Children's understanding of the addition/subtraction complement principle. *British Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 382-396.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, *24*(4), 439-465.

Valentin, D., Charnay, R., Douaire, J., & Guillaune, J.-C. (1993). Quels problèmes pour quels apprentissages? Quelques exemples en mathématiques. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, *10*(1), 81-89.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Presses de l'Université de Montréal et de Boeck.

Van Lehn, K. (1990). *Mind bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge: MIT press.

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in*

Mathematics, 10(2), 263-274.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds) (p. 39-59). *Addition and subtraction : A cognitive perspective*.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française, 30*(3-4), 245-252.

Vergnaud, G. (1985). Qu'est-ce que le GRECO «Didactique" ? *Enfance*, *38*(2), 309-310.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble :La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10/2.3*, 133-170.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, 28-43.

Verret, M. (1975). *Le temps des études.* Paris : Honoré Champion

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). The inverse principle: Psychological, mathematical, and educational considerations. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 327-334.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (2005). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. de Corte, J. Grégoire, *Enseignement et apprentissage des mathématiques: Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 153-176). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (p. 557-628). New-York: Macmillan.

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present, and future,* 51-82.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, *24*(2), 16-27.

Vigour, C. (2005). *La comparaison dans les sciences sociales: pratiques et méthodes*. Paris: Découverte.

Wanlin, P. (2009). La pensée des enseignants lors de la planification de leur enseignement.

Revue française de pédagogie, (166), 89-128.

Weisser, M. (1999). Les problèmes d'arithmétique: traits de surface, modes de résolution et taux de réussite. *Revue des sciences de l'éducation*, *25*(2), 375-399.

Woods, S. S., Resnick, L. B., & Groen, G. J. (1975). An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction. *Journal of Educational Psychology*, *67*(1), 17.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école: Une étude de cas. *Éducation et didactique*, *6*(2), 65-88.

Table des matières

Tables des tableaux synoptiques des séances

Site "Pascale"

Site "Valentine"

Site "Caroline"

Table des tableaux de synthèse de mises en œuvre par étape

Site "Pascale"

Site "Valentine"

Site " Caroline"

Table des tableaux de synthèse des mises en œuvre de l'ingénierie didactique par chaque enseignante

Table des tableaux de comparaison des mises en œuvre de l'ingénierie didactique

Titre : ***Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques. Études de cas en Suisse et en France.***

Résumé : Cette thèse, au croisement de la didactique comparée et de la didactique des mathématiques, porte sur la mise en œuvre dans des classes ordinaires actuelles d'une ingénierie didactique broussaldienne élaborée dans les années 80. L'ingénierie concerne l'introduction de la soustraction à l'École primaire (7-8 ans). La recherche s'appuie sur des études de cas. Elle analyse, selon une approche comparative, le fonctionnement de trois systèmes didactiques contrastés par 1) leur appartenance à des systèmes éducatifs différents : l'un en France, l'autre en Suisse ; 2) l'expérience des enseignantes : chevronnées versus en début de carrière. L'enquête, qualitative, porte sur 52 séances de mathématiques et rend compte, a partir du modèle théorique de l'Action Conjointe en Didactique (ACD), de la co-construction *in situ* du savoir relatif à la soustraction via une analyse ascendante de la transposition didactique. L'articulation de différentes échelles d'analyse (mésodidactique et microdidactique documentant l'interprétation macrodidactique) met en évidence l'influence combinée des préconstruits institutionnels et de l'épistémologie pratique des professeurs sur les mises en œuvre observées. En cela, les résultats rejoignent ceux d'autres travaux comparatistes montrant un entrelacement de ces deux déterminants comme dimension générique présidant à l'interprétation de phénomènes didactiques. Par ailleurs, la recherche permet de mettre en évidence deux moments cruciaux dans l'architecture de l'ingénierie didactique. Ces deux moments mettent exergue la nécessité d'une compréhension fine par les enseignants des logiques épistémiques des ressources didactiques qu'ils utilisent dans leur classe.

Mots-clés : Ingénierie Didactique, Enseignement des mathématiques, Soustraction, École primaire, Action conjointe en didactique (ACD), Épistémologie pratique du professeur, Didactique comparée.

Title: ***Comparative inquiry on the implementation of an experimental design related to the teaching of subtraction in primary school (7-8 years old) in various didactical systems. Case studies in Switzerland and France.***

Abstract: This doctoral thesis, located at the crossing of comparative didactics and mathematic didactics aims at characterizing the implementation of an instructional design built in the 1980s in current regular classes. The instructional design concerns the introduction of subtraction in primary school (7-8 years old). The research is rooted in case studies, It carries out a comparative analysis of the functioning of three didactical systems which are contrasted by 1) their educational systems affiliation: Suiss and French; 2) the difference in teachers' experiences in teaching. The qualitative inquiry focuses on 52 lessons in mathematics. It is conducted against the background of the theoretical framework of Joint Action in Didactics (JAD) and it accounts for the *in situ* co-construction of the knowledge related to subtraction through a bottom up analysis of the didactic transposition. The articulation of various analytic scales (mesodidactic and microdidactic that document the macrodidactic interpretation) underlines the combined influence of curriculum orientations and teacher's practical epistemology on observed implementations. In that, the findings converge to other comparatist works showing the interweaving of these two determinants as a generic dimension affecting the interpretation of didactic phenomena. In addition, the research highlights two crucial stages in the organization of this instructional design, that underline the need for teacher's clear understanding of the epistemic logic of any didactical resources used in their class.

Keywords: Instructional Design, Mathematics Education, Subtraction, Primary school, Joint Action in Didactics (JAD), Teacher's Practical Epistemology, Comparative Didactics.