UNIVERSITÉ TOULOUSE Jean Jaurès | INSPÉ Institut national supérieur du professorat et de l'éducation | Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées

MASTER METIERS DE L'ÉDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA FORMATION	
Mention	**Parcours**
Master 2 MEEF	M2A
Site de formation :	INSPE Croix de Pierre Toulouse

MEMOIRE

La division posée à l'école, comparaison de plusieurs techniques opératoires enseignées en Europe.

Valérie Vincent

Directeur de mémoire	
Éric Laguerre, maître de conférences à l'université Toulouse II	
Membres du jury :	
- **Éric Laguerre**, maître de conférences - **Cédric Fruchon,** professeur agréé	
Remis le : **07/06/2020**	**Soutenu le :** **..../..../2020**

Année universitaire 2019-2020

Sommaire

I. Introduction

Alors que je marchais entre les rangées de tables de ma classe de *year 7* (classe de 6ème en Angleterre), je remarquai que mes élèves qui étaient en train de résoudre un problème, utilisaient une technique de division qui me semblait bien étrange.

En septembre 2014, je commençai une formation d'un an à Londres équivalente à l'année post CAPES de maths en France. Elle m'a permis d'obtenir le *QTS* (*Qualified Teacher Status*), nécessaire pour enseigner les mathématiques dans les collèges et les lycées anglais. Suite à cette année de formation, je travaillai dans un collège-lycée du nord de Londres et enseignai les mathématiques pendant 3 ans. Durant ces années passées en Angleterre j'ai pu observer beaucoup de similitudes avec les méthodes d'enseignement françaises, mais également des différences. Comparer avec ce que l'on connait est alors une évidence. Comme beaucoup de personnes découvrant des choses différentes de celles qu'ils connaissent, mes comparaisons étaient en général immédiates et tranchées : soit en faveur de la nouveauté anglaise, soit en faveur de mes bases françaises. Au fil du temps, mes critiques devenaient souvent plus modérées lorsque je comprenais le contexte plus large et l'histoire de l'enseignement dans chaque pays, parfois ma balance penchait dans l'autre direction. Bien que ces différences aient un sens, elles existent et je reste persuadée que chacun des pays a des méthodes, des outils, des façons de faire qui méritent d'être transmises et échangées. A l'époque de la mondialisation et d'internet il est aisé de partager notre expérience, nos réussites et nos échecs. Il me semble que nous devrions chercher à apprendre plus des autres et pour cela, avoir un regard plus objectif sur nos pratiques et celles des autres est nécessaire.

Mon regard lors de ma découverte de la technique de division anglaise, loin d'être objectif, a été celui de beaucoup d'êtres humains, rétifs face à quelque chose qu'ils ne connaissent pas. L'existence d'une autre technique enseignée dans un pays d'Europe au système et aux résultats proches des nôtres venait ébranler mon idée que les techniques opératoires qui m'avaient été enseignées étaient des bases solides, les plus efficaces et les meilleurs possibles. En effet elles avaient été enseignées en France ainsi depuis des générations. J’avais appris à faire les divisions avec la méthode de la potence, mes parents aussi et les divisions posées étaient toujours enseignées de cette manière. A mon sens, il ne pouvait donc pas logiquement exister une autre technique, ou alors elle était moins efficace, sinon son enseignement aurait forcément évolué. Mes collègues anglais avaient le même regard face à notre méthode de division de la potence : ils n’en n’avaient jamais entendu parler ! Cela m’a donc poussé à m’intéresser à la technique de division anglaise que nous appellerons ici la technique de l’arrêt de bus (*bus stop method*).

En apprenant et en utilisant cette technique, j’ai compris qu’elle ne différait en fait que très peu de la nôtre. En effet l’algorithme utilisé est le même, la différence provient du positionnement des nombres en jeu les uns par rapport aux autres. Ce changement qui peut sembler minime semblait cependant simplifier grandement le travail des élèves qui ne rechignaient pas à effectuer une division puisque cela leur semblait aussi simple que d’effectuer une soustraction ou une multiplication. Je ne retrouvais pas chez les élèves cette « résistance aux divisions » qu’il me semblait avoir connue lorsque j’étais moi-même enfant. En enseignant cette technique en Angleterre, il m’a semblé qu’elle avait pour bénéfice de *limiter le nombre d’erreurs* dues au mauvais placement des chiffres du quotient, d’autant plus lorsque le quotient et/ou le diviseur était décimal. De plus la méthode de l’arrêt de bus, était utilisée principalement dans sa version courte, sans soustractions intermédiaires. Je pensais que ce manque d’étapes écrites qui augmente le travail mental était un frein à l’utilisation de cette méthode par les élèves mais il semblait au contraire que cette vision dépouillée de la division leur paressait moins laborieuse et donc plus attractive que la version longue. Le *rapport des élèves aux divisions* semblait ainsi pouvoir être impacté par la présentation de celles-ci. Lors de mes années d’enseignement en Angleterre, j’ai également pu découvrir une autre technique de division, moins formelle que la méthode de la potence ou celle de l’arrêt de bus, que nous appellerons la méthode des quotients partiels (*chunking method*). Bien qu’elle paraissait être moins efficace que la méthode de l’arrêt de bus, celle-ci semblait permettre aux élèves de mieux comprendre leur calcul en *mettant du sens* sur la division.

Au travers de ce mémoire, je chercherai ainsi à étudier et à comparer trois techniques opératoires de division et leurs variantes afin de mieux comprendre leurs avantages et inconvénients et à vérifier ou réfuter les hypothèses que j'ai pu faire lors de mes années passées en Angleterre.

II. Problématique

La problématique sur laquelle je travaillerai au fil de mon mémoire est la suivante :

En quoi la présentation d'une technique opératoire de division peut-elle influer sur le rapport de l'élève à la division et sur la quantité et le type d'erreurs commises par les élèves ?

C'est au travers des questions suivantes que je répondrai à la problématique générale :

1) Les élèves ont-ils un rapport affectif positif/négatif avec les différentes techniques opératoires ? Pour quelles raisons ?
2) Quelles difficultés les élèves rencontrent-ils lorsqu'ils posent une division ? Ces difficultés sont-elles différentes selon la technique opératoire employée ?
3) Le choix d'une méthode ou l'autre a-t-il une influence sur la compréhension du sens de la division pour les élèves ?
4) Le type d'erreur est-il différent selon que l'on emploie une technique ou l'autre ?
5) La quantité d'erreurs varie-t-elle d'une technique opératoire à l'autre ?
6) Quels sont les avantages/inconvénients d'une technique par rapport à l'autre ?
7) La technique de division utilisée peut-elle servir de méthode de différenciation ? Autrement dit, les effets de la technique utilisée diffèrent-ils d'un groupe d'élèves à l'autre ? (Si on considère des groupes de niveau par exemple).

III. Cadre théorique

1. Tableau d'analyse des techniques opératoires : tâche, technique, technologie, théorie

Le tableau ci-dessous permet de comparer d'une manière générale les trois techniques opératoires principales que nous allons étudier dans le cadre de ce mémoire :

<table>
<tr><th></th><th>Technique de la potence</th><th>Technique de l'arrêt de bus</th><th>Technique des quotients partiels
Chunking method</th></tr>
<tr><td>Tâche
(t ∈ T)</td><td colspan="3">T : Diviser un dividende a ∈ $\mathbb{D}$+ par un diviseur b ∈ $\mathbb{Z}$ afin d'obtenir un quotient q ∈ $\mathbb{D}$+ (ou un quotient q ∈ $\mathbb{Z}$ et un reste r ∈ $\mathbb{Z}$ dans le cas de la division euclidienne, où a ∈ $\mathbb{Z}$ également)</td></tr>
<tr><td>Technique
(τ)</td><td colspan="2">L'algorithme de la division posée se fait à partir des chiffres du dividende a, en partant de la gauche vers la droite. Cet algorithme décompose la division principale en sous divisions. A chaque étape, on soustrait au(x) chiffre(s) du dividende le(s) plus à gauche le plus grand multiple possible du diviseur. Le nombre par lequel on a multiplié le diviseur pour obtenir ce multiple devient ainsi le chiffre du quotient le plus à gauche. La différence de la soustraction devient un reste intermédiaire qui, apposé au chiffre suivant du dividende, devient le nouveau dividende intermédiaire de la sous division suivante. On obtient ainsi successivement tous les chiffres du quotient. La différence finale est appelée le reste de la division. La division peut également être continuée côté décimal. Dans les versions courtes, les soustractions intermédiaires ne sont pas posées et seuls les restes intermédiaires sont écrits afin de former les dividendes intermédiaires.</td><td>La technique des quotients partiels repose sur des soustractions successives de multiples du diviseur à partir du dividende. Au départ on trouve un multiple du diviseur inférieur au dividende. On garde note du nombre par lequel le diviseur a été multiplié pour obtenir le multiple, on l'appellera quotient partiel. On soustrait ce multiple du diviseur au dividende et on obtient un reste. On répète ces opérations sur les restes successifs jusqu'à obtenir un reste inférieur au diviseur. On additionne alors les quotients partiels pour obtenir le quotient final.</td></tr>
<tr><td>Technologie
(θ)</td><td colspan="2">Les divisions intermédiaires à partir des chiffres du dividendes ne sont en fait que des divisions euclidiennes successives.
$a = bq + r \ avec \ 0 \leq r < b$</td><td>$a = bq + r \ avec \ 0 \leq r < b$
$a = r + \sum_{i=1}^{n} a_i \ avec \ a_i = q_i b$
$a - a_1 - a_2 - \cdots - a_n = r$</td></tr>
</table>

		$a - q_1b - q_2b - \cdots - q_nb = r$ $a - b(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) = r$ $or\ a - bq = r$ $donc\ q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$
Théorie (Θ)	La théorie de la division posée pour la méthode de la potence et de l'arrêt de bus est fondée sur la preuve de l'existence et de l'unicité du couple (q,r) dans le cas où (a, q, r) $\in \mathbb{Z}$. [1] Dans le cas où (a, q) $\in \mathbb{D}$+ c'est la justification du prolongement de la preuve précédente qui servira de théorie, on admet cette justification.	

Afin de mieux comprendre chacune des techniques qui sera étudiée dans le cadre de ce mémoire, on se basera sur l'exemple du calcul de 7214 : 4. Les étapes seront décrites simplement, telles qu'elles seraient expliquées en classe. Cela permettra d'être au plus proche des étapes effectuées par un élève lorsqu'il réalise une division. De plus, lors des étapes de division, on ne privilégiera pas un sens de la division plutôt qu'un autre (division partition ou division quotition). En effet, d'après le guide pédagogique *J'apprends les maths*[2], il est plus intéressant de proposer les deux visions de la division aux élèves c'est pourquoi les deux formulations seront inclues dans la présentation des techniques.

[1] *Voir l'annexe A : Théorie de la division euclidienne – Preuve de l'existence et de l'unicité du couple (q, r) $\in \mathbb{Z}$.*

[2] BRISSIAUD, Rémi. Enseigner la division euclidienne. J'apprends les maths. Guide pédagogique. Paris : Retz, 2017, chapitre 3, p. 27-37.

2. Description des différentes techniques étudiées

a. Technique opératoire de la potence

i. Organisation spatiale

Potence version longue

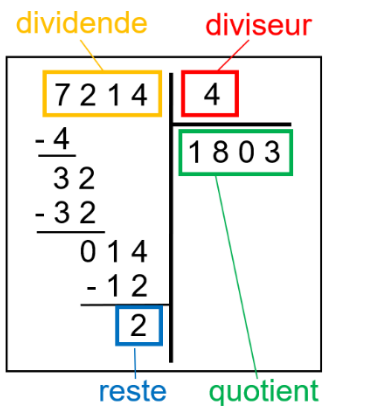


Figure III-1 - Technique opératoire de la potence version longue, avec les soustractions intermédiaires

Potence version courte

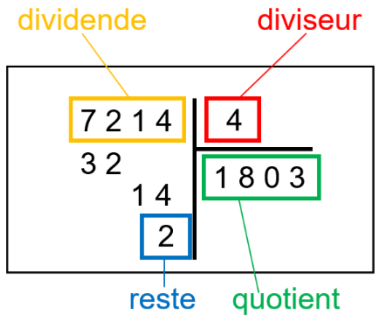


Figure III-2 - Technique opératoire de la potence version courte, sans poser les soustractions intermédiaires

ii. Etapes de la procédure de calcul

Afin d'effectuer la technique opératoire de la potence on suit les étapes suivantes :

A- Préparation de la division :

1) On **pose la division**, pour cela on trace la potence, on place le dividende en haut à gauche et le diviseur en haut à droite.
2) On cherche **l'ordre de grandeur** du résultat : « 7 milliers, c'est assez pour que chacune des 4 personnes ait au moins un millier, le quotient aura donc 4 chiffres » ou « 4 x 1000 < 7214 < 4 x 10000, le quotient aura donc 4 chiffres ». On écrit alors 4 points à l'emplacement du quotient, ou m, c, d, u (pour milliers, centaines, dizaines et unités) au-dessus des futurs chiffres du quotient.

B- Division

3) **Partage des milliers** : « 7 milliers partagés en 4, ça fait 1 millier pour chacun, et il en reste 3 » (division partition) ou « dans 7 milliers on peut mettre 4 milliers 1 fois, et il reste 3 milliers » (division quotition). On pose ou non la soustraction. « On écrit 1 sous le m de « millier » du quotient. »

4) **Partage des centaines** : « Je sépare les 3 milliers qu'il me reste en centaines, ça fait 30 centaines, si j'ajoute les 2 centaines que j'avais au début, ça fait 32 centaines. » Pour les voir facilement, on abaisse le 2. « 32 centaines partagées en 4, ça fait 8 centaines et il ne reste rien » (partition) ou « dans 32 centaines on peut mettre 4 centaines 8 fois et il ne reste rien » (quotition). On pose ou non la soustraction. « On met un 8 sous le c de « centaines » du quotient. »
5) **Partage des dizaines** : « Il ne reste plus de centaines, on abaisse le 1 des dizaines. On ne peut pas mettre 4 dizaines dans 1 dizaine » (quotition), ou « on ne pas partager 1 dizaine en 4 groupes » (partition). « On met un 0 sous le d de « dizaine » du quotient ».
6) **Partage des unités** : « Je sépare la dizaine qu'il me reste en unités, ça fait 10 unités, si j'ajoute les 4 unités que j'avais au début ça fait 14 unités. Pour les voir facilement, on abaisse le 4. 14 unités partagées en 4 groupes ça fait 3 unités par groupe et il en reste 2 » (partition) ou « dans 14 unités, je peux mettre 4 unités 3 fois et il reste 2 ». On pose ou non la soustraction. « On met un 3 sous le u de « unités » du quotient. »

C- <u>Expression du résultat et preuve</u>

7) **Expression du résultat** : « Quand je divise 7214 par 4 je trouve que le quotient c'est 1803 et le reste c'est 2, j'écris q = 1803 et r = 2. Ça veut dire que 7214 c'est la même chose que 4 fois 1803 plus 2. J'écris 7214 = (1803 x 4) + 2 ».
8) **Vérification** : « Je pose 1803 x 4, j'ajoute 2 au résultat. Je trouve bien 7214 ».

b. Technique opératoire de l’arrêt de bus

i. Organisation spatiale

Arrêt de bus version longue

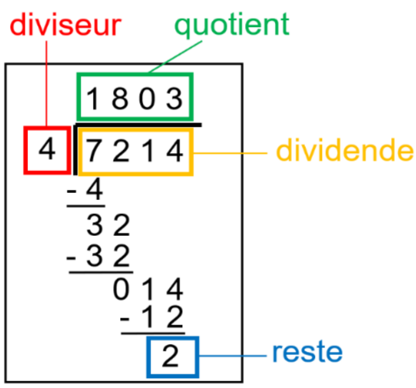


Figure III-3 - Technique opératoire de l’arrêt de bus version longue, avec les soustractions intermédiaires

Arrêt de bus version courte

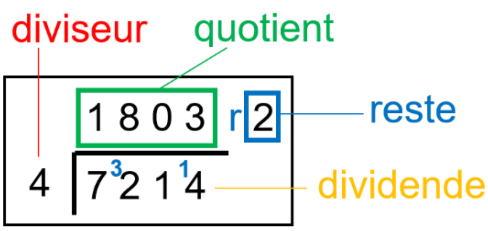


Figure III-4 - Technique opératoire de l’arrêt de bus version courte, sans poser les soustractions intermédiaires

ii. Etapes de la procédure de calcul

Afin d’effectuer la technique opératoire de l’arrêt de bus, on suit plusieurs étapes qui sont similaires dans le fond à la technique opératoire de la potence mais qui diffèrent dans la forme. Les parties qui concernent les deux versions de la technique opératoire de l’arrêt de bus seront en noir, celles qui ne concernent que la version courte seront en vert et celles qui ne concernent que la version longue seront en bleu. Les différences notables avec la technique opératoire de la potence seront en rouge, ces parties concernent les deux versions longues et courtes.

A- Préparation de la division :

1) On **pose la division**, pour cela on trace l’arrêt de bus, on place le dividende sous l’arrêt de bus et le diviseur à gauche de l’arrêt de bus.
   Il n’est pas nécessaire de trouver le nombre de chiffre du quotient.

B- Division

2) **Partage des milliers :**
   « 7 milliers partagés en 4, ça fait 1 millier pour chacun, et il en reste 3 » (division partition) ou « dans 7 milliers on peut mettre 4 milliers 1 fois, et il reste 3 milliers » (division quotition).
   Version longue : On pose la soustraction.

« On écrit 1 au-dessus du 7 puisqu'on travaille avec des milliers, on reste dans la colonne des milliers ».

Version courte « Si on ne pose pas la soustraction, on écrit un petit 3 en haut à gauche du chiffre des centaines du dividende, cela permet de changer les 3 milliers en 30 centaines pour l'étape suivante ».

3) **Partage des centaines :**

Version longue : « Je sépare les 3 milliers qu'il me reste en centaines, ça fait 30 centaines, si j'ajoute les 2 centaines que j'avais au début, ça fait 32 centaines. » Pour les voir facilement, on abaisse le 2 (dans la version longue seulement, puisque dans la version courte le « 32 » est directement visible). « 32 centaines partagées en 4, ça fait 8 centaines et il ne reste rien » (partition) ou « dans 32 centaines on peut mettre 4 centaines 8 fois et il ne reste rien » (quotition).

Version longue : On pose la soustraction.

« On écrit 8 au-dessus du 2 puisqu'on travaille avec des centaines, on reste dans la colonne des centaines ».

4) **Partage des dizaines :**

Version longue : « Il ne reste plus de centaines, on abaisse le 1 des dizaines. »

« On ne peut pas mettre 4 dizaines dans 1 dizaine » (quotition), ou « on ne pas partager 1 dizaine en 4 groupes » (partition). « On écrit 0 au-dessus du 1 puisqu'on travaille avec des dizaines, on reste dans la colonne des dizaines ».

Version courte « Comme on n'a pas utilisé la dizaine, on écrit un petit 1 en haut à gauche du chiffre des unités du dividende, cela permet de changer 1 dizaine en 10 unités pour l'étape suivante ».

5) **Partage des unités :**

Version longue : « Je sépare la dizaine qu'il me reste en unités, ça fait 10 unités, si j'ajoute les 4 unités que j'avais au début ça fait 14 unités. Pour les voir facilement, on abaisse le 4 » (dans la version longue seulement, puisque dans la version courte le « 14 » est directement visible). « 14 unités partagées en 4 groupes ça fait 3 unités par groupe et il en reste 2 » (partition) ou « dans 14 unités, je peux mettre 4 unités 3 fois et il reste 2 ».

Version longue : On pose la soustraction.

« On écrit 3 au-dessus du 4 puisqu'on travaille avec des unités, on reste dans la colonne des unités ».

Version courte « On écrit à côté du quotient r pour « reste » et 2 car il nous restait 2 unités à la fin »

C- Expression du résultat et preuve

6) **Expression du résultat** : « Quand je divise 7214 par 4 je trouve que le quotient c'est 1803 et le reste c'est 2, j'écris q = 1803 et r = 2. Ça veut dire que 7214 c'est la même chose que 4 fois 1803 plus 2. J'écris 7214 = (1803 x 4) + 2 ».

7) **Vérification** : « Je pose 1803 x 4, j'ajoute 2 au résultat. Je trouve bien 7214 ».

c. Technique opératoire des quotients partiels

i. Organisation spatiale

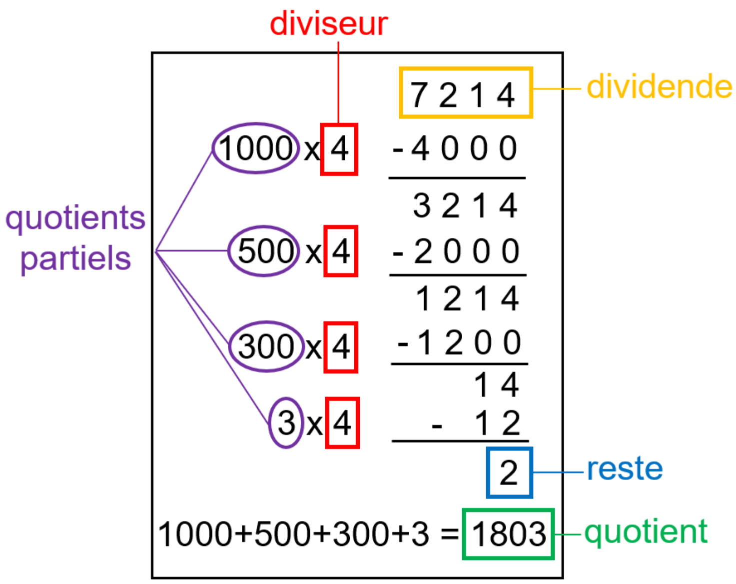


Figure 5 Technique opératoire des quotients partiels

ii. Etapes de la procédure de calcul

La procédure de calcul qui est utilisée dans la technique opératoire des quotients partiels diffère de celle qui est utilisée dans les méthodes traditionnelles de la potence et de l'arrêt de bus. Celle-ci est basée sur des soustractions successives qui permettent de déterminer des quotients partiels. Les soustractions ne sont pas faites sur certains chiffres seulement du dividende mais sur le nombre entier. En voici les étapes :

A- Préparation de la division :

On écrit le dividende en haut à droite : 7214.

B- Division

On va chercher combien de fois il y a 4 dans 7214 (division quotition).

1) **Recherche d'un multiple :** On cherche un multiple du diviseur 4, qui nous semble assez facile à calculer, qui est le plus grand possible, tout en restant plus petit que le diviseur. On pense à 4000.
2) **Ecriture :** On écrit à gauche la multiplication qui correspond au multiple que l'on a trouvé : 1000 x 4 car on peut mettre 1000 groupes de 4 dans 7214. On écrit également le résultat 4000 sous le dividende.
3) **Soustraction :** On soustrait 4000 à 7214. Il nous reste encore 1214. Nous pouvons encore enlever des paquets de 4 à notre reste.
4) **Répétition des étapes 1, 2, 3 :** On répète les étapes 1, 2 et 3 jusqu'à ce que notre reste soit plus petit que le diviseur 4. On trouve alors d'autres quotients partiels : 500, 300 et 3 dans notre exemple. Ici chaque élève peut effectuer ces soustractions dans un ordre différent, trouver des quotients partiels différents, surtout dans un premier temps. On cherchera peu à peu à amener les élèves vers l'utilisation experte de la technique : trouver les quotients partiels dans l'ordre : 1000, 800, 3. On veillera aussi à éloigner les élèves de l'utilisation la plus inefficace de la technique qui consiste à répéter les soustractions du diviseur lui-même et qui ne permettra pas d'obtenir de résultat à moins que cela ne soit répété 1803 fois !
5) **Calcul du quotient :** On calcule le quotient total en additionnant les quotients partiels :
   1000 + 500 + 300 + 3 = 1803

Il peut être aidant de faire entourer les quotients partiels aux élèves.

C- Expression du résultat et preuve

1) **Expression du résultat** : « On a vu que dans 7214 il y a 1000 fois 4, et 500 fois 4 et 300 fois 4 et 3 fois 4, en tout ça fait qu'il y a 1803 fois 4 et il reste 2. On peut donc écrire que 7214 = (1803 x 4) + 2 ».
2) **Vérification** : « Je pose 1803 x 4, j'ajoute 2 au résultat. Je trouve bien 7214 ».

d. Techniques opératoires hybrides

Il existe des techniques opératoires mélangeant la technique de la potence et la technique des quotients partiel, ainsi que des méthodes mélangeant la technique de l'arrêt de bus et la technique des quotients partiel.

Exemple de deux techniques hybrides :

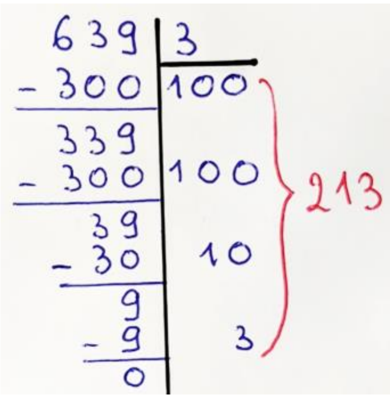


Figure III-6 - Technique opératoire hybride : potence et quotients

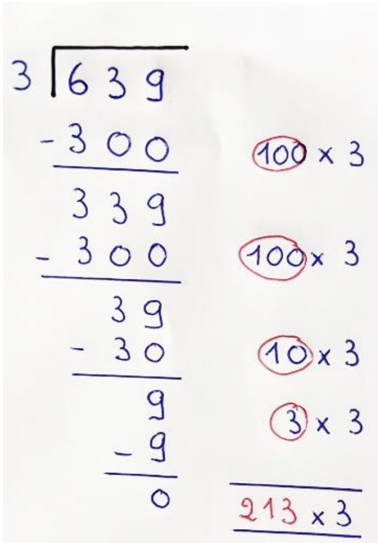


Figure III-7 - Technique hybride : arrêt de bus et quotients partiels

IV. Méthodologie

1. Méthodes employées

Afin de répondre à la problématique générale, je chercherais à trouver des réponses aux sous questions de ma problématique grâce à différentes méthodes :

- Une analyse a priori et la comparaison des techniques opératoires, appuyées par un travail de recherche documentaire (documents de recherche ou articles de revues spécialisées en didactique des mathématiques, nationaux et internationaux) ainsi qu'une analyse de données expérimentales recueillies dans une étude internationale
- La recherche expérimentale dans plusieurs classes de CM1 et l'analyse des données recueillies
- Une enquête par un questionnaire pour les élèves et les enseignants

Les deux derniers points n'ont malheureusement pu être réalisés dans leur ensemble suite à la fermeture des écoles et le confinement qui ont eu lieu au moment du recueil de données. Je veillerais tout de même à décrire mon raisonnement ainsi que la méthodologie que je comptais employer pour récupérer et analyser ces données. Je présenterai aussi les documents, séquences, fichiers vidéo et questionnaires que j'avais créés pour mon étude expérimentale. En contrepartie, la partie de recherche documentaire sera développée de manière plus approfondie que ce qui était initialement prévu et des données issues de recherches expérimentales internationales seront analysées.

2. Cadre d'utilisation de chaque méthode de recherche

Il me semble très intéressant de comparer les trois techniques opératoires et leurs variantes dans leur globalité au travers de l'expérimentation en classe. Il n'est cependant pas possible de tester et comparer toutes ces techniques d'une manière expérimentale dans le cadre de ce mémoire c'est pourquoi seule une partie de l'analyse des techniques est faite d'une manière expérimentale, le reste de l'analyse est fait au travers de la recherche documentaire.

Dans la partie recherche expérimentale et recueil de données via un questionnaire, nous nous limiterons à *l'étude de la division posée d'un dividende entier par un diviseur entier à un chiffre seulement*. Nous nous limiterons également à comparer les *techniques opératoires de la potence version longue, de l'arrêt de bus version longue et courte***.**

Dans la partie recherche documentaire en revanche, nous étudierons les trois techniques posées ainsi que certaines de leurs variantes, depuis la division d'un entier par un entier à un chiffre jusqu'à la division décimale (tout en gardant un diviseur entier).

Concernant les limites de l'étude quant au type de division traitée, il est important que les techniques soient considérées dans leur ensemble et pas seulement pour la division euclidienne avec un diviseur à un chiffre. En effet ne considérer et ne comparer les techniques de division que pour un type de division spécifique serait très réducteur et ne permettrai pas de tirer des conclusions plus générales quant à l'enseignement de la division aux élèves. La technique choisie doit être vue et analysée au travers des étapes dans la progression de l'apprentissage de la division. Sur le long terme l'élève utilisera la technique opératoire apprise pour tous types de divisions (diviseurs à 2 ou plus de chiffres, divisions décimales…) et non pas seulement pour les divisions dont le diviseur a un seul chiffre. Ainsi nous chercherons à tirer des conclusions pour ces différents types de division lorsque nous comparerons les techniques.

Le tableau suivant résume le cadre de chaque type de recherche :

<table>
<tr><th>Progression envisagée dans l'apprentissage de la technique de division</th><th>Recherche documentaire et analyse de données expérimentales issues de la recherche</th><th>Recherche expérimentale</th><th>Analyse des données d' un questionnaire</th></tr>
<tr><td>Dividende entier, diviseur entier à 1 chiffre, sans retenues successives, sans reste.</td><td rowspan="2">Potence version longue et courte</td><td colspan="2" rowspan="2">Potence version longue
Arrêt de bus version longue</td></tr>
<tr><td>Dividende entier, diviseur entier à 1 chiffre, avec retenues successives, sans reste.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Dividende entier, diviseur entier à 1 chiffre, avec ou sans retenues successives, avec ou sans reste.</td><td rowspan="4">Arrêt de bus version longue et courte

Quotients partiels

Hybrides</td><td>Arrêt de bus version courte</td></tr>
<tr><td>Dividende entier, diviseur entier à 1 chiffre ou plus, avec ou sans retenues successives, avec ou sans reste.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Dividende entier, diviseur entier à 1 chiffre ou plus, avec ou sans retenues successives, quotient décimal.</td></tr>
<tr><td>Dividende décimal, diviseur entier à 1 chiffre ou plus, avec ou sans retenues successives, quotient décimal.</td></tr>
</table>

3. Détails du protocole de recherche expérimentale

a. Protocole de collecte des données

La recherche expérimentale aura lieu dans deux classes de CM1 et dans deux classes de CM2. A chaque classe sera enseignée une des trois techniques opératoires sélectionnées : technique opératoire de la potence version longue, technique opératoire de l'arrêt de bus version longue ou version courte. Alors que les CM1 suivront une séquence d'apprentissage, les CM2 suivront une séquence de révision, ayant déjà appris la division posée l'année précédente. Le tableau ci-dessous synthétise la répartition des séquences dans les classes.

Classe de CM1 A	Séquence d'apprentissage de la technique de la **potence version longue**
Classe de CM1 B	Séquence d'apprentissage de la technique de **l'arrêt de bus version longue**
Classe de CM2 A	Séquence de révision de la division posée avec la technique de la **potence version longue**
Classe de CM2 B	Séquence de révision de la division avec la technique de **l'arrêt de bus version courte**

Mis à part la technique opératoire enseignée, le reste de la séquence sera la même pour un même niveau, ceci afin de n'avoir pour variable que la technique opératoire utilisée. Toujours dans ce même but, on cherchera à analyser les données venant de groupes d'élèves comparables, du moins autant que possible. Afin de constituer ces groupes « comparables », nous ferons tout d'abord une évaluation diagnostique dans chaque classe, portant sur les connaissances et compétences nécessaires à l'apprentissage de la division posée : connaissance des tables de multiplication, de soustraction, soustraction posée, soustraction en ligne, sens de la division (partition, quotition), aspect positionnel de la numération, estimation du nombre de chiffres d'un résultat, la rapidité sera également évaluée pour refléter l'automatisation des procédures. Cette évaluation étant la même dans chaque classe, nous pourrons ainsi choisir des échantillons d'élèves, ayant des résultats assez similaires entre les classes, dont les résultats finaux nous serviront de base d'analyse. Nous veillerons aussi à comparer les résultats et progrès des groupes d'élèves de différents niveaux, cela permettra notamment de voir si les avantages et inconvénients d'une technique opératoire se retrouvent d'un groupe à l'autre ou si justement, une méthode pourrait être employée comme moyen de différenciation. On vise ainsi à constituer trois groupes homogènes au sein de chaque classe, à partir d'un échantillon de 12 élèves : 4 élèves n'ayant fait aucune ou très peu d'erreurs dans l'évaluation diagnostique, 4 élèves ayant fait plus d'erreurs mais ayant répondu correctement à une grande partie des questions, 4 élèves pour lesquels on note des difficultés diverses (erreurs dans la réalisation des procédures de calculs, faible vitesse d'exécution des procédures de calcul…). Les données recueillies à partir du travail de 4 classes, donc 48 élèves seront donc analysées.

Les documents qui nous serviront pour notre recueil de données, et donc que nous collecterons auprès de chaque enseignant seront les suivants :

- Une évaluation diagnostique pour chaque élève
- Une évaluation sommative pour chaque élève
- Un questionnaire par élève
- Un questionnaire par enseignant

La séquence que quatre enseignants réaliseront dans leurs classes respectives leur sera donnée « clé en main » afin qu'elle soit enseignée d'une manière aussi similaire que possible dans chaque classe. Elle comportera les séances suivantes :

	CM1 A	CM1 B	CM2 A	CM2 B
	Technique de la potence version longue	**Technique de l'arrêt de bus version longue**	**Technique de la potence version longue**	**Technique de l'arrêt de bus version courte**
Séance 1	Evaluation diagnostique sur les pré acquis pour la division posée		Evaluation diagnostique sur les divisions posées avec la technique de la potence	
Séance 2	1) Situation de découverte A : Partage du trésor – division **quotition** Introduction du signe « : » et de l'écriture finale. 2) Entrainement aux divisions sous forme schématique avec du matériel			
Séance 3	1) Situation de découverte B : Partage du trésor – division **partition** 2) Entrainement aux divisions sous forme schématique sans matériel			
Séance 4	1) Découverte de la technique de la **potence** avec et sans reste 2) Entrainement	1) Découverte de la technique de **l'arrêt de bus version longue** avec et sans reste 2) Entrainement	1) Révision de la technique de la **potence** avec et sans reste 2) Entrainement	1) Apprentissage de la technique de **l'arrêt de bus version courte** avec et sans reste 2) Entrainement
Séance 4 bis	1) Exemples de cas plus difficiles comprenant des zéros initiaux, finaux et/ou intermédiaires 2) Entrainement	1) Exemples de cas plus difficiles comprenant des zéros initiaux, finaux et/ou intermédiaires 2) Entrainement	1) Exemples de cas plus difficiles comprenant des zéros initiaux, finaux et/ou intermédiaires 2) Entrainement	1) Exemples de cas plus difficiles comprenant des zéros initiaux, finaux et/ou intermédiaires 2) Entrainement
Séance 5	Evaluation sommative avec la technique de la **potence**	Evaluation sommative avec la technique de **l'arrêt de bus version longue**	Evaluation sommative avec la technique de la **potence (évaluation témoin)**	Evaluation sommative avec la technique de **l'arrêt de bus version courte**
Séance décrochée	Questionnaire élève et questionnaire enseignant	Questionnaire élève et questionnaire enseignant	Questionnaire élève	Questionnaire élève et questionnaire enseignant

Les supports de travail donnés aux enseignants pour la réalisation des séquences en classes sont disponibles dans les annexes B à H.

b. Protocole d’analyse des résultats

Les deux schémas ci-dessous permettent de comprendre comment seront formés les groupes d’élèves échantillons de notre étude, ainsi que de clarifier comment les résultats de l’évaluation sommative seront comparés.

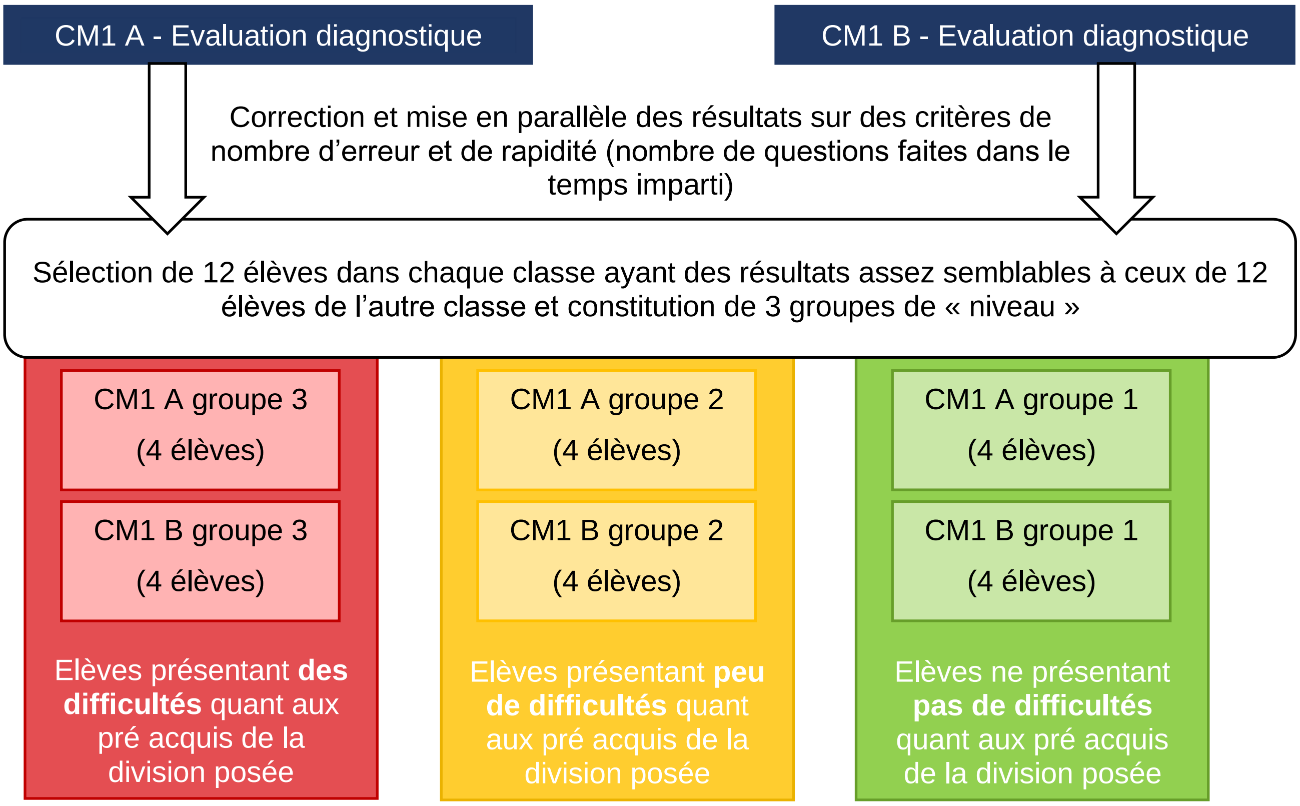


Figure IV-1 - Formation des groupes comparables à partir des résultats de l'évaluation diagnostique

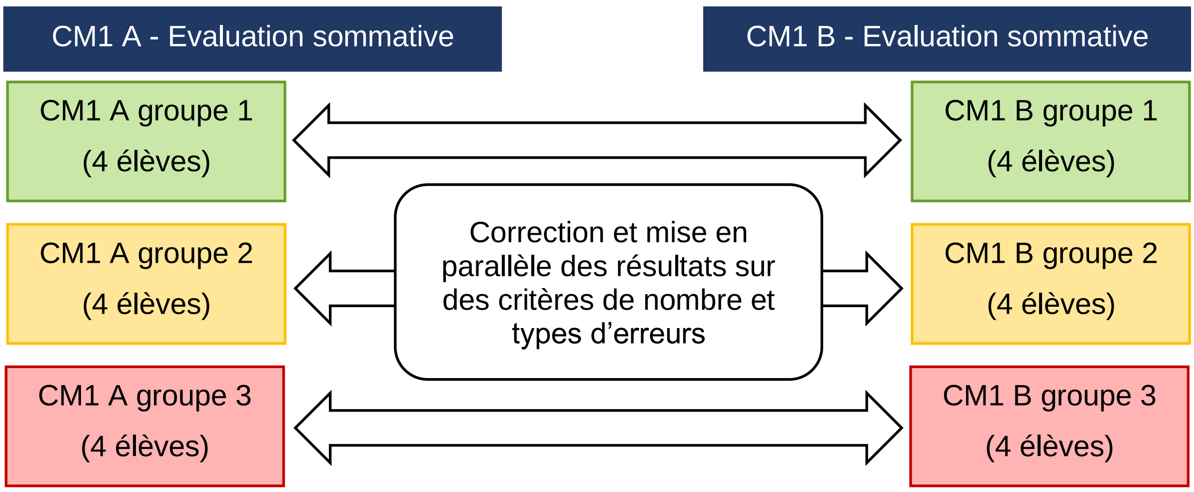


Figure IV-2 - Comparaison des résultats de l'évaluation sommative

Un schéma similaire à celui sur les évaluations sommatives sera appliqué pour mettre en parallèle les données des questionnaires élèves.

Les questionnaires enseignant de chaque classe seront aussi mis en parallèle.

Le même schéma général est à reprendre pour les données des classes de CM2.

Les données recueillies et analysées dans les quatre classes permettront de contribuer à la comparaison de l'influence de la disposition des nombres en jeu dans une division posée sur l'apprentissage des élèves.

4. Détail du protocole de recherche documentaire

La partie de recherche expérimentale dont nous venons de détailler la méthodologie s'articulera avec une partie de recherche documentaire plus globale en trois phases. Dans une première phase, deux techniques de division traditionnelle (la potence et l'arrêt de bus) ayant des dispositions différentes seront comparées. Dans une seconde phase, l'algorithme traditionnel de la division (que l'on retrouve dans les deux premières techniques) sera comparé à la technique opératoire des quotients partiels. Enfin, dans une troisième phase, on cherchera à comprendre si des techniques hybrides, qui sont au croisement de plusieurs techniques, peuvent constituer une alternative aux difficultés rencontrées avec les autres techniques. Au-delà de l'apport de la recherche expérimentale pour la première comparaison, le reste des comparaisons sera basé essentiellement sur des recherches documentaires et sur l'analyse de données provenant de la recherche documentaire. Pour chacune des comparaisons, nous ferons d'abord une analyse a priori qui nous permettra de faire ressortir les inconvénients et avantages de chaque technique. Afin de valider ou d'invalider nos hypothèses, nous confronterons ensuite notre analyse aux études tirées de la recherche documentaire. Le schéma ci-dessous résume la démarche globale qui sera suivie dans la partie « analyse de données ».

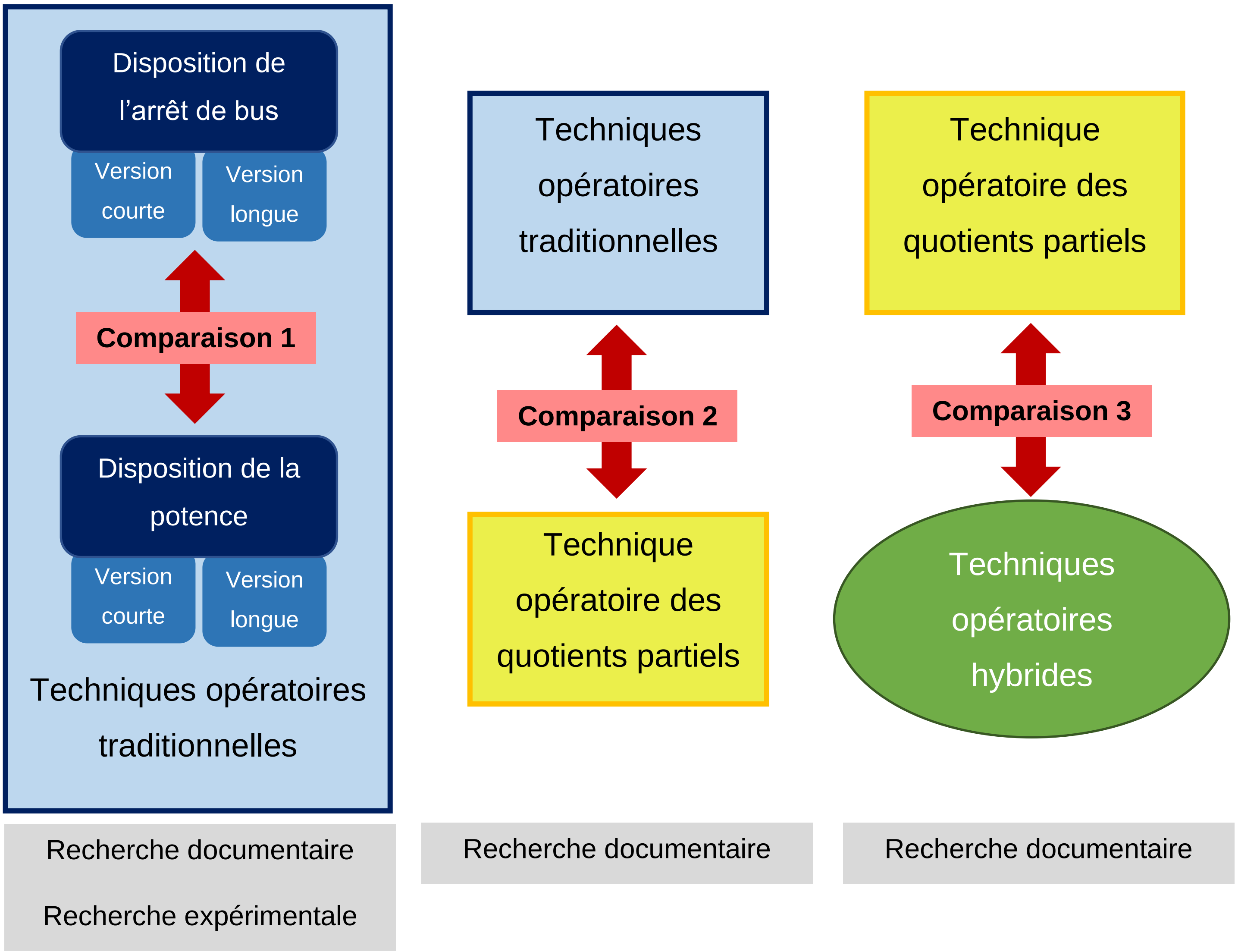


Figure IV-3 - Schéma montrant les phases de la recherche documentaire

5. Lien avec les questions de recherche et méthodologie employée.

Le tableau ci-dessous vient en complément des points précédents pour faire le lien avec les sous-questions de la problématique. Il permet de comprendre quelles méthodes seront employées pour y répondre.

<table>
<tr><th></th><th>Recherche documentaire et analyse de données expérimentales issues de la recherche</th><th>Recherche expérimentale</th><th>Analyse des données d’ un questionnaire</th></tr>
<tr><td>1) Les élèves ont-ils un rapport affectif positif/négatif avec les différentes techniques opératoires ? Pour quelles raisons ?</td><td></td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Question aux élèves :</u> Aimes-tu faire une division posée ? Pourquoi ?
<u>Question aux enseignants :</u> Quelle a été l’attitude des élèves face à l’apprentissage de la division posée au début de la séquence (positive/neutre/négative) ? Au cours de la séquence ? A la fin ? Cette attitude positive/neutre/négative varie-t-elle selon le groupe d’élève (si on considère des groupes de besoins par exemple) ? Si oui, de quelle manière ?</td></tr>
<tr><td>2) Quelles difficultés les élèves rencontrent-ils lorsqu'ils posent une division ? Ces difficultés sont-elles différentes selon la technique opératoire employée ?</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Recherche documentaire :</u> Regroupement des difficultés des élèves listées dans différents écrits de recherche. Analyse de l’application de ces difficultés aux différentes techniques opératoires.
<u>Question aux élèves :</u> Est-ce que tu trouves que faire une division posée c’est très difficile, assez difficile, assez facile, très facile ? Pourquoi ?
<u>Question aux enseignants :</u> Quelles ont été les difficultés principales des élèves lors de la construction de la technique opératoire ? Lors des phases d’entrainement ? Quelles difficultés vos élèves rencontrent-ils lorsqu’ils effectuent une division posée ? Certaines étapes posent-elles plus de difficultés que d’autres ?</td></tr>
<tr><td>3) Le choix d'une méthode ou l'autre a-t-il une influence sur la compréhension du sens de la division pour les élèves ?</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Recherche documentaire :</u> Recueil des analyses faites dans différents écrits de recherche sur l’influence de la technique opératoire sur le sens de la division.
<u>Question aux élèves :</u> Qu’est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ? Dans l’exemple ci-dessous, l’élève qui voulait effectuer la division de 523 par 4 a fait une erreur. Qu’a pensé cet élève ? Qu’aurait dû-t-il faire ?
<u>Question aux enseignants :</u> Vos élèves semblent-ils avoir compris le sens de la division ? Pensez-vous que la construction de la technique opératoire les y a aidé ? Si oui comment ?</td></tr>
</table>

4) Le type d'erreur est-il différent selon que l'on emploie une technique ou l'autre ?	X	X	
Recherche documentaire : Analyse des techniques opératoires appuyée par des analyses déjà faites provenant de plusieurs écrits de recherche. Recherche expérimentale : Comparaison des données recueillies concernant les types d'erreurs faites par les élèves selon qu'ils emploient une technique opératoire ou une autre.			
5) La quantité d'erreurs varie-t-elle d'une technique opératoire à l'autre ?	X	X	
Recherche documentaire : Analyse des données provenant d'un ou plusieurs écrits de recherche. Recherche expérimentale : Comparaison des données recueillies concernant le nombre d'erreurs faites par les élèves, le nombre divisions posées effectuées sans erreur selon qu'ils emploient une technique opératoire ou une autre.			
6) Quels sont les avantages/inconvénients d'une technique par rapport à l'autre ?	X	X	X
Recherche documentaire : Analyse des techniques opératoires, à chaque étape de l'apprentissage de la division (en partant de la division euclidienne avec un dividende à 1 chiffre jusqu'à la division décimale, diviseur entier) appuyée par des analyses provenant de plusieurs écrits de recherche. Analyse générale des techniques opératoires appuyée par des écrits de recherche. Recherche expérimentale : Analyse des données recueillie concernant le type et le nombre d'erreurs effectuées par les élèves. Question aux enseignants : Quels sont selon vous les avantages/inconvénients principaux de cette technique opératoire si on compare à la technique opératoire traditionnelle de la potence ? (L'enseignant ayant enseigné la technique de la potence ne répondra pas à cette question.)			
7) La technique de division utilisée peut-elle servir de méthode de différenciation ? Autrement dit, les effets de la technique utilisée diffèrent-ils d'un groupe d'élèves à l'autre ? (Si on considère des groupes de niveau par exemple).	X	X	
Recherche documentaire : Analyse des données provenant d'un ou plusieurs écrits de recherche. Recherche expérimentale : En considérant chacun des groupes de niveaux pré établi, comparaison dans un même groupe de niveau du nombre d'erreurs/de calculs réalisés sans erreurs pour chaque technique.			

V. Recueil et analyse des données

1. Etat des lieux de l'enseignement de la division

a. Cadre historique

Depuis des millénaires et dans le monde entier, beaucoup de techniques opératoires d'addition, de soustraction, de multiplication et de division ont vu le jour, ont été utilisées et le sont encore selon les pays. Depuis le XIXe siècle, l'enseignement du calcul a pris beaucoup d'importance dans les écoles élémentaires de France. En effet la vision du calcul comme outil indispensable à la résolution de problèmes du quotidien a impliqué que le calcul, et notamment le calcul posé, prenne chaque jour une place importante en classe. On enseignait aux élèves à appliquer un algorithme de manière systématique pour obtenir un résultat.

Peu à peu cette façon d'enseigner le calcul a évolué et l'importance du sens des opérations a été mis en avant. En effet, mettre du sens sur les techniques opératoires c'est permettre aux élèves de mieux les comprendre et donc mieux les retenir. De plus, les techniques opératoires ne sont plus seulement vues comme un outil utile pour les problèmes de la vie de tous les jours mais comme une des clés permettant de lier les apprentissages mathématiques entre eux de par les nombreuses compétences et connaissances mathématiques qui sont nécessaires afin de réaliser une opération posée[3]. Dans les années 1978-1980, les programmes conseillaient de construire les « *techniques opératoires en explicitant les procédures, par exemple la division euclidienne en posant les multiplications et les soustractions successives* »[4].

[3] SCEREN. Le nombre au cycle 3, partie 3, Calcul et conceptualisation, p. 31 à 50. [en ligne]. 2010 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf

[4] DURPAIRE, Jean-Louis, et al. L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport IGEN. [en ligne]. Juin 2006 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

En 2006, un rapport de l'inspection générale de l'éducation nationale sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 remarque que l'importance de la compréhension du sens des opérations a été prise en compte par les enseignants :

> *Globalement, un temps plus important semble consacré à la compréhension du sens des opérations qu'à l'entraînement aux techniques opératoires. Pour la division, les documents d'application et d'accompagnement précisent que la technique « dépouillée » n'est pas une compétence visée et préconisent de laisser les soustractions et même les multiplications mises en jeu. Cette démarche est largement installée dans les classes.*[5]

En revanche il est aussi noté que la division, comme la multiplication sont toujours enseignées d'une seule manière, en dépit de la diversité de techniques disponibles dans les documents pédagogiques :

> *Lors de nos visites, il n'a pas été constaté de présentation de techniques diversifiées pour la multiplication ou pour la division. Pourtant, depuis une trentaine d'années, de nombreux documents pédagogiques ont mis à l'honneur diverses techniques qui peuvent donner une dimension ludique à cet apprentissage et qui n'empêchent pas de « stabiliser » l'apprentissage de la technique usuelle.* [6]

Dans le document d'accompagnement des programmes de 2010 « Le nombre au cycle 3 » le calcul est *« vu comme un moyen d'acquérir des techniques et d'obtenir un résultat mais aussi un levier pour tester, produire, enrichir et développer des connaissances mathématiques. ».* C'est également cette vision que l'on peut retrouver dans les programmes scolaires actuels.

b. Le calcul posé dans les programmes français actuels

Dans les programmes de 2018[7], une place importante est faite à l'*interaction* qui doit exister entre les différentes formes de calcul (mental, en ligne, posé, instrumenté). Une forme de calcul peut permettre d'en effectuer une autre et inversement. Ainsi il est important de faire comprendre aux élèves que ces

[5] Ibidem 4
[6] Ibidem 3
[7] MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. Programmes du cycle 3. Mathématiques. p. 100-108 [en ligne]. BOEN n°30 du 26 juillet 2018 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/2/Cycle_3_programme_consolide_1038202.pdf

formes de calcul ne sont pas à opposer ou à comparer les unes aux autres mais qu'elles sont complémentaires.

Il est également souligné le rôle du calcul dans la *connaissance des nombres*. Pour les techniques opératoires en particuliers, leur construction permet de « *retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes* »[8].

Enfin on note également une volonté d'insister sur les liens qui doivent être tissés entre résolution de problèmes, organisation des calculs (ce qui inclus donc les techniques opératoires) et le *sens des opérations* :

> *Il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul et des aptitudes de résolution de problèmes arithmétiques (le travail sur la technique et sur le sens devant se nourrir l'un l'autre).*[9]

Au travers de ce mémoire nous chercherons aussi à voir en quoi les techniques opératoires de division peuvent aider à comprendre le sens de la division.

Le document d'accompagnement des programmes : *Le calcul aux cycles 2 et 3* [10] donne des objectifs spécifiques à chaque forme de calcul. Pour le calcul posé, il *« permet de disposer d'une méthode de calcul sécurisante, car elle permet de garantir l'obtention d'un résultat ».* Il donne aussi l'occasion de consolider sa connaissance des faits numériques et de la numération en général. Il est également mentionné le fait que pratiquer des calculs posés permet d'étudier le fonctionnement d'algorithmes complexes.

c. L'enseignement de la division dans les programmes scolaires et rapports officiels français et anglais

Dans les programmes scolaires de 2018, on peut lire que c'est au cycle 3 que l'élève va construire la technique de calcul écrite de la division. Au travers de cette construction, ce sont principalement les compétences « calculer, raisonner

---

[8] Ibidem 7

[9] Ibidem 7

[10] MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE. Le calcul aux cycles 2 et 3. [en ligne]. Mars 2016 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/99/2/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_600992.pdf

et communiquer » du socle commun, qui vont être travaillées. A la fin du cycle 3, il est attendu des élèves qu'ils puissent « calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux. »

Pour le calcul posé de la division, cela se traduit par :

> *Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :*
>
> *- la division euclidienne d'un entier par un entier ; (CM1)*
>
> *- la division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier. (CM2)*[11]

Dans le document d'accompagnement des programmes : *Le calcul aux cycles 2 et 3*, on peut également lire qu'il n'y a pas de recommandation particulière concernant le choix d'une technique de division longue (avec les soustractions intermédiaires posées) ou courte (sans les soustractions posées) par l'élève :

> *« Pour la division les soustractions peuvent ne plus apparaître et être effectuées mentalement quand le diviseur est simple et que l'élève est en mesure de gérer ces soustractions mentalement. ».* [12]

Cette phrase semble en revanche suggérer que l'apprentissage se fait d'abord par la division longue, puis l'élève peut choisir de garder les soustractions intermédiaires posées ou les faire mentalement. Ce point me semble intéressant car il est opposé aux préconisations des programmes scolaires anglais[13].

En effet, c'est d'abord la *short division* (technique opératoire de l'arrêt de bus sans les soustractions intermédiaires) qui est enseignée en *year 5* (CM1), avec des nombres entiers pour dividendes et des nombres à un chiffre pour diviseurs, alors que la *long division* (technique opératoire de l'arrêt de bus avec les soustractions intermédiaires) n'est introduite qu'en *year 6* (CM2) lorsque les divisions d'un nombre entier par un diviseur à 2 chiffres sont amenées.

---

[11] Ibidem 7
[12] Ibidem 10
[13] DEPARTMENT FOR EDUCATION. The national curriculum in England. Framework document [en ligne]. Décembre 2014 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381344/Master_final_national_curriculum_28_Nov.pdf

Les exemples suivants sont extraits des programmes anglais publiés en 2014[14]. Cet extrait donne des exemples de présentation des divisions effectuées avec les techniques opératoires de l'arrêt de bus.

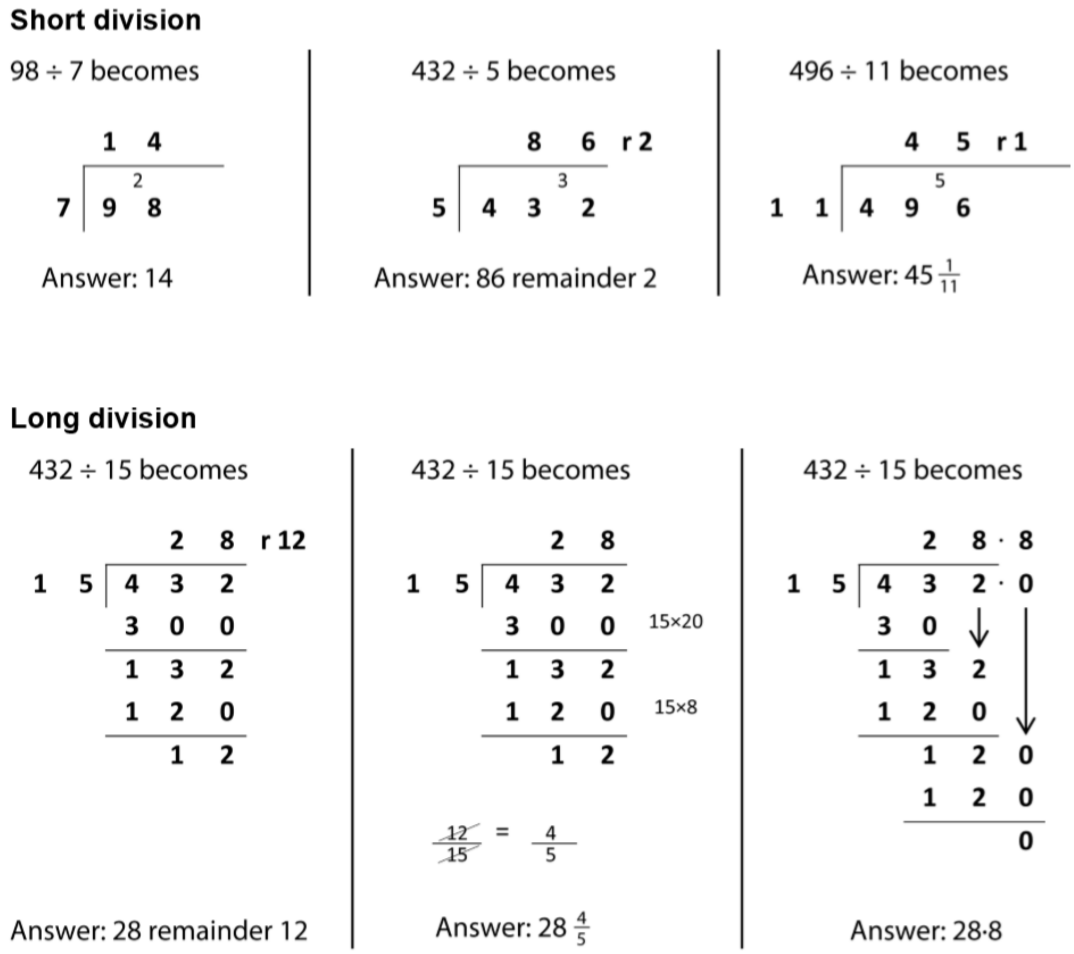


Figure V-1 - Exemple de présentations de la technique opératoire de division dans les programmes anglais[15]

Un extrait des programmes anglais relatif à l'enseignement des divisions posées est disponible en annexe J.

Une autre technique de division, la technique opératoire des quotients partiels, appelée *chunking method*, a également été enseignée dans beaucoup d'écoles

[14] Ibidem 13
[15] Ibidem 13

en complément de la technique opératoire de l'arrêt de bus, depuis 1999[16]. En effet en juillet 1998 le ministère de l'éducation nationale anglais (*Department for Education*) a publié un rapport appelé *National Numeracy Strategy* dans lequel des recommandations étaient faites concernant l'enseignement du calcul. Ce dernier préconisait de mettre l'accent sur les stratégies mentales, de retarder l'introduction des algorithmes traditionnels (tel que l'arrêt de bus) et de développer plus de flexibilité dans les méthodes de calcul. Plusieurs rapports ont étudié l'impact de ces recommandations en termes d'enseignement du calcul dans les classes ainsi que leurs effets sur les progrès en calcul des élèves. Un de ces rapports sera présenté dans la partie V-3-b.

En France, bien qu'elle n'ait pas été dans les programmes, il est intéressant de noter que la technique des quotients partiels n'est pas inconnue. En effet, en 1977, G. Brousseau et E. Faucon ont travaillé à la création d'une séquence qui permettrait aux élèves de construire par eux-mêmes un algorithme de division euclidienne. A la 9ème séance, la disposition ci-dessous était amenée après avoir évolué tout au long de la séquence. Cette technique dans laquelle les calculs sont de part et d'autre de « poteaux de rugby » présente plusieurs avantages selon G. Brousseau et E.Faucon dont celui de faire figurer explicitement les calculs intermédiaires ainsi que de permettre un apprentissage plus souple puisque « la technique optimum peut être obtenue progressivement sans mécanisation » [17].

[16] ANGHILERI, Julia. "*Some impacts of the National Numeracy Strategy on students' written calculation methods for division after five years implementation*", University of Cambridge, Faculty of Education. D. Hewitt and A. Noyes, 2005, p. 17-24. Disponible sur www.bsrlm.org.uk.

[17] BROUSSEAU, Guy, FAUCON, Eliette. Algorithme de la division. Atelier de pédagogie, 1977 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/10/77-6-li%C3%A9.pdf

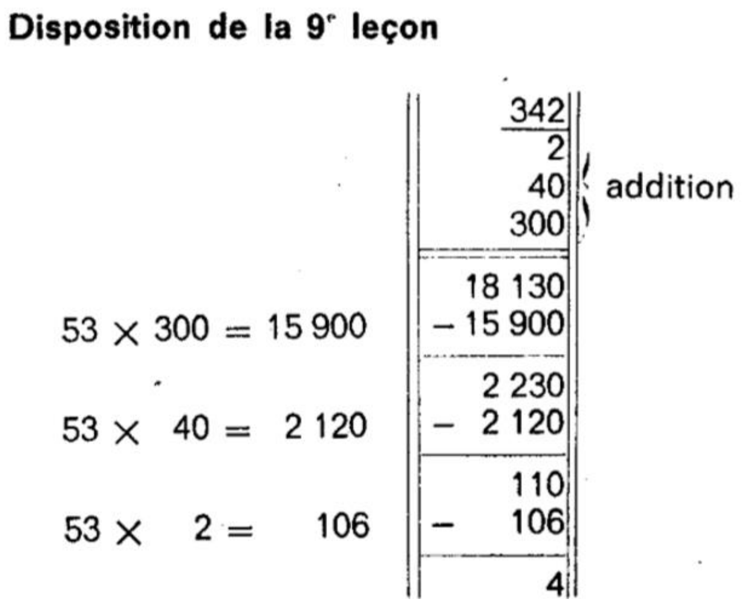


Figure V-2 - Disposition de la technique des quotients partiels issue du document "Algorithme de la division" de G. Brousseau et E. Faucon

Plus récemment, dans le rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* remis en février 2018 au ministre de l'éducation nationale par Cédric Villani et Charles Torossian, il est fait mention de la diversité des algorithmes disponibles pour faire une division dont l'algorithme traditionnel, qui pourtant très intéressant, « est trop souvent vécu comme une souffrance par les élèves » [18]. Une alternative à cet algorithme traditionnel est présentée dans le rapport comme « un exemple de division de type anglo-saxon ». Cet exemple, visible ci-dessous est un type de technique hybride, comme je les présente dans la première partie de mon mémoire. En effet, cette alternative proposée se rapproche beaucoup de la technique des quotients partiels avec une disposition en potence.

[18] VILLANI, Cédric, TOROSSIAN, Charles. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. 12 février 2018. [consulté le 19.04.2020]. Disponible sur le Web : https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

Une technique opératoire de la division claire et explicite qui respecte la valeur positionnelle des chiffres du quotient :

	4	3	2	1		1	7
-	3	4	0	0	2	0	0
		9	2	1		5	0
	-	8	5	0			4
			7	1			
		-	6	8			
				3			

200, 50 et 4 sont les « quotients partiels ». On les ajoute ensuite pour obtenir le quotient :

200 + 50 + 4 = 254

Il reste 3.

Si on veut aller plus loin, le quotient partiel suivant serait « 0,1 ».

Figure V-3 - Extrait de l'annexe 5 du rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » [19]

Dans la partie 2, nous nous baserons sur différentes études pour mieux comprendre les avantages et inconvénients des techniques que nous avons évoquées dans cette première partie.

d. Les difficultés inhérentes à la division posée

Depuis longtemps, les divisions posent problème aux élèves et les constatations récentes montrent que cette tendance ne va pas en s'améliorant. Dans l'étude de la Depp de mars 2019 *L'évolution des performances en calcul des élèves de CM2 à trente ans d'intervalle (1987-2017)* [20], il est observé une baisse générale des taux de réussite pour les opérations posées. Les divisions posées, qui affichent le taux de réussite le plus bas, ont vu leur taux de réussite passer de 74 % en 1987 à 43 % en 2007 et à 37 % en 2017.

Ces constats nous montrent que les élèves rencontrent des difficultés lorsqu'ils se trouvent face à une division. En comprenant ces difficultés, nous serons en mesure de mieux juger des avantages et des inconvénients de chaque technique opératoire de division.

Selon G. Brousseau, « la division conjugue les difficultés de la multiplication en ligne et des reports internes de retenues, avec celles de la soustraction et de ses

[19] Ibidem 18

[20] MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE, DIRECTION DE L'EVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE. Evolution des performances en calcul des élèves de CM2 à trente ans d'intervalle (1987-2017). Note d'information N° 19.08, Mars 2019.

retenues »[21]. En plus des difficultés reconnues, G. Brousseau évoque aussi deux facteurs de complexité didactique. Le premier vient des tentatives pour déterminer un chiffre du quotient. En effet, dans les techniques traditionnelles, les élèves doivent faire des essais pour déterminer chaque chiffre du quotient. Ces essais peuvent être mentaux ou écrits, rapides ou lents, vécus ou non comme des erreurs à chaque fois que le multiple optimal n'est pas trouvé. Ce facteur didactique peut donc entrainer des difficultés en particulier pour les élèves ne maitrisant pas leurs tables de multiplication, ayant du mal à estimer l'ordre de grandeur d'un résultat ou ayant des difficultés à poser une multiplication (dans le cas d'un diviseur à deux chiffres). Le second facteur didactique évoqué par G. Brousseau est la perte de l'alignement des colonnes dès que l'opération s'allonge. En effet le mauvais alignement des nombres des soustractions intermédiaires peut être source de nombreuses erreurs pour les élèves qui ne se retrouvent plus dans leurs calculs.

Dans le bilan du CNESCO pour la conférence de consensus de 2015[22] il est mentionné le fait que les opérations posées sont particulièrement problématiques pour les élèves lorsque les nombres en jeu ont plusieurs chiffres. Certains élèves qui ne maitrisent pas les bases de la numération écrite « inventent des procédures erronées très difficiles à éradiquer une fois installées […] Ces algorithmes qui leur sont propre ressemblent partiellement à ceux qui sont pertinents mais qui ne conduisent que rarement à la réponse exacte ». Ainsi on peut retenir ici le fait qu'il est nécessaire de maitriser la numération écrite, mais aussi que certains élèves ne font pas de lien entre certaines des techniques qu'on leur propose et le sens de l'opération. En effet, si les élèves inventent des procédures, c'est que celle qui leur est proposée n'est peut-être pas

---

[21] BROUSSEAU, Guy, Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

[22] CNESCO, Michel Fayol. Nombres et opérations : Premiers apprentissages à l'école primaire. Conférence de consensus. Novembre 2015 [consulté le 20.04.2020].. Disponible sur le Web : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf

suffisamment construite avec eux et est trop éloignée de leur manière de penser initiale.

Un article américain du *National Council of Teachers of Mathematics*[23] rejoint ce dernier point dans le sens où la division est, selon cet article, trop souvent vue comme un ensemble de sous procédures à suivre sans que le sens de la division ne soit compris ou renforcé à travers la réalisation de cet algorithme. Plus les élèves ont des difficultés à mettre du sens sur les sous parties de l'algorithme, moins ils s'en souviennent. La représentation des nombres obtenus à la sortie de cet algorithme, elle non plus, n'est pas toujours comprise : Quelle est la signification du reste ? Quel est le lien entre le quotient et mes nombres de départ ? Une autre difficulté provient du sens dans lequel les chiffres sont considérés dans cet algorithme. En effet, la division dans les algorithmes traditionnels s'effectue de gauche à droite alors que dans les trois autres opérations posées, les calculs se font de droite à gauche. Enfin, le fait que la division ait plusieurs sens (partition, quotition) complique le passage d'un problème écrit à une opération de division pour certains élèves.

2. Comparaison de deux techniques traditionnelles de division posée en France et en Angleterre

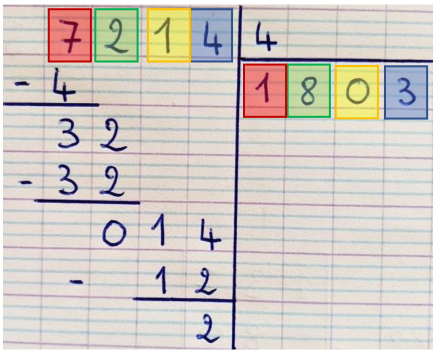
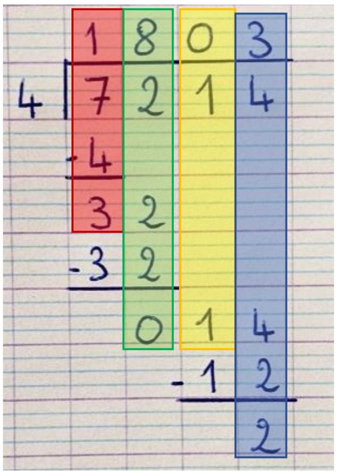
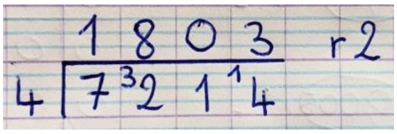
a. Analyse a priori des deux dispositions « Potence » et « Arrêt de bus »

Afin de mieux comprendre les avantages et inconvénients que comporte chaque technique opératoire, nous allons faire une analyse a priori en se basant sur des exemples couvrant la progression générale de l'apprentissage des divisions : de la division euclidienne avec un diviseur à un chiffre, jusqu'à la division décimale, en passant par la division avec un diviseur a deux chiffres ou plus. Il est évident

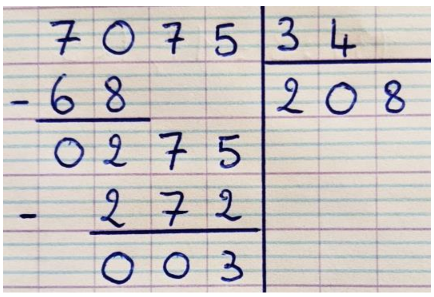
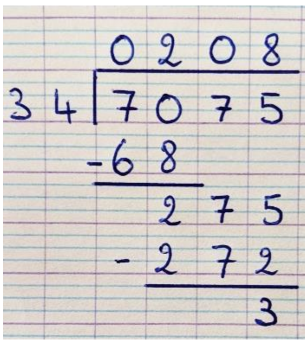
[23] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Patricia A. Sellers. "*The trouble with long division*", National Council of Teachers of Mathematics. [en ligne]. Mai 2010 [consulté le 20/04/2020]. Disponible sur le Web : https://www.mcs4kids.com/documents%5Cmath%5Ck-6%5CMath%20Content%5CMultiplication%20and%20Division%5CThe%20Trouble%20with%20Long%20Division.pdf

que ces trois exemples ne nous donnent pas une image exhaustive des cas et difficultés liés à la division mais ils nous en donnent une première base de travail. Concernant la comparaison des techniques traditionnelles française et anglaises, ce qui nous intéresse principalement est l'impact que peut avoir le placement des nombres les uns par rapport aux autres, et non l'algorithme en soi qui reste similaire dans les deux techniques. La version anglaise étant enseignée dans sa version courte (sans les soustractions intermédiaires) pour les diviseurs à un chiffre, ainsi que dans sa version longue (avec les soustractions intermédiaires) pour les diviseurs à plusieurs chiffres, nous présenterons les deux versions dans ce tableau.

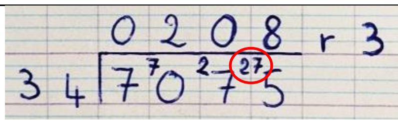
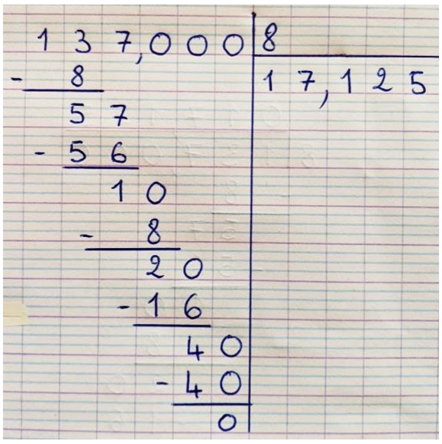
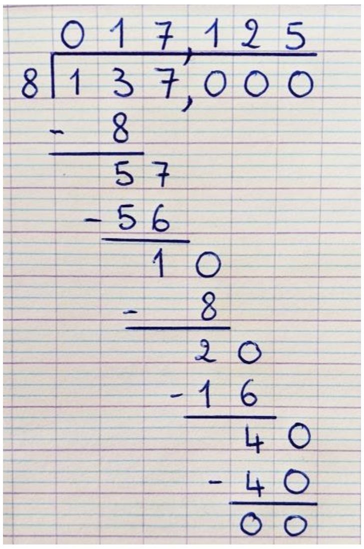
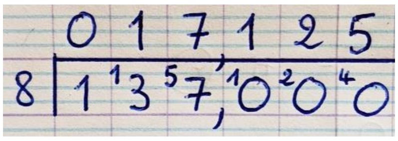
<table>
<tr><th></th><th>Technique opératoire de la potence</th><th>Technique opératoire de l'arrêt de bus</th></tr>
<tr><td>Diviseur à
1 chiffre

7214 : 4</td><td></td><td>Version longue :

Version courte :
</td></tr>
<tr><td>Analyse</td><td>- Technique traditionnelle connue par tous en France
- Besoin de prévoir par une estimation le nombre de chiffres du quotient afin de réduire le nombre d'erreurs. Estimation difficile à faire pour beaucoup d'enfants qui se retrouvent en difficulté avant même de commencer la division.</td><td>- Technique quasi-inconnue en France
- Pas de nécessité de prévoir le nombre de chiffres du quotient de par l'alignement des chiffres du dividende et du quotient.
- Renforcement du sens lié à la position des chiffres : « on travaille dans la colonne des centaines, 32 centaines divisé par 4 donnent 8 centaines, le 8 est dans la colonne des centaines ».</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>- Les omissions de 0 intermédiaires ou finaux ne sont pas directement visibles. Il est nécessaire d’écrire m, c, d, u sous les chiffres attendus du quotient pour que cela soit visible.</td>
<td>- Les omissions de 0 intermédiaires ou finaux sont directement visibles de par l’alignement des colonnes. Si un 0 est oublié, on verra directement qu’une des colonnes du quotient est vide.
<u>Version courte par rapport à la version longue :</u>
- Durée de réalisation de la méthode plus courte (si l'élève est en capacité de réaliser des calculs mentaux rapidement et sans erreur), car on enlève la partie de la tâche d'écriture liée aux soustractions intermédiaires posées.
- Allègement de la tâche totale (tâche totale = tâche mentale + tâche graphomotrice) par quasi suppression de la tâche graphomotrice intermédiaire. Tâche graphomotrice réduite, donc possibilité de mieux se centrer sur la tâche mentale, moins "d’éparpillement ; d'égarement" potentiel dans la tâche des élèves (exemple : je fais cette soustraction, ça y est j'ai fini, je dois faire quoi maintenant, pourquoi je faisais ça déjà ?)
- Alourdissement de la tâche mentale dues aux soustractions intermédiaires manquantes, l'élève effectue de tête la soustraction.
- Plus difficile de repérer les erreurs et donc de se corriger.</td>
</tr>
<tr>
<td>Diviseur à
2 chiffres ou plus

7075 : 34</td>
<td>
</td>
<td><u>Version longue :</u>


<u>Version courte :</u></td>
</tr>
</table>

		 La version courte est moins adaptée aux diviseurs à plus d'un chiffre par la possible présence de restes intermédiaires qui ont autant de chiffres que le diviseur. De plus les soustractions intermédiaires compliquées à calculer mentalement doivent être posées à part.
Analyse	Pas de différence supplémentaire spécifique aux diviseurs à plus d'un chiffre.	
Dividende et/ou quotient décimal 137 : 8		**Version longue :**  **Version courte :** 
Analyse	- Il est nécessaire de laisser de l'espace entre le dividende et la barre verticale de la potence au moment où l'on pose la division. L'espace nécessaire n'est pas connu à ce moment-là donc il est facile de laisser trop ou pas assez d'espace.	- Une fois la virgule atteinte, il suffit de continuer à placer les chiffres à la suite. Ainsi il n'y a pas besoin de laisser d'espace au moment où l'on pose la division. - L'alignement des virgules réduit la possibilité d'oublier ou de mal placer la virgule du quotient. - L'alignement des chiffres du dividende et du quotient renforce la compréhension de la valeur de chaque chiffre dans la partie décimale.

b. Recherche expérimentale

On rappelle que cette étude expérimentale ne couvre que les cas de division avec un diviseur à un chiffre et dont le dividende est un entier. Les autres cas seront traités dans la partie recherche documentaire.

Les travaux réalisés dans les deux classes de CM1 serviront à comparer les deux techniques de divisions française et anglaise dans leur version longue ; c'est-à-dire avec les soustractions intermédiaires. Ainsi la seule variante sera la disposition des nombres en jeu dans la division. C'est donc cette différence de disposition qui est visée dans l'étude faite auprès des CM1.

Dans les classes de CM2, ce sont la technique de la potence version longue classique et apprise en CM1, et la technique de l'arrêt de bus version courte qui sont comparées. Ici on cherche à savoir si le fait de ne pas poser les soustractions intermédiaires, dans la disposition de l'arrêt de bus, dans le cas de divisions avec un diviseur à un chiffre peut aider les élèves : Font-ils plus ou moins d'erreurs ? Leur travail s'en trouve-t-il allégé ? Alourdi ? Trouvent-ils que la division posée est plus facile ? Plus difficile ainsi ?

Dans les deux études, on cherche aussi à voir si les observations se retrouvent ou non pour tous les groupes d'élèves.

i. Recueil et exploitation des données

Si mon étude expérimentale avait pu avoir lieu comme prévu, les données issues de travaux de 48 élèves auraient été analysées. Voici la répartition des 48 élèves :

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">CM1
24 élèves venant de 2 classes</td><td colspan="3">CM2
24 élèves venant de 2 classes</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Technique de la potence version longue</td><td colspan="3">CM1 A
12 élèves venant d'une classe</td><td colspan="3">CM2 A
12 élèves venant d'une classe</td></tr>
<tr><td>Groupe 1
4 élèves</td><td>Groupe 2
4 élèves</td><td>Groupe 3
4 élèves</td><td>Groupe 1
4 élèves</td><td>Groupe 2
4 élèves</td><td>Groupe 3
4 élèves</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Technique de l'arrêt de bus</td><td rowspan="2">Version Longue</td><td colspan="3">CM1 B
12 élèves venant d'une classe</td><td colspan="3" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Groupe 1
4 élèves</td><td>Groupe 2
4 élèves</td><td>Groupe 3
4 élèves</td></tr>
</table>

	Version courte		**CM2 B** 12 élèves venant d'une classe		
			Groupe 1 4 élèves	Groupe 2 4 élèves	Groupe 3 4 élèves

Voici les documents que j'aurais récupérés pour 48 élèves et 4 enseignants :

- Une évaluation diagnostique pour chaque élève
- Une évaluation sommative pour chaque élève
- Un questionnaire par élève
- Un questionnaire par enseignant

Exploitation de l'évaluation diagnostique de CM1

De l'évaluation diagnostique CM1, visible dans l'annexe B, j'aurais pu évaluer les connaissances et compétences suivantes, nécessaires pour pouvoir effectuer une division posée.

Tous les résultats trouvés pour chaque indicateur, sauf pour celui de l'exercice 5, auraient été exprimés en % :

Exercice 1 : **Connaissance des tables de multiplication de 1 à 10 et rapidité de réponse** : Nombre de réponses correctes / nombre de questions (=16).

Exercice 2 : **Connaissance des tables de soustraction de 1 à 18 et rapidité de réponse** : Nombre de réponses correctes / nombre de questions (=16).

Exercice 3 : **Capacité à poser et à effectuer une soustraction posée ainsi que de la rapidité d'exécution** : Nombre de réponses correctes / nombre de questions (=8).

Exercice 4 : **Capacité à effectuer des soustractions en ligne dont les résultats sont inférieurs à 10** (les élèves en ont besoin pour faire des divisions avec le diviseur à un chiffre sans poser de soustraction) **et rapidité de réponse** : Nombre de réponses correctes / nombre de questions (=12).

Exercice 5 : **Compréhension du sens de la division** : Classification de la procédure utilisée pour répondre à chaque problème. Classification basée sur les travaux de J. Anghileri[24] que l'on retrouve aussi en partie V-3-b.

- **Technique traditionnelle la potence** (si déjà connue des élèves),
- **Technique des quotients partiels** (si déjà connue des élèves),
- **Méthodes informelles** qui incluent l'utilisation de multiples du diviseur, le fait de trouver la moitié ou le double, dont les calculs sont écrits d'une manière non structurée
- **Stratégies « de bas niveau »** comme l'addition ou la soustraction répétée, le fait de schématiser en distribuant un a un des points ou des tirets dans des groupes, ou de compter des groupes de tirets du nombre du diviseur.
- **Stratégies mentales** quand une solution a été donnée sans calcul écrit.
- **Autres** pour les stratégies qui n'étaient pas claires ou très rares
- **Faux** quand la mauvaise opération était utilisée (la soustraction au lieu de la division par exemple)
- **Manquant** quand il n'y avait pas d'essai de réponse

Exercice 6 : **Compréhension de la valeur des chiffres selon leur position dans un nombre** : Nombre de réponses correctes / nombre de questions (=8).

Exercice 7 : **Capacité à estimer le résultat d'une division et à trouver le nombre de chiffres du résultat** : Nombre de réponses correctes des parties c et d / nombre de questions (=8).

Ces résultats m'auraient simplement servi à constituer les sous-groupes CM1 A groupe 1, 2, 3, les CM1 B groupe 1, 2, 3 ainsi qu'à vérifier la comparabilité des résultats finaux des élèves. Ces résultats n'auraient pas directement servi dans l'analyse finale des résultats.

---

[24] ANGHILERI, Julia. "*Some impacts of the National Numeracy Strategy on students' written calculation methods for division after five years implementation*", University of Cambridge, Faculty of Education. D. Hewitt and A. Noyes, 2005, p. 17-24. Disponible sur www.bsrlm.org.uk.

Exploitation de l'évaluation finale de CM1

L'évaluation finale de CM1 se compose de 10 divisions posées de difficulté croissante et couvrant les différentes difficultés que les élèves peuvent rencontrer lorsqu'ils posent une division à un chiffre. Pour construire cette progressivité dans les questions, je me suis basée sur l'analyse des questions du manuel *J'apprends les maths* [25]. Voici les questions explicitées ci-dessous :

Question	Division	Particularités
1	858 : 6 = 143	Restes intermédiaires, pas de reste final.
2	681 : 5 = 136 avec reste = 1	Restes intermédiaires, reste final.
3	500 : 3 = 166 avec reste = 2	Des 0 intermédiaire et final au diviseur, donc pas besoin d'ajouter des dizaines ou unités du dividende lors des étapes intermédiaires, on divise seulement le reste de l'étape précédente.
4	827 : 4 = 206 avec reste = 3	0 intermédiaire dans le quotient.
5	609 : 2 = 304 avec reste = 1	0 intermédiaire au dividende et au quotient.
6	370 : 8 = 46 avec reste = 2	0 initial au quotient, c'est-à-dire qu'il y a moins de chiffres au quotient qu'au dividende.
7	683 : 4 = 170 avec reste = 3	0 final au quotient.
8	207 : 3 = 69	0 initial au quotient et 0 intermédiaire au dividende.
9	638 : 9 = 70 avec reste 8	0 initial et final au quotient.
10	762 : 7 = 108 avec reste = 6	0 intermédiaire au quotient.

Chacun de ces cas a été vu par les élèves dans les séances d'entrainement de la séquence. En effet, les exemples et questions d'entrainement des vidéos

[25] BRISSIAUD, Rémi et al. Enseigner la division euclidienne. J'apprends les maths. Guide pédagogique. Paris : Retz, 2017, chapitre 3, p. 27-37.

pédagogiques ont été pensés et choisis pour qu'ils puissent refléter ce panel de difficultés. Des copies écran des vidéos sont disponibles en annexe E.

Grâce à l'évaluation finale, j'aurais pu calculer la valeur des indicateurs suivants pour chaque élève :

- **Taux de réussite (%)** = Nombre de questions auxquelles l'élève a répondu correctement / nombre de question (=10)
- **Nombre total d'erreurs**
- **Nombre d'erreurs par types d'erreur** (erreurs classées grâce au classement ci-dessous)

Afin d'être en mesure de comprendre, classer et comparer les erreurs qui peuvent être faites par les élèves lorsqu'ils réalisent une des techniques de division il est nécessaire de se baser sur une typologie d'erreurs.

Le premier tableau ci-dessous recense les types d'erreurs qui peuvent être faites lorsqu'une technique opératoire traditionnelle (potence ou arrêt de bus) est effectuée. Cette typologie est issue de la thèse de M.P. Normandeau : *Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant* [26], qui s'est elle-même basée sur les travaux de J. Brun, F. Conne, G. Lemoyne et J. Portugais[27]. J. Brun et F. Conne ont développé cette typologie d'erreur en effectuant *l'analyse de brouillons d'élèves*, à partir de données collectées dans plus de 40 classes de primaire et de début de secondaire. Leur but n'était pas de classer les erreurs en se basant sur leur fréquence d'apparition mais de dresser un tableau de l'ensemble des erreurs possibles. La même typologie avec des exemples peut être retrouvée en annexe I.

[26] NORMANDEAU, Marie-Pierre. Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant : une analyse didactique en termes de schèmes. Thèse de Ph.D. en sciences de l'éducation option didactique. Montréal : Université de Montréal, Faculté des études supérieures, janvier 2000.

[27] BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. et J. PORTUGAIS (1994). « La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit », dans Cahiers de la Recherche en Éducation, vol. 1, no 1, p.117-132.

1. Erreurs en rapport avec le contrôle des relations dividende / diviseur / quotient / reste
1.1 Traitement du dividende
1.1.a Segmentation : Abaisser d'un coup une partie du dividende ce qui entraîne l'absence des zéros intercalaires au quotient.
1.1.b Mettre 1 au quotient à la place de 0 parce qu'un dividende partiel est inférieur au diviseur.
1.1.c Faire une suite de soustractions successives ce qui entraine une suite de 1 au quotient
1.1.d Un même dividende partiel divisé deux fois ce qui entraîne l'écriture successive de 2 chiffres au quotient.
1.2 Traitement du quotient
Le choix d'un quotient inférieur implique un dividende partiel plus grand que le diviseur. L'élève poursuit le cycle de la division en abaissant à nouveau un chiffre d'où :
1.2.a L'écriture d'un nombre à deux chiffres au quotient
1.2.b L'écriture d'une suite de neuf
1.3 Traitement du diviseur
1.3 Le diviseur est découpé en une suite de chiffres non emboîtés.
1.4 Traitement du reste
1.4.a Reste final plus grand ou égal au diviseur
1.4.b Reste final divisé bien que plus petit que diviseur, d'où un 0 supplémentaire au quotient.
2. Erreurs en rapport avec les opérations intermédiaires
2.1 Erreurs de soustraction
2.1.a L'inversion
2.1.b Erreur de table (-)
2.1.c Les emprunts
2.2 Erreurs de multiplication
2.2.a Erreur sur le nombre d'additions successives lors de la recherche d'un produit
2.2.b Erreur de table (x)
3. Erreurs en rapport avec le placement des chiffres dans le diagramme de la division
3.1 Placement du dividende
3.1.a N'abaisse pas le chiffre de la colonne et arrête
3.1.b N'abaisse pas le chiffre de la colonne et inscrit 0 au quotient.
3.1.c Abaisse un 0 (erreur liée aux divisions des nombres décimaux).
3.2 Inversions
3.2.a Le reste est écrit à l'emplacement du quotient.
3.2.b Le produit est écrit à l'emplacement du quotient.
3.2.c Le dividende est découpé en allant de droite à gauche en conservant la même technique de placement des chiffres dans le quotient.

Exploitation du questionnaire élève de CM1

Du questionnaire élève de CM1 j'aurais pu donner des valeurs aux indicateurs suivants pour chaque élève. Le questionnaire est disponible en annexe G.

Question 1 : **Rapport de l'élève à la division** : positif/négatif

Question 2 : **Perception de de la division** : Très difficile / assez difficile / assez facile / très facile

Question 3 : **Compréhension du sens de la division** : partage / groupement / autre / faux

Question 4 : **Capacité à vérifier un calcul et à trouver une erreur** : erreur trouvée / recherche d'erreur entreprise mais sans trouver l'erreur / pas de recherche

Exploitation du questionnaire enseignant de CM1

Le questionnaire enseignant n'aurait pas été exploité de la même façon que les données issues des travaux des élèves. Les données auraient été mises en relation avec les données des élèves mais c'est une analyse quantitative qui aurait été faite avec les données des élèves alors que les données issues des questionnaires enseignant auraient permis de faire une analyse qualitative.

Les données du questionnaire enseignant m'aurait notamment permis de mieux comprendre :

Question 1 : **L'attitude générale des élèves** face à l'apprentissage de la technique, et selon les groupes de besoin.

Question 2 : Les **difficultés** rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage.

Question 3 : Le **lien entre la technique opératoire et la construction du sens** de la division pour les élèves.

Question 4 : **L'avis général de l'enseignant (avantages et inconvénients)** qui a enseigné **la technique de l'arrêt de bus** en comparaison de la technique de la potence.

Exploitation de l'évaluation diagnostique de CM2

L'évaluation diagnostique des élèves de CM2 est constituée des 10 mêmes questions que l'évaluation finale des élèves de CM1, mais les élèves doivent utiliser la méthode de la potence, apprise l'année précédente pour répondre aux questions. Après corrections et classement des erreurs en utilisant le classement donné plus haut, nous aurions obtenus les valeurs des indicateurs suivants :

- **Taux de réussite (%)** = Nombre de questions auxquelles l'élève a répondu correctement / nombre de questions (=10)
- **Nombre total d'erreurs**
- **Nombre d'erreurs par type d'erreur** (erreurs classées grâce au classement donné plus haut)

Ces résultats m'auraient servi à constituer les sous-groupes CM2 A groupe 1, 2, 3, les CM2 B groupe 1, 2, 3 ainsi qu'à vérifier la comparabilité des résultats finaux des élèves. Ces résultats n'auraient pas directement servi dans l'analyse finale des résultats.

Exploitation de l'évaluation finale de CM2

Les questions de l'évaluation finale sont les mêmes que celles de l'évaluation diagnostique mais les élèves doivent répondre avec la technique qu'on leur a donné lors de la séquence de révision (soit la technique de l'arrêt de bus version courte soit la technique de la potence). Les valeurs des mêmes indicateurs que pour l'évaluation diagnostique auraient été obtenues.

- **Taux de réussite (%)** = Nombre de questions auxquelles l'élève a répondu correctement / nombre de question (=10)
- **Nombre total d'erreurs**
- **Nombre d'erreurs par types d'erreur** (erreurs classées grâce au classement donné plus haut)

L'évaluation finale pour les élèves ayant fait la séquence de révision avec la méthode de la potence aurait donc été la même que l'évaluation diagnostique. Ce groupe est un groupe témoin permettant de voir quels progrès les élèves ont fait en réutilisant la technique qu'ils connaissaient déjà.

Exploitation du questionnaire élève de CM2

Le questionnaire pour les élèves de CM2 reprend les questions du questionnaire CM1 avec une question supplémentaire permettant aux élèves de choisir la technique qu'ils préfèrent entre la technique de la potence vue précédemment et la technique de l'arrêt de bus version courte nouvellement apprise. Cette question n'est pas posée aux élèves qui ont révisé les divisions avec la technique de la potence.

Exploitation du questionnaire enseignant de CM2

De même que le questionnaire enseignant de CM1, le questionnaire enseignant CM2 aurait été utilisé dans le cadre d'une analyse qualitative et non quantitative. Les questions qu'on y retrouvent visent à comprendre les mêmes points que ceux du questionnaire de CM1 mais avec une vision comparative des deux techniques. De ce fait, le questionnaire aurait été rempli uniquement par l'enseignant ayant utilisé la méthode de l'arrêt de bus dans sa séquence.

Le questionnaire enseignant CM2 peut être trouvé en annexe H.

ii. Analyse des données

Comme nous l'avons décrit plus haut, seuls les résultats des évaluations finales et des questionnaires élèves auraient été exploités dans cette partie, afin d'apporter des réponses à nos questions et hypothèses. En effet, les données des évaluations diagnostiques ne nous auraient servi qu'à la constitution des groupes de besoin et à vérifier la comparabilité des groupes.

Au fur et à mesure de la correction des évaluations finales et de la lecture des questionnaires, les valeurs des variables auraient été rentrées dans un tableur, chaque élève ayant ses données sur une même ligne et les valeurs des différentes variables étant placées dans les colonnes. Plusieurs types d'analyses auraient alors été conduites.

Quand cela est possible, des moyennes auraient été calculées pour chaque sous-groupe d'élève. Par exemple, on aurait calculé le nombre moyen d'erreurs liées à l'oubli d'un 0 intermédiaire pour les CM1 A groupe 1. Des moyennes plus générales auraient elles aussi été calculées, comme par exemple le nombre moyen d'erreurs, tous types d'erreurs confondues, des CM1 A. Les moyennes des groupes comparables auraient alors été comparées pour chercher à vérifier les questions liées aux différentes hypothèses émises dans l'analyse à priori telles que : Les élèves qui utilisent la technique de l'arrêt de bus font-ils moins d'erreur que ceux qui utilisent la technique de la potence ?

Dans le cas de données non numériques, on aurait calculé le pourcentage de chaque réponse donnée pour les différents groupes et sous-groupes et on aurait cherché à observer des tendances telles que : « Plus de 75% des élèves de CM2 qui ont testé la technique de l'arrêt de bus la préfèrent à la technique de la potence ».

D'une manière générale, il aurait fallu garder en tête que cette analyse aurait été faite à partir d'un échantillon d'élève assez réduit (n = 48). Faire la même étude avec un nombre d'individus beaucoup plus grand aurait permis de tirer des conclusions plus significatives.

c. Les apports de la recherche

Dans son article *Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels*[28], Guy Brousseau compare et analyse plusieurs techniques opératoires de division. Selon lui l'enseignement du calcul élémentaire et en particulier celui des techniques opératoires posées n'a que très peu évolué. En effet, depuis des siècles et à travers le monde, l'homme utilise un grand nombre de techniques et de moyens de calcul différents. L'expérience de cette variété aurait dû permettre aux hommes de faire évoluer leur façon d'enseigner au fil du temps pour « proposer aux élèves les moyens les plus adaptés, les plus sûrs et les plus performants » pour effectuer des calculs. Selon G. Brousseau, « il n'en est rien ».

Deux techniques sont exposées et comparées dans cet article. La première, la « division classique » correspond à la technique que j'appelle « la division avec la technique de la potence ». La seconde, la « division ergonomique » est très proche de la « division avec la technique de l'arrêt de bus version longue »,

[28] BROUSSEAU, Guy, Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

notamment dans la disposition des nombres les uns par rapport aux autres.

Dans la technique de la potence, afin de déterminer le nombre de chiffre du quotient, les élèves doivent passer par une estimation. Dans la technique de l'arrêt de bus, le nombre de chiffres du quotient n'a pas à être calculé au préalable. En effet, l'alignement des colonnes des chiffres du dividende et du quotient permet de trouver ce nombre lorsque le premier chiffre (hors 0) du quotient est trouvé.

Par exemple, dans 1536 : 8, on place d'abord un 0 dans la colonne des milliers car il n'y a pas assez de milliers pour les partager en 8. On a donc 15 centaines à distribuer. On place ainsi un 1 dans la colonne des centaines, puisque dans cette technique, il suffit de placer le chiffre du quotient dans l'alignement du chiffre des « unités » du nombre sur lequel on est en train de travailler, ici on travaille avec le nombre de centaine 15, on place donc le chiffre du quotient dans la même colonne que celle du 5. Le quotient est donc compris entre 199 et 100, il aura donc 3 chiffres.

Le premier chiffre est dans la colonne des centaines.

Le quotient aura donc 3 chiffres.

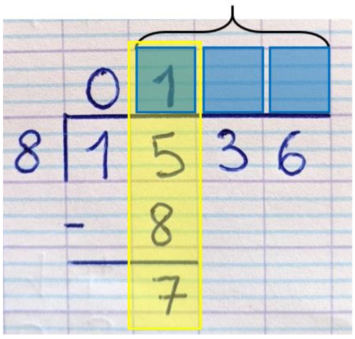


Figure V-4 - Trouver le premier chiffre du quotient permet de visualiser directement le nombre de chiffres du quotient avec la technique de l'arrêt de bus.

Selon G. Brousseau, cette difficulté de la division posée classique est source d'inégalités entre les élèves puisqu'elle met directement en difficulté les élèves les plus faibles : « Les élèves qui pensent à – et qui savent – contrôler l'ordre de grandeur du résultat peuvent corriger leurs erreurs. Les autres ont souvent de mauvais résultats. »[29]

[29] Ibidem 28

Cette compétence, bien que très intéressante et utile dans d'autres domaines, vient s'ajouter à la liste des prérequis, déjà longue, nécessaires pour effectuer une division posée classique.

Avant d'apprendre la division posée, certains élèves ne sont pas encore en mesure d'estimer facilement l'ordre de grandeur du quotient et donc le nombre de chiffres qui le composent. *Cette affirmation aurait été mise en relation avec les résultats suivant de mon étude expérimentale : pourcentage d'élèves faisant au moins 30% d'erreurs sur les questions d'estimations de l'évaluation diagnostique.*

Ils se retrouvent ainsi, au moment de l'apprentissage de la division posée, qui est déjà complexe, à apprendre aussi à estimer l'ordre de grandeur du quotient.

Concernant les différences entre l'utilisation de la technique de l'arrêt de bus version courte et version longue, une enquête anglaise publiée en 2011 par OFSTED[30], l'organisme parlementaire chargé de l'inspection des écoles en Angleterre, nous donne des éléments de réponse. Au cours de cette enquête, dont le rapport est intitulé *Good practice in primary mathematics*, OFSTED s'est intéressé la manière d'enseigner dans 20 écoles qui avaient de très bons résultats en mathématiques et a cherché à faire émerger les facteurs communs lié à l'enseignement des mathématiques.

Dans ces écoles, la plupart des élèves de CM1 et CM2 utilisaient la technique de l'arrêt de bus version courte avec confiance pour faire des divisions avec un diviseur a un chiffre. Peu d'écoles cependant étaient satisfaites de leur façon d'enseigner la division avec les soustractions intermédiaires posées pour les diviseurs à deux chiffres. En effet, il est écrit dans le rapport qu'il n'est pas clair pourquoi des élèves qui sont capables de faire une division sans soustractions posées se retrouvent confus face à une division pour laquelle ils doivent suivre les mêmes étapes mais en posant les soustractions intermédiaires. Selon

[30] OFSTED. « Good practice in primary mathematics". Novembre 2011 [consulté le 24.04.2020]. Disponible sur le Web :https://www.gov.uk/government/publications/good-practice-in-primary-mathematics-evidence-from-successful-schools

OFSTED, le problème vient de la tâche d’écriture et non de la division en elle-même. Certaines écoles continuaient à employer la version courte de la technique de l’arrêt de bus pour faire ces divisions avec un diviseur à deux chiffres. Cela nécessite une organisation claire de la présentation puisque des restes intermédiaires à deux chiffres doivent être reportés sur les chiffres suivants lors des étapes intermédiaires. Certaines écoles préfèrent retarder l’apprentissage de la version longue de la technique de l’arrêt de bus jusqu’en 6ème, âge auquel les élèves ont moins de difficultés à l’appliquer.

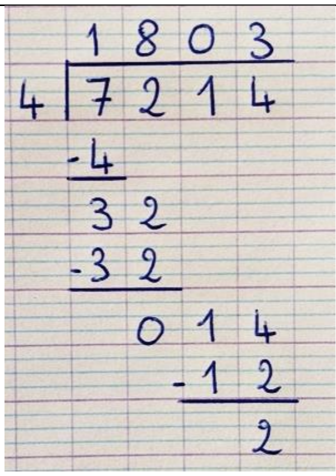
3. Comparaison d’une technique traditionnelle de division à la technique des quotients partiels

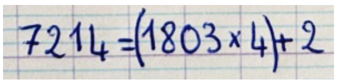
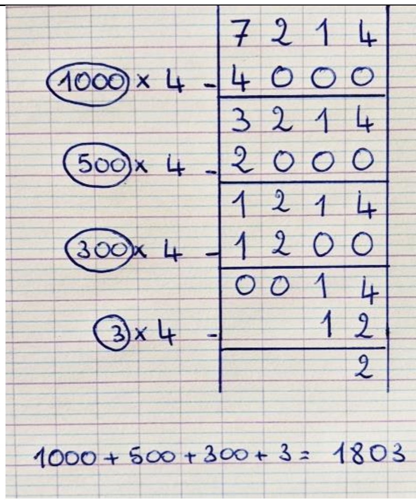
a. Analyse a priori des deux techniques

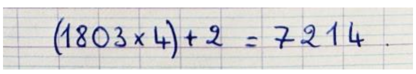
Comme précédemment nous allons nous baser sur la réalisation d’exemples pour effectuer notre analyse a priori. Pour la technique traditionnelle, nous travaillerons avec la technique de l’arrêt de bus mais la même analyse aurait pu être faite avec la technique de la potence. En effet ce qui est étudié ici n’est pas la différence de placement entre les nombres en jeu mais bien la différence entre l’algorithme traditionnel de division basé sur les chiffres du dividende et la technique des quotients partiels basées sur des calculs effectués sur le dividende en tant que nombre.

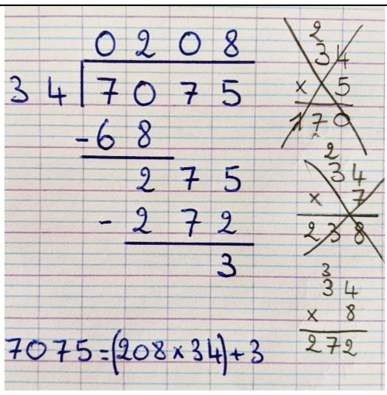
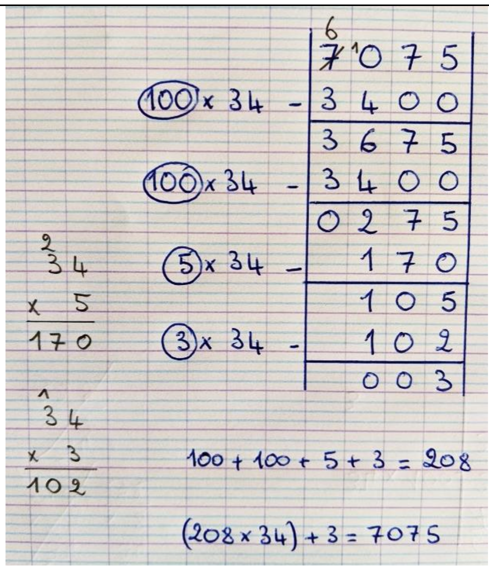
<table>
<tr><th></th><th>Technique traditionnelle</th><th>Technique des quotients partiels</th></tr>
<tr><td>Diviseur à

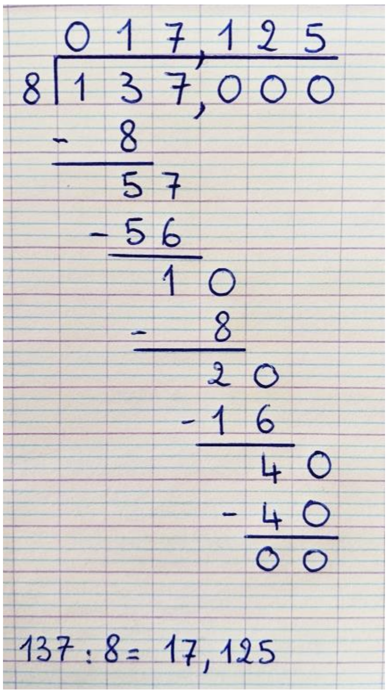
1 chiffre

7214 : 4</td><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Analyse	- Les calculs se font sur les chiffres et non sur les nombres. - Semble plus rapide si on maitrise les tables de multiplication. - N'est pas possible si on ne maitrise pas les tables de multiplication. - Les soustractions sont faites sur des nombres à 2 chiffres maximum. - Si la technique opératoire est utilisée manière automatique, il est possible que le sens de la division ne soit pas pris en compte ce qui peut engendrer des erreurs de calcul.	- Les calculs se font sur les nombres et non sur les chiffres. - Permet de tâtonner si besoin, chaque élève peut aller à son rythme (peut repérer les plus grands multiples directement ou non). Cette technique semble plus accessible à tous les élèves car elle peut être effectuée avec différents niveaux d'efficacité. - Beaucoup de soustractions sur des grands nombres à effectuer. - Nécessité de maitriser les tables de multiplications et les multiplications par des multiples de 10 (exemple : ….. x 4 = 1200) pour arriver à la « version experte » c'est-à-dire avec le moins de quotients partiels possible. - Le sens division-groupement est clair dans cette disposition : diviser c'est trouver combien de fois un nombre est contenu dans un autre. - Cette technique est facile à comprendre et découle de ce que les élèves feraient d'eux même pour effectuer une division de manière informelle.
Diviseur à **2 chiffres ou plus** 7075 : 34		

Analyse	Les essais pour trouver le plus grand multiple à chaque étape ne sont pas utilisés dans le calcul, ils font perdre du temps et ils peuvent être perçus comme des erreurs.	Les essais pour trouver le plus grand multiple font partie du calcul et lui sont utile. Ils ne sont pas vécus comme une perte de temps ou comme des erreurs.
Dividende et/ou quotient décimal 137 : 8	 	
Analyse	La technique s'adapte facilement pour des divisions décimales.	Cette technique est très peu adaptée aux divisions décimales car elle demande une très bonne maitrise des multiplications par des nombres décimaux inférieurs à 1 (par exemple : ... x 8 = 0,040)

b. Les apports de la recherche

En 2005, Julia Anghileri, enseignante et chercheuse à l'université de Cambridge publie un rapport[31] s'intéressant à l'impact que les recommandations du rapport *National Numeracy Strategy* ont pu avoir sur l'enseignement et l'apprentissage de la technique opératoire de la division dans les classes de CM1 en Angleterre. Rappelons que le rapport National Numeracy Strategy visait à encourager les

[31] ANGHILERI, Julia. "*Some impacts of the National Numeracy Strategy on students' written calculation methods for division after five years implementation*", University of Cambridge, Faculty of Education. D. Hewitt and A. Noyes, 2005, p. 17-24. Disponible sur www.bsrlm.org.uk.

enseignants à mettre l'accent sur les stratégies mentales, à retarder l'introduction des algorithmes traditionnels (tel que l'arrêt de bus) et à développer plus de flexibilité dans les méthodes de calcul. En juin 1998 J. Anghileri a demandé à 275 élèves de CM1, venant de 10 écoles différentes de répondre sur un livret d'évaluation à 10 questions impliquant chacune une division. 5 de ces questions étaient écrites sous forme de problème et les 5 autres étaient des divisions « simples », certaines divisions avaient un diviseur à 1 chiffre, d'autres à 2 chiffres, certaines avaient un reste et d'autres non. En juin 2003, soit 5 ans après l'introduction des recommandations nationales sur l'enseignement du calcul, elle a demandé à 308 élèves de CM1 de ces mêmes écoles de répondre aux dix mêmes questions. En corrigeant les livrets d'évaluation elle classe les stratégies employées par les élèves en huit catégories :

- **Technique traditionnelle de l'arrêt de bus**,
- **Technique des quotients partiels**,
- **Méthodes informelles** qui incluent l'utilisation de multiples du diviseur, le fait de trouver la moitié ou le double, dont les calculs sont écrits d'une manière non structurée
- **Stratégies « de bas niveau »** comme l'addition ou la soustraction répétée, le fait de schématiser en distribuant un a un des points ou des tirets dans des groupes, ou de compter des groupes de points du nombre du diviseur.
- **Stratégies mentales** quand une solution a été donnée sans calcul écrit.
- **Autres** pour les stratégies qui n'étaient pas claires ou très rares
- **Faux** quand la mauvaise opération était utilisée (la soustraction au lieu de la division par exemple)
- **Manquant** quand il n'y avait pas d'essai de réponse

La première chose qu'elle constate est une légère amélioration des résultats qui sont passés de 43% en 1998 à 48% en 2003. Les techniques employées et donc enseignées ont, elles aussi, évolué. Alors que la technique de l'arrêt de bus était employée dans 49% des cas en 1998, elle n'était plus employée que dans 19% des cas en 2003. Les stratégies informelles ainsi que la technique des quotients partiels quant à elles ont été plus utilisées en 2003 qu'en 1998. Cependant, l'amélioration des résultats ne peut pas être directement corrélée avec l'utilisation des techniques informelles ou de la technique des quotients partiels à la place de la technique traditionnelle de l'arrêt de bus. En effet, les pourcentages des techniques employées d'une école à l'autre sont très disparates. La technique des quotients partiels par exemple a été employée à 44% dans certaines écoles alors qu'elle était totalement absente dans d'autres. Les deux écoles ayant obtenu les scores les plus élevés ont des répartitions très différentes quant à l'utilisation de stratégies. Alors qu'une des deux écoles n'a quasiment utilisé que la technique traditionnelle de l'arrêt de bus (66%), l'autre a utilisé principalement la technique des quotients partiels (44%) ainsi que la technique de l'arrêt de bus (29%). J. Anghileri conclu de son étude que la réussite ne semble pas être le reflet d'un choix de stratégie particulière. Elle remarque cependant que l'utilisation de la technique des quotients partiels à la place de la technique de l'arrêt de bus montre un plus grand progrès lorsque le diviseur a deux chiffres (si on compare avec les diviseurs à un chiffre). Enfin, son étude permet de montrer que les élèves de CM1 réussissent mieux les divisions posées lorsqu'on leur a enseigné comment organiser leurs calculs d'une manière structurée, que ce soit avec une méthode traditionnelle ou la méthode des quotients partiels.

En 2002, J. Anghileri, conjointement avec les deux chercheurs néerlandais M. Beishuizen et K. Van Putten a publié les résultats d'une autre étude[32] dans laquelle la comparaison des deux techniques de divisions évoquées précédemment est plus directe. Dans celle-ci, les données de deux groupes d'élèves de CM1 sont comparées. Le premier groupe est constitué de 275 élèves anglais de 10 écoles différentes et le second de 259 élèves néerlandais de 10 écoles différentes. Les écoles ont été choisies de manière à être aussi comparables que possible et les élèves ont une même moyenne d'âge d'un groupe à l'autre. Comme dans l'étude précédente, les élèves ont 10 exercices à effectuer, 5 d'entre eux sont des problèmes mettant en jeu une division et les 5

[32] ANGHILERI, Julia, BEISHUIZEN, Meindert, VAN PUTTEN, Kees. "From informal strategies to structured procedures: Mind the gap!", Educational Studies in Mathematics. 2002, 49, 149-170.

autres sont des divisions simples. Certaines questions comportent des diviseurs à 1 chiffre, d'autres à 2 chiffres. Les nombres en jeu ont été choisis de manière à laisser aux élèves la possibilité d'utiliser des méthodes intuitives s'ils le souhaitent. Les élèves font cette évaluation à deux moments de l'année, en janvier et en juin. L'évaluation n'est pas tout à fait la même entre ces deux dates puisque les divisions contenues dans les problèmes se retrouvent dans les questions de division simple et inversement, les divisions simples de l'évaluation de janvier se retrouvent dans les problèmes de l'évaluation de juin. Les questions de l'évaluation de janvier peuvent être trouvées en annexe K. Entre janvier et juin, tous les élèves ont continué à apprendre et à renforcer la technique de division sur laquelle ils travaillaient.

D'une manière générale, les résultats des évaluations des élèves néerlandais sont plus élevés aussi bien en janvier qu'en juin que ceux des élèves anglais. La différence entre la moyenne des résultats des élèves néerlandais et celle des élèves anglais est plus importante en juin qu'en janvier. J. Anghileri remarque que la différence entre les résultats est d'autant plus marquée pour les questions qui comportent un diviseur à deux chiffres. Les diviseurs à 2 chiffres ne sont normalement pas rencontrés par les élèves de CM1 en Angleterre. Les élèves néerlandais à qui on a enseigné la technique des quotients partiels qui est, selon J. Anghileri, aussi appropriée pour les divisions dont le diviseur a un chiffre que pour les divisions dont le diviseur a deux chiffres, ont ainsi eu plus de facilités à répondre à ces questions.

Généralement, elle remarque aussi que les traces de calcul des élèves néerlandais sont plus structurées et organisées que celles des élèves anglais, notamment sur des procédures s'apparentant à la soustraction répétée. Elle constate que quel que soit leur niveau d'efficacité en utilisant cette méthode, les élèves savent comment organiser leurs calculs. Une progression évidente est visible, de la stratégie inefficace jusqu'à la version « experte » de la technique des quotients partiels. Selon J. Anghileri, cela illustre l'approche néerlandaise de faire utiliser une même méthode à différents niveaux d'efficacités par différents élèves.

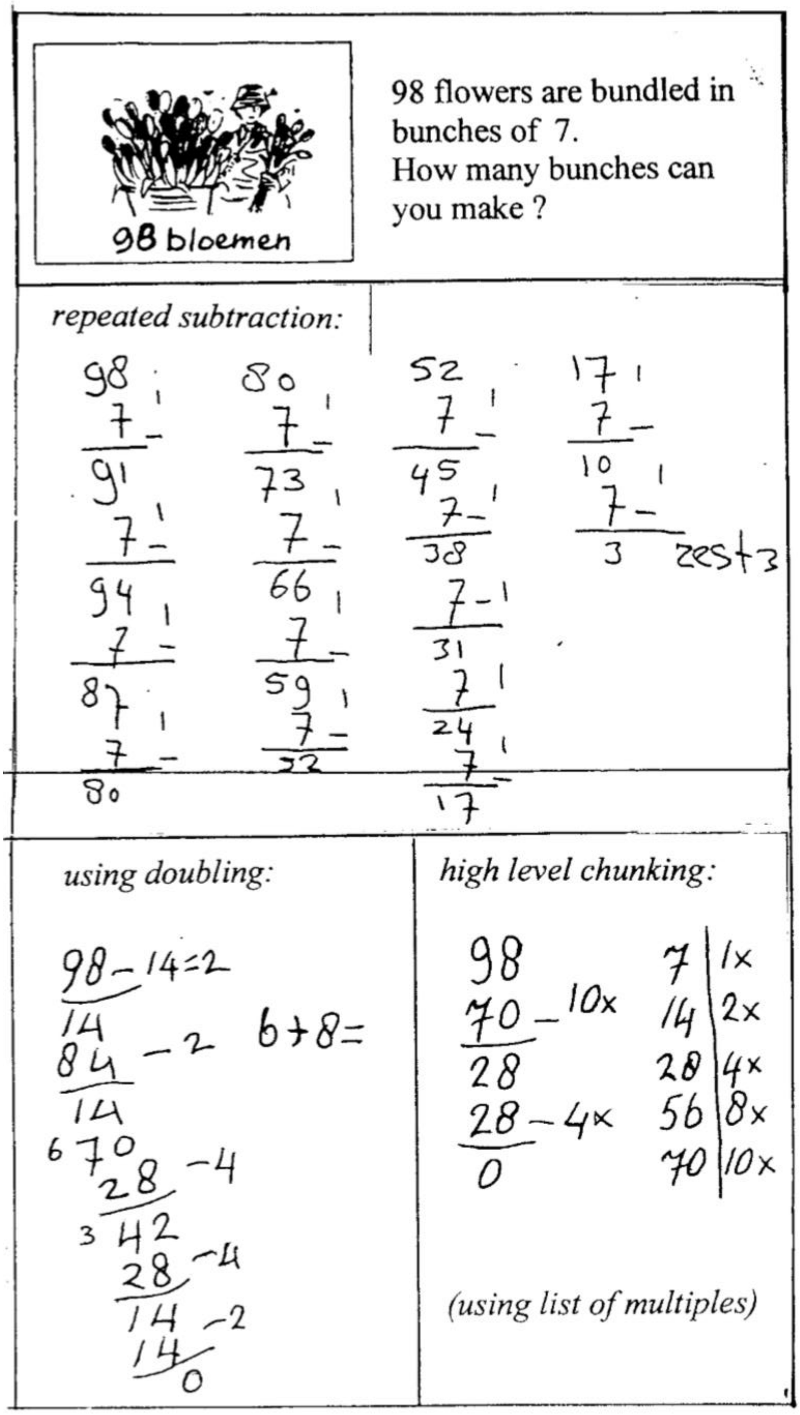


Figure V-5 - Progression des stratégies utilisées par les élèves néerlandais[33]

En comparaison, les élèves anglais qui ont cherché à utiliser une procédure de soustraction de multiples du diviseur, pouvant être vue comme plus naturelle par les élèves, ont eu des difficultés à organiser leurs calculs. En effet, on ne leur a

[33] Ibidem 32

appris à structurer leurs calculs que pour la technique traditionnelle standardisée de l'arrêt de bus. Cette désorganisation montre la rupture qui peut exister entre les méthodes de soustraction répétées qui semblent intuitives en début d'apprentissage et une technique traditionnelle telle que l'arrêt de bus ou la potence.

La technique traditionnelle de l'arrêt de bus a été largement employée par les élèves anglais. Bien qu'elle donne une structure aux calculs, elle peut aussi conduire à des erreurs caractéristiques des techniques traditionnelles telles que l'omission de zéros, le fait de traiter les chiffres du dividende de manière séparée ou des erreurs liées à la mauvaise compréhension et donc une mauvaise utilisation des restes intermédiaires. J. Anghileri remarque que ces types d'erreurs sont plus fréquent dans l'évaluation de juin, lorsque la technique est faite de manière plus automatique et donc moins réfléchie.

Un point important sur lequel J. Anghileri revient plusieurs fois dans son étude est la différence d'organisation dans les calculs des élèves néerlandais et anglais. Alors que dans beaucoup de cas les élèves néerlandais commencent par écrire une liste des multiples du diviseur (x2, x4, x8, x10), les élèves anglais, lorsqu'ils utilisent une technique proche de celle des quotients partiels, montrent souvent des calculs désorganisés. Pour certains élèves, ce manque de structure semble les amener à perdre le fil de leurs calculs, d'autres élèves montrant des calculs corrects, n'arrivent pas à extraire la réponse de leurs calculs. Nous retiendrons ici l'importance d'enseigner une technique de manière structurée, quelle que soit la technique choisie.

Afin de comparer l'efficacité des stratégies utilisées pour répondre aux questions, J. Anghileri, classe les stratégies en neuf catégories. Certaines sont similaires à l'étude précédente, certaines sont différentes. On ne décrira ci-dessous que les nouvelles catégories si on compare à l'étude précédente :

- **Stratégies « de bas niveau »** (noté **1(S)** dans le tableau de résultats ci-après)
- **Nombres cassés** (noté **2(P)** dans le tableau de résultats) lorsque les opérations ont été faites sur les chiffres séparés des nombres en jeu (84 :

14 calculé comme 8 : 1 et 4 : 4) ou que le dividende a été séparé en milliers, centaines, dizaines et unités avant d'être divisé (1256 : 6 calculé comme 1000 : 6, 200 : 6, 50 : 6, 6 : 6). Ces stratégies ont en commun de se baser sur un « cassage » du nombre en se rapportant à la valeur des chiffres.

- **Technique des quotients partiels « de bas niveau »** (noté **3(L)** dans le tableau de résultats) qui incluent l'utilisation de petits multiples du diviseur, parfois de doubles, dans des calculs souvent longs et avec une efficacité relative.
- **Technique des quotients partiels « de haut niveau »** (noté **4(H)** dans le tableau de résultats) lorsque les multiples choisis permettent un calcul assez court et efficace (par exemple, choisir 150 lors d'une division par 15)
- **Technique traditionnelle de l'arrêt de bus** (noté **5(AL)** dans le tableau de résultats)
- **Stratégies mentales** (noté **6(ME)** dans le tableau de résultats)
- **Faux** (noté **7(WR)** dans le tableau de résultats)
- **Autres** (noté **8(UN)** dans le tableau de résultats)
- **Manquant** (noté **o** dans le tableau de résultats)

Le tableau ci-dessous, issu de l'étude de J. Anghileri, regroupe les types de stratégies utilisées (*attempt*) par les élèves anglais et néerlandais ainsi que le taux de succès (*correct*) lors des évaluations de janvier (*test 1*) et de juin (*test 2*). Par exemple, les deux premières cases du tableau se lisent ainsi : Lors de l'évaluation de janvier, 17% des stratégies utilisées par les élèves anglais sont des stratégies de bas niveau. Lors de l'évaluation de janvier, les élèves anglais ont répondu correctement à 7% des questions en utilisant des stratégies de bas niveau.

Percentage of pupils using each strategy and success rates (in brackets)

	English				Dutch			
	test 1		test 2		test 1		test 2	
	attempt	correct	attempt	correct	attempt	correct	attempt	correct
1(S)	17%	7%	11%	6%	10%	4%	1%	1%
2(P)	5%	0%	3%	0%	7%	1%	6%	2%
3(L)	6%	2%	8%	2%	16%	7%	6%	5%
4(H)	8%	5%	7%	5%	41%	28%	69%	51%
5(AL)	38%	18%	49%	25%	4%	1%	3%	1%
6(ME)	9%	5%	11%	6%	9%	6%	11%	7%
7(WR)	3%	0%	2%	0%	5%	0%	1%	0%
8(UN)	4%	1%	3%	0%	2%	0%	1%	0%
o	9%	0%	8%	0%	8%	0%	2%	0%
total	100%	38%	100%	44%	100%	47%	100%	68%

Figure V-6 – Pourcentages des élèves utilisant chaque stratégie de division et taux de réussite associé.[34]

En analysant les données ci-dessus on peut voir qu'il y a eu une amélioration des résultats entre les évaluations de janvier et de juin, aussi bien pour les élèves anglais qui sont passés de 38% à 44% (+ 6%) de réponses correctes que pour les élèves néerlandais qui sont passés de 47% à 68% (+ 21%) de réponses correctes. Les élèves néerlandais ont utilisé la technique des quotients partiels « de haut niveau » pour répondre à 69% des questions de l'évaluation de juin, 51% des questions ont été répondues correctement grâce à cette méthode. Du côté des élèves anglais, c'est la technique de l'arrêt de bus qui domine avec 49% des réponses utilisant cette technique, cependant, seules 25% des questions ont reçu des réponses correctes grâce à cette technique. On constate également que le pourcentage de stratégies intuitives mais de basse efficacité (1(S) + 2(P) + 3(L)) utilisées a diminué pour les deux groupes d'élèves entre janvier et juin. Cette diminution a cependant été bien plus importante pour les élèves néerlandais (-20%) que pour les élèves anglais (-6%) ce qui laisse supposer que

[34] Ibidem 32

la technique que l'on a appris à structurer en classe aux élèves néerlandais a mieux correspondu à leur manière de faire « naturelle ».

De ces résultats, il n'est pas possible de tirer une conclusion quant à l'efficacité de la technique des quotients partiels comparée à celle de la technique de l'arrêt de bus. En effet les résultats des élèves néerlandais supérieurs à ceux des élèves anglais pourraient être expliqués par le fait que les élèves anglais n'ont pas encore appris à faire des divisions avec des diviseurs à deux chiffres et que la technique de l'arrêt de bus version courte qu'ils connaissent n'est pas appropriée lorsque le diviseur a deux chiffres.

Ainsi, J. Anghileri a choisi de se concentrer sur les données provenant des questions n'ayant qu'un seul chiffre au diviseur. Les taux de réussite (en %) pour chacune de ces questions sont donnés dans le tableau ci-dessous. Les nombres entre parenthèse sont les pourcentages d'amélioration entre l'évaluation de janvier et celle de juin.

Success rates for the problems involving division by a single digit

	96÷6	1256÷6	98÷7	1542÷5	Average
English test 1	69	22	60	31	45.5
Dutch test 1	73	27	62	27	47.25
English test 2	74 (+5)	24 (+2)	81 (+21)	41 (+10)	55 (+9.5)
Dutch test 2	81 (+8)	56 (+29)	84 (+22)	63 (+36)	71 (+23.5)

Figure V-7 – Taux de réussite pour les divisions dont le diviseur n'avait qu'un seul chiffre. [35]

Il est intéressant de constater que lors de la première évaluation, les moyennes des deux groupes d'élèves étaient très proches quand on ne regarde que ces 4 questions (écart de 1,75%). Lors de la seconde évaluation en revanche, bien qu'il y ait eu une amélioration pour les deux groupes, on remarque un écart bien plus important (16%).

Dans les deux groupes, les élèves ont mieux répondu lorsque le dividende avait 2 chiffres seulement et leurs progressions ont été similaires entre janvier et juin :

[35] Ibidem 32

+5% et +8% pour la question 96 : 6 et 21% et 22% pour la question 98 : 7.

On voit en revanche que cette similarité de progrès ne se retrouve pas lorsque le diviseur est un nombre à 4 chiffres. En effet, là où le pourcentage de réponses correctes a augmenté de 29% et 36% pour le groupe d'élèves néerlandais, il n'a augmenté que de 2% et 10% pour les élèves anglais.

Ces résultats expliquent la différence générale observée mais surtout, ils nous apprennent que la technique des quotients partiels, grandement employée par les élèves néerlandais, donne de meilleurs résultats que la technique traditionnelle de l'arrêt de bus lorsque le dividende est un grand nombre et que le diviseur n'a qu'un seul chiffre.

Le tableau ci-dessous donne, pour chacune des questions dont le diviseur a un chiffre, les pourcentages d'utilisation par les élèves anglais et néerlandais des deux techniques les plus utilisées, la technique des quotients partiels et celle de l'arrêt de bus, dans l'évaluation de juin. Les nombres entre parenthèses sont les pourcentages de réponses correctes.

Par exemple, la première case se lit ainsi : dans l'évaluation de juin, à la question 96 : 6, 66% des élèves anglais ont utilisé la technique de l'arrêt de bus pour répondre à la question. 51% de leurs réponses données avec cette méthode étaient correctes.

Percentage use of most popular strategies for test 2

	Strategy	96÷6	1256÷6	98÷7	1542÷5
English test 2	traditional algorithm	66 (51)	67 (21)	66 (52)	70 (34)
Dutch test 2	repeated subtraction of large chunks	78 (69)	72 (50)	76 (69)	71 (52)

The figure in brackets is the percentage of correct attempts.

Figure V-8 – Pourcentages d'utilisation des stratégies les plus communes et leurs taux de réussite associés.[36]

[36] Ibidem 32

Lors de l'utilisation de la technique de l'arrêt de bus, on peut voir que les pourcentages de réussite des divisions avec un dividende à quatre chiffres sont plutôt bas (21% et 34%). Avec la technique des quotients partiels, ces taux de réussites sont bien plus haut (50% et 52%). Dans les deux cas, les pourcentages de réussite lorsque les dividendes ont quatre chiffres sont moins importants que lorsque le dividende n'en a que deux. Ces différences sont cependant réduites dans le cadre de l'utilisation de la technique des quotients partiels. En effet, elles sont de l'ordre de 20% dans ce cas alors qu'elles sont proches de 30% dans le cas de la technique de l'arrêt de bus.

Enfin d'une manière générale, on peut voir que les taux de réussite avec la technique des quotients partiels sont supérieurs à ceux de la technique de l'arrêt de bus dans le cas d'un diviseur à 1 chiffre.

J. Anghileri conclu son étude en remarquant que l'apprentissage est plus efficace lorsqu'il est construit sur des bases de compréhension intuitive par les élèves. En d'autres termes, la méthode des quotients partiel n'est qu'une évolution structurée des soustractions répétées que les élèves utilisent au début de leur apprentissage des divisions. En ce sens, cette méthode leur est plus intuitive, explicite et elle leur permet de créer du lien avec ce qu'ils connaissent et comprennent. C'est pour cela qu'ils réussissent à l'utiliser plus facilement qu'un algorithme traditionnel qui peut leur sembler en décalage avec leur façon de penser initiale. Lors de l'apprentissage de cette technique, les élèves abandonnent ainsi peu à peu des techniques similaires de « bas niveau » moins efficace. C'est justement cette possibilité de progression qui est intéressante dans l'apprentissage de cette technique. En effet, tous les élèves peuvent se l'approprier en l'utilisant au niveau d'efficacité avec lequel ils se sentent à l'aise. Cette méthode plus flexible peut ainsi correspondre à un plus grand nombre d'élèves qu'une technique traditionnelle.

Dans le rapport « *Good practice in primary mathematics* »[37] publié par OFSTED

[37] OFSTED. "Good practice in primary mathematics". Novembre 2011 [consulté le 24.04.2020]. Disponible sur le Web :https://www.gov.uk/government/publications/good-practice-in-primary-mathematics-evidence-from-successful-schools

en 2011, la technique des quotients partiels, est donnée en exemple comme une des techniques utilisées par plusieurs des écoles ayant de bons résultats en mathématiques. Elle apparait cependant comme controversée.

En effet, beaucoup d'écoles ont rapporté la difficulté des élèves à appliquer une technique des quotients partiel « de haut niveau ». Les élèves qui ne trouvent pas directement de grands multiples du diviseur utilisent de manière répétitive des multiples égaux à 10 fois ou 1 fois le diviseur. Ainsi le nombre de soustractions à faire s'en retrouve grandement augmenté ce qui amène souvent à faire des erreurs. Un autre inconvénient, d'après le rapport, est que le raisonnement mathématique qui est derrière la méthode de l'arrêt de bus version courte, que les élèves maîtrisent et utilisent avec confiance, est différent du raisonnement derrière la technique des quotients partiels. L'apprentissage et la compréhension d'une des techniques ne mène pas à l'apprentissage de l'autre. Enfin, le rapport souligne le fait que la méthode des quotients partiels n'est pas facilement extensible à la division décimale.

Dans presque la moitié des vingt écoles qui ont participé à l'enquête, la technique des quotients partiels n'est pas enseignée. Selon ces écoles, cette technique embrouille les élèves, surtout ceux ayant des difficultés en mathématiques. A la place, ces écoles continuent d'enseigner la technique de l'arrêt de bus version courte, même pour les diviseurs à deux chiffres, en faisant écrire sur le côté une liste de multiples du diviseur pour aider les élèves.

Ce rapport souligne cependant que, même si la technique des quotients partiels est « lourde » à l'écrit, elle peut se révéler très utile pour aider les élèves à faire des divisions mentales, notamment lorsque les dividendes sont supérieurs aux nombres que l'on trouve dans les tables de multiplication. En effet, elle entraine les élèves à séparer les dividendes en multiples du diviseur. Par exemple dans 81 : 3, 81 peut être partagé en 60 et 21 pour simplifier la division. Les quotients partiels 20 et 7 sont ainsi trouvés rapidement et le résultat 27 également.

Selon ce rapport, la technique des quotients partiels, même utilisée de manière efficace n'amène pas à la réponse de manière directe, comme c'est le cas avec les algorithmes traditionnels. Enfin, le fait que la méthode des quotients partiels ne soit pas utilisée par toutes les écoles et collèges peut amener une discontinuité des apprentissages et engendrer des difficultés supplémentaires pour certains élèves.

Ce rapport a été critiqué par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques, dont Ian Thompson[38], enseignant à l'université de Liverpool. Selon lui, OFSTED n'a pas considéré l'ensemble des études récentes à sa disposition pour écrire son rapport et beaucoup des affirmations qu'il contient ne sont pas justifiées.

4. Les techniques hybrides, un bon compromis ?

a. Présentation et analyse a priori de deux techniques issues de la recherche

Lors de mes recherches, deux techniques ont particulièrement retenu mon attention, tout d'abord parce qu'elles étaient issues de la recherche, mais surtout car elles étaient au croisement de plusieurs techniques de division, d'où le nom de techniques *hybrides*. Dans ces versions hybrides, les élèves peuvent trouver des quotients partiels au fur et à mesure de leur travail, en agissant sur les chiffres du dividende ou sur le dividende en tant que nombre, tout en restant dans une des deux dispositions « potence » ou « arrêt de bus ».

La première technique a déjà été évoquée dans la partie 5.1.c, c'est « l'exemple de division de type anglo-saxon » donné par C. Villani et C. Torossian dans leur rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques »[39]. Dans cette technique, les nombres en jeux sont disposés en potence, cependant la technique de division utilisée est celle des quotients partiels. En effet, les soustractions se font ici sur le dividende en tant que nombre et non sur ses

[38] THOMPSON, Ian. "*To chunk or not to chunk?".* Association of Teachers of Mathematics. Mars 2012. [consulté le 26.04.2020]. Disponible sur le Web : https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT227/Non-Member/ATM-MT227-45-48.pdf

[39] VILLANI, Cédric, TOROSSIAN, Charles. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. 12 février 2018. [consulté le 19.04.2020]. Disponible sur le Web : https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

chiffres. Les quotients partiels sont eux placés à droite de la potence. Une fois la division terminée, ils sont ajoutés pour former le quotient.

Une technique opératoire de la division claire et explicite qui respecte la valeur positionnelle des chiffres du quotient :

	4	3	2	1		1	7
-	3	4	0	0	2	0	0
		9	2	1		5	0
	-	8	5	0			4
			7	1			
		-	6	8			
				3			

200, 50 et 4 sont les « quotients partiels ». On les ajoute ensuite pour obtenir le quotient :

200 + 50 + 4 = 254

Il reste 3.

Si on veut aller plus loin, le quotient partiel suivant serait « 0,1 ».

Note : cette technique opératoire est transparente pour les enfants : à chaque étape, les enfants comprennent ce qu'ils font. Dans la première, ils multiplient 17 par 200 pour obtenir 3 400, puis font la première soustraction. Il n'y a pas besoin :

- de placer un « c » au-dessus du « 2 » dans l'espace quotient pour rappeler que 2 signifie 200 ;
- d'abaisser mystérieusement le « 2 » (de 4321), et ensuite le « 1 » du même nombre, pour les étapes suivantes. Les parties restantes du dividende, 921 puis 71, sont déjà là.

Par ailleurs elle dit dès la première étape l'ordre de grandeur du quotient. Cette technique fonctionne quelle que soit la quantité prise au départ (on aurait pu prendre 1 700 au lieu de 4 300).

Figure V-9 - Extrait de l'annexe 5 du rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » [40]

Dans l'extrait du rapport ci-dessus les quotients partiels ne sont pas alignés avec les produits auxquels ils se rapportent. Il me semble cependant que l'intérêt de cette technique réside en la clarté de sa disposition, à des fins d'organisation et de vérification. Lorsque nous parlerons de cette technique, nous considérons donc le cas où ces quotients partiels sont alignés avec leur produit associé, même s'il est vrai que cela augmente le risque de perte d'alignement des chiffres du quotient. De plus, dans l'exemple donné, les quotients partiels les plus *efficaces* sont trouvés tout de suite (200 puis 50 puis 4) ; or comme cela est spécifié dans les explications données sous l'exemple, « cette technique fonctionne quelle que soit la quantité prise au départ », c'est-à-dire que l'élève

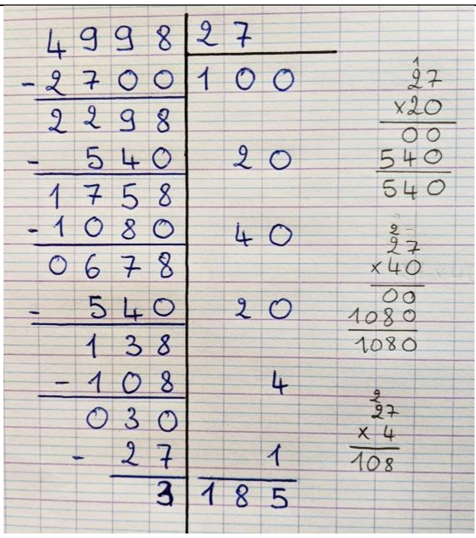
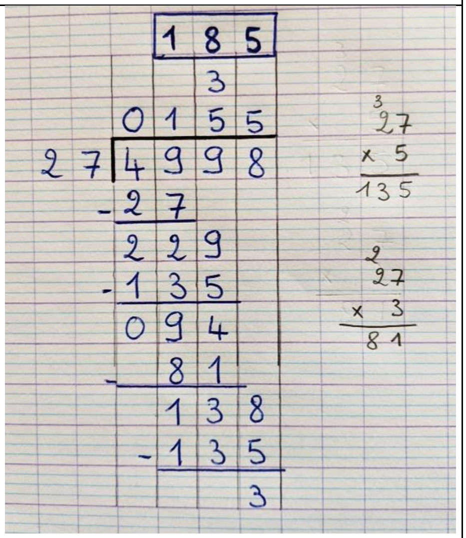
[40] DEPARTMENT FOR EDUCATION. The national curriculum in England. Framework document [en ligne]. Décembre 2014 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381344/Master_final_national_curriculum_28_Nov.pdf

peut passer par des tâtonnements s'il ne peut trouver directement ces quotients partiels les plus efficaces. Nous considèrerons cette technique dans cet esprit évolutif qui permet de s'adapter au plus grand nombre d'élèves. Enfin cette technique hybride est parfois utilisée comme une technique intermédiaire permettant d'accéder à la version classique de la potence par la suite. Ici, nous faisons le choix de considérer cette technique comme une technique à part entière et pas seulement comme un moyen d'arriver à une technique classique.

La seconde technique est donnée par Guy Brousseau dans son article « Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels »[41]. Dans cette technique de division qu'il appelle « la division ergonomique », les nombres en jeu sont disposés comme dans la technique de l'arrêt de bus, et l'algorithme utilisé est également celui d'une division classique. Les calculs sont donc bien effectués sur les chiffres du dividende et non sur le dividende en tant que nombre. Cette technique présente cependant une différence qui me semble non négligeable puisqu'elle permet aux élèves de trouver des quotients partiels pour chacun des chiffres du quotient. Les chiffres finaux du quotient étant trouvés à la fin par addition des quotients partiels correspondant à chacun des chiffres. Tout comme la technique précédente, cette technique offre une évolutivité dans son utilisation et c'est en ce sens qu'on peut également l'appeler hybride.

Voici ci-dessous les deux techniques utilisées ainsi qu'une analyse a priori des avantages et inconvénients que présente chacune des techniques.

[41] BROUSSEAU, Guy, Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

	Division « de type anglo-saxon » de C. Villani et C. Torossian	Division ergonomique de G. Brousseau
		
Disposition	Disposition de la potence connue par les enseignants et élèves français.	Disposition quasiment inconnue en France
Travail sur les nombres ou sur les chiffres	Nécessité de faire des soustractions et des multiplications posées sur des grands nombres et de maitriser multiplications par des multiples de 10 en plus des tables de multiplication. Peut être lourd et inefficace selon les choix des quotients partiels ainsi que l'ordre dans lequel ils sont choisis.	Les calculs sont effectués sur des nombres inférieurs à 10 fois le quotient. Rapide de par les calculs sur les petits nombres et efficace par le fait que les chiffres du dividende sont traités de manière optimale, de gauche à droite.
Sens de la division	Le sens division-groupement est clair dans cette disposition : diviser c'est trouver combien de fois un nombre est contenu dans un autre. Cette technique est facile à comprendre et découle de ce que les élèves feraient d'eux même pour effectuer une division de manière informelle. Permet de renforcer la valeur des chiffres du quotient et d'expliquer la « construction » du quotient - Peut servir d'étape pour arriver à la technique opératoire classique de la	L'alignement des chiffres du dividende et du quotient permet de renforcer le sens lié à la position des chiffres du quotient. Si la technique opératoire est utilisée manière automatique, il est possible que le sens de la division ne soit pas pris en compte ce qui peut engendrer des omissions ou des erreurs de calcul.

	potence, une confusion pourrait cependant apparaitre entre l'utilisation de ces deux techniques qui sont tout de même différentes et quasiment disposées de la même façon. Il faut donc être strict sur la présentation et son sens.	
Présentation	Demande de la rigueur dans la présentation des quotients partiels, si ceux-ci sont mal alignés, ils peuvent conduire à un quotient « total » faux alors que le reste des calculs est correct. Vision claire des quotients partiels correspondants à chaque multiple du quotient.	L'alignement des chiffres du dividende et du quotient facilite l'écriture des résultats mais demande également de la rigueur dans le placement des nombres lors des soustractions intermédiaires. Les quotients partiels ne sont pas directement alignés avec le multiple du quotient correspondant.
Adaptation à la division décimale	Très inadaptée pour la division décimale puisqu'elle présente les inconvénients de la technique de la potence et de la technique des quotients partiels concernant la division décimale : nécessité de laisser de l'espace à droite du dividende et nécessité de maitriser des multiplications de nombres décimaux (par exemple : ... x 8 = 0,040). Devient plus adaptée cependant si elle ne sert que technique intermédiaire vers la technique classique de la potence qui elle permet les divisions décimales.	Adapté à la division décimale, une fois la virgule atteinte au dividende, elle est également placée au quotient et il suffit de continuer à placer les chiffres à la suite.
Aspect évolutif	Permet de tâtonner si besoin, chaque élève peut aller à son rythme (peut repérer les plus grands multiples directement ou non). La technique semble accessible à un grand nombre d'élèves car elle peut être effectuée avec différents niveaux d'efficacité. Les essais pour trouver le plus grand multiple font partie du calcul et lui sont utile. Ils ne sont pas vécus comme une perte de temps ou comme des erreurs.	

b. Les apports de la recherche

Grâce à la recherche, nous avons pu mettre en avant des avantages et inconvénients lors de l'utilisation des différentes techniques de division *pures*, comme la technique de la potence, de l'arrêt de bus et des quotients partiels. Nous avons compris qu'il n'y avait pas de technique opératoire parfaite, chacune présentant des qualités et des défauts qui lui sont propres. Avec la présentation de techniques hybrides, nous cherchons à comprendre l'intérêt que pourrait présenter l'utilisation de telles techniques plutôt qu'une technique pure.

Les deux méthodes hybrides présentées ont un point commun, celui de permettre l'utilisation de quotients partiels. Cette utilisation donne aux techniques hybrides un aspect *progressif* et *évolutif.* En effet, comme dans la technique des quotients partiels, cela permet à l'élève de tâtonner au début, puis d'améliorer sa technique, au fur et à mesure de son utilisation, pour aller vers une utilisation experte de la technique. La division « de type anglo-saxon » de C. Villani et C. Torossian présente aussi l'avantage d'être évolutive par rapport à la technique des quotients partiels pure. En effet, peu à peu, la technique peut se transformer en une technique de la potence traditionnelle, et donc être utilisée pour les divisions décimales ce qui est très compliqué avec la technique des quotients partiels pure. La division ergonomique de G. Brousseau est, elle, utilisable en tant que telle pour des divisions décimales.

C'est d'ailleurs pour leur aspect évolutif et progressif que les techniques hybrides sont parfois utilisées comme des techniques intermédiaires lors de l'apprentissage de la technique opératoire de division aux élèves, permettant d'arriver à la technique finale de la potence ou de l'arrêt de bus. Ainsi l'utilisation de techniques hybrides utilisant des quotients partiels est souvent vu comme un passage permettant de mettre du sens sur les méthodes de divisions classiques française et anglaise, mais ces techniques sont rarement vues comme des techniques à part entière.

Or, en ne se laissant pas cette possibilité, nous nous privons d'un autre avantage de ces techniques qui est la *flexibilité*. En effet, l'aspect évolutif et progressif de ces techniques permet qu'elles puissent être utilisées à différents niveaux d'efficacité par les élèves. Chacun peut travailler à un niveau d'efficacité qui lui convient et avancer à son rythme vers la méthode experte. Ces techniques hybrides s'adaptent ainsi à un plus grand nombre d'élèves, selon les niveaux et rythmes d'apprentissage.

Comme le fait remarquer G. Brousseau dans son article *Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels* à propos de la division ergonomique :

> *La souplesse de la méthode permet aux élèves lents de poursuivre et de parachever leur apprentissage (par exemple des tables) dans des exercices et problèmes, sans être immédiatement disqualifiés par leurs difficultés.*[42]

Un dernier grand intérêt de l'utilisation des techniques hybrides est le fait que la majorité des essais des élèves pour progresser dans la recherche du quotient sont pris en compte. Ce point est repris et détaillé dans l'article de G. Brousseau cité ci-dessus lorsqu'il détaille la division ergonomique. En effet, lors de l'exécution d'une technique traditionnelle, les élèves qui n'arrivent pas à trouver directement le plus grand multiple du diviseur, inférieur au reste du dividende, se retrouvent à rayer leurs calculs et résultats précédemment écrits. Par exemple, dans 1718 : 34, un élève qui écrirai 171 – 136 (34 x 4) = 35, se retrouverai à barrer ses premiers calculs puisqu'il remarquerait que 34 peut encore être soustrait une fois de 35. Il réécrirait donc 171 – 170 (34 x 5) = 1.

Ces essais au lieu d'être valorisés comme des étapes du calcul sont ainsi vus comme des erreurs. De plus ils font perdre du temps aux élèves qui se doivent de recommencer leur recherche afin de trouver le *bon multiple*. Des essais successifs infructueux peuvent aussi amener à une désorganisation du calcul posé et un décalage des chiffres.

Dans la division ergonomique, l'élève est en mesure d'écrire ses quotients partiels dans la colonne du quotient correspondante. Le quotient final se calcule

---

42 BROUSSEAU, Guy, Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

à la fin en ajoutant les chiffres de chaque colonne.

Les calculs intermédiaires sont ainsi vus comme des étapes utiles et ils ne découragent pas l'élève dans la réalisation de son calcul. Cela n'empêche pas l'élève de chercher à atteindre la version experte puisqu'il remarque de lui-même que le calcul serait plus rapide en trouvant le « bon multiple » du premier coup.

c. Résultats d'expériences sur la division ergonomique

Dans son article, G. Brousseau tire plusieurs conclusions à partir d'expériences menées sur les divisions.

Tout d'abord, il écrit qu'enseigner la méthode ergonomique de la division (et de la multiplication dont il parle aussi dans son article) aux élèves peut améliorer l'enseignement du calcul. D'après ses observations, on peut voir en « deux ou trois mois une nette augmentation du pourcentage de réussite globale, surtout sur les opérations longues » [43]. Cette amélioration observée est plus importante pour les élèves *faibles* et *moyens*.

En matière de recommandations quant à l'enseignement de ces techniques, G. Brousseau écrit qu'il est possible d'enseigner la division ergonomique avant d'enseigner la division classique et qu'il est aisé pour les élèves de faire cette transition. Les enseignants ayant mené ces expérimentations ont trouvé d'une manière générale que la « conduite pédagogique des situations didactiques nécessaire était plus délicate et fatigante mais aussi plus attrayante pour eux et pour les élèves ».

En se basant sur les différents points évoqués, nous pouvons dire que les techniques hybrides, et notamment la division ergonomique de G. Brousseau, présentent un grand nombre d'avantages. Même si elles ne permettent pas d'effacer toutes les difficultés auxquelles les élèves font face lorsqu'ils posent une division, elles semblent être un bon compromis pour faire progresser les élèves, en donnant plus de chances à chacun de pouvoir réussir.

[43] Ibidem 42

VI. Conclusion

Au travers de ce mémoire nous nous sommes demandé en quoi la présentation d'une technique opératoire de division peut influer sur le rapport de l'élève à la division et sur la quantité et le type d'erreurs commises par les élèves. Pour cela, nous avons étudié et comparé différentes manières de présenter une division, ainsi que les techniques opératoires qui leur étaient le plus souvent associées. Nous avons pu tirer plusieurs conclusions de notre étude, certaines d'entre elles nous apportent des réponses directes aux questions que nous nous posions, d'autres contribuent à une réflexion plus globale sur l'enseignement des techniques opératoires de calcul aux élèves.

Tout d'abord, si nous voulons que les élèves mettent du sens sur le calcul qu'ils sont en train d'effectuer, il est essentiel que la construction de la technique opératoire soit progressive et basée sur la manière de raisonner des élèves et leurs représentations. La technique opératoire des quotients partiels ainsi que certaines techniques hybrides qui l'utilisent permettent cette progression. De plus, la technique opératoire enseignée doit être présentée de manière claire et organisée afin que l'élève puisse structurer son raisonnement et s'y retrouver. La construction du sens passant aussi par la compréhension des relations entre les nombres, il est primordial que la présentation permette de renforcer l'identification de la valeur des chiffres du quotient que l'élève cherche à déterminer. Ceci lui permettra aussi d'éviter de nombreuses erreurs de calculs ou omissions de 0 dans les réponses. Ainsi lorsque les calculs se font sur les chiffres, la présentation de l'arrêt de bus amène à une identification directe de la valeur de chaque chiffre, les chiffres des nombres en jeu étant alignés. Dans la technique opératoire de la potence, cela doit passer par une estimation en amont de la division permettant de trouver le nombre de chiffres du quotient ainsi qu'une inscription de c, d, u (pour centaines, dizaines et unités) au niveau du quotient. L'évolutivité de certaines techniques représente un réel avantage permettant à un plus grand nombre d'élève d'utiliser la technique avec succès et permettant à chacun de progresser à son propre rythme vers une utilisation optimale. Lors du choix de la technique opératoire à enseigner, prendre en compte la transposabilité de la technique à la division décimale est également important. Alors que la technique des quotients partiels y est très peu adaptée, les techniques traditionnelles, et notamment celle de l'arrêt de bus qui ne demande aucune adaptation, conviennent très bien.

Ainsi, tous ces facteurs à considérer nous amènent à penser qu'il n'y a pas de technique parfaite. Les techniques hybrides, présentée pour l'une par C. Villani et C. Torossian, l'autre par G. Brousseau permettent cependant d'allier les avantages de plusieurs techniques pures et semblent ainsi très intéressantes en ce sens.

Dans cette conclusion, ce sont essentiellement les aspects de la didactique des mathématiques qui ont été considérés. Cependant, les aspects culturels et les aspects de continuité pédagogique sont loin d'être négligeables concernant le choix d'une technique de division. En effet, seule la technique de la potence est pour l'instant enseignée en France, de plus, c'est aussi celle qui est utilisée au collège, en continuité des apprentissages de CM2. Ainsi il semble difficile de changer un système dans lequel la division posée n'est connue que sous forme de la potence, et à la fois, le changement doit bien commencer quelque part. Pour exemple, la technique de la soustraction par cassage est largement enseignée de nos jours alors que seule la technique par compensation était connue il y a quelques dizaines d'années. Il semble qu'il serait intéressant de mener une large étude sur ce sujet, en se basant sur les données d'un échantillon de taille importante, afin de mesurer plus précisément les effets de l'utilisation de chaque technique, ainsi que leurs effets à long terme.

VII. Bibliographie

ANGHILERI, Julia. "*Some impacts of the National Numeracy Strategy on students' written calculation methods for division after five years implementation*", University of Cambridge, Faculty of Education. D. Hewitt and A. Noyes, 2005, p. 17-24. Disponible sur www.bsrlm.org.uk.

ANGHILERI, Julia, BEISHUIZEN, Meindert, VAN PUTTEN, Kees. "*From informal strategies to structured procedures: Mind the gap!*", Educational Studies in Mathematics. 2002, 49, 149-170.

BRISSIAUD, Rémi et al. Enseigner la division euclidienne. J'apprends les maths. Guide pédagogique. Paris : Retz, 2017, chapitre 3, p. 27-37.

BROUSSEAU, Guy, FAUCON, Eliette. Algorithme de la division. Atelier de pédagogie, 1977 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/10/77-6-li%C3%A9.pdf

BROUSSEAU, Guy, Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, Grand N n° 85, 2010, pp. 13 à 41

BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. et J. PORTUGAIS (1994). « La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit », dans Cahiers de la Recherche en Éducation, vol. 1, no 1, p.117-132.

CNESCO, Michel Fayol. Nombres et opérations : Premiers apprentissages à l'école primaire. Conférence de consensus. Novembre 2015 [consulté le 20.04.2020].. Disponible sur le Web : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf

DEPARTMENT FOR EDUCATION. The national curriculum in England. Framework document [en ligne]. Décembre 2014 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381344/Master_final_national_curriculum_28_Nov.pdf

DURPAIRE, Jean-Louis, et al. L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport IGEN. [en ligne]. Juin 2006 [consulté le

05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

INSTITUT CAMILLE JORDAN. Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint Etienne [en ligne]. [consulté le 03.01.2020]. Disponible sur le Web : http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.division.pdf

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PEDAGOGIQUE. Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Hatier ERMEL. Hatier, 2005, Champ multiplicatif, Le partage du trésor. 3, p. 255-263.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE, DIRECTION DE L'EVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE. Evolution des performances en calcul des élèves de CM2 à trente ans d'intervalle (1987-2017). Note d'information N° 19.08, Mars 2019.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE. Le calcul aux cycles 2 et 3. [en ligne]. Mars 2016 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/99/2/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_600992.pdf

MINISTERE DE LA JEUNESSE, DE L'EDUCATION ET DE LA RECHERCHE. Le calcul posé à l'école élémentaire. Les nouveaux programmes de l'école primaire. Mathématiques. Document d'accompagnement. [en ligne]. 2002 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57yutz/IMG/pdf/Le_calcul_pose_a_l_ecole_elementaire.pdf

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. Programmes du cycle 3. Mathématiques. p. 100-108 [en ligne]. BOEN n°30 du 26 juillet 2018 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/2/Cycle_3_programme_consolide_1038202.pdf

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Patricia A. Sellers. "*The trouble with long division*", National Council of Teachers of Mathematics. [en ligne]. Mai 2010 [consulté le 20/04/2020]. Disponible sur le Web :

https://www.mcs4kids.com/documents%5Cmath%5Ck-6%5CMath%20Content%5CMultiplication%20and%20Division%5CThe%20Trouble%20with%20Long%20Division.pdf

NORMANDEAU, Marie-Pierre. Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant : une analyse didactique en termes de schèmes. Thèse de Ph.D. en sciences de l'éducation option didactique. Montréal : Université de Montréal, Faculté des études supérieures, janvier 2000.

OFSTED. « Good practice in primary mathematics". Novembre 2011 [consulté le 24.04.2020]. Disponible sur le Web :https://www.gov.uk/government/publications/good-practice-in-primary-mathematics-evidence-from-successful-schools

SCEREN. Le nombre au cycle 3, partie 3, Calcul et conceptualisation, p. 31 à 50. [en ligne]. 2010 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf

THOMPSON, Ian. "*To chunk or not to chunk?".* Association of Teachers of Mathematics*.* Mars 2012. [consulté le 26.04.2020]. Disponible sur le Web : https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT227/Non-Member/ATM-MT227-45-48.pdf

VILLANI, Cédric, TOROSSIAN, Charles. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. 12 février 2018. [consulté le 19.04.2020]. Disponible sur le Web : https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

VIII. Annexes

A. Théorie de la division euclidienne – Preuve de l'existence et de l'unicité du couple (q, r) ∈ ℤ

Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r <\mid b \mid .$$

Les entiers q et r sont appelés, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Preuve de l'existence.
Si $a = 0$ alors le couple $(0, 0)$ convient. Supposons $a \neq 0$.
1^{er} cas : $b > 0$. Soit $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid nb > a\}$. L'entier $(\mid a \mid +1)b$ est un multiple de b qui est strictement plus grand que a. En effet :

$$(\mid a \mid +1)b >\mid a \mid b =\mid a \mid (b - 1 + 1) \geq\mid a \mid\geq a.$$

On a donc $A \neq \emptyset$. Montrons que A est minoré par $-|a|$:
si $m < -|a|$ alors, comme $b \geq 1$, $mb < -|a|b \leq -|a| \leq a$ et donc $m \notin A$.

Soit n le plus petit élément de A. De $n - 1 < n$ on déduit $(n-1)b < nb$ et donc $(n-1)b \leq a < nb$. Posons $q = n - 1$. On a $qb \leq a < qb + b$ d'où $0 \leq a - qb < b$. Si $r = a - qb$ alors $a = bq + r$ et $0 \leq r < b =\mid b \mid$.
2^{me} cas : $b < 0$. D'après le premier cas, il existe q et r tels que $a = (-b)q + r$ avec $0 \leq r \leq\mid -b \mid$. En écrivant $a = b(-q) + r$, on voit que le couple $(-q, r)$ convient.

Preuve de l'unicité.
Supposons que :

$$a = bq + r,\ 0 \leq r <\mid b \mid$$

$$a = bq' + r',\ 0 \leq r' <\mid b \mid .$$

On a $r' - r = b(q - q')$. Or $-\mid b \mid< r' - r <\mid b \mid$, ou encore, $-\mid b \mid< b(q - q') <\mid b \mid$. Il en résulte que $0 \leq\mid b \mid\mid q - q' \mid<\mid b \mid$ et donc $0 \leq\mid q - q' \mid< 1$. Finalement, $\mid q - q' \mid= 0$ d'où $q = q'$ et $r = r'$.

Cette démonstration est issue du site du laboratoire de recherche en mathématiques de Lyon/Saint Etienne[44].

[44] INSTITUT CAMILLE JORDAN. Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint Etienne [en ligne]. [consulté le 03.01.2020]. Disponible sur le Web : http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.division.pdf

B. Séquence CM1 – Séance 1 : Evaluation diagnostique

Prénom : .... Nom : ....

La division posée – Evaluation diagnostique

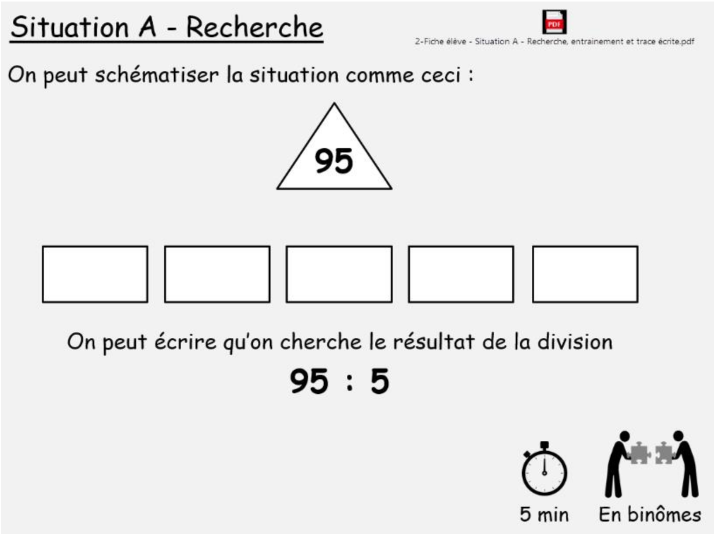
Partie I

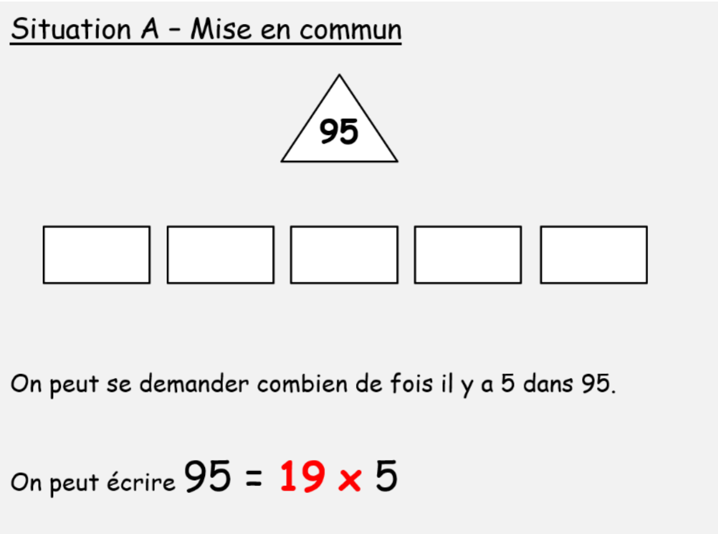
Exercice 1	**Les tables de multiplication de 1 à 10.**	1 min	Score : ..../16
Trouve autant de réponses que possibles en une minute.			
6 x 3 =_____	3 x 7 =_____	8 x 7 =_____	7 x 4 =_____
5 x 9 =_____	10 x 9 =_____	7 x 6 =_____	9 x 9 =_____
7 x 2 =_____	4 x 3 =_____	8 x 8 =_____	3 x 5 =_____
8 x 4 =_____	5 x 6 =_____	2 x 4 =_____	6 x 6 =_____

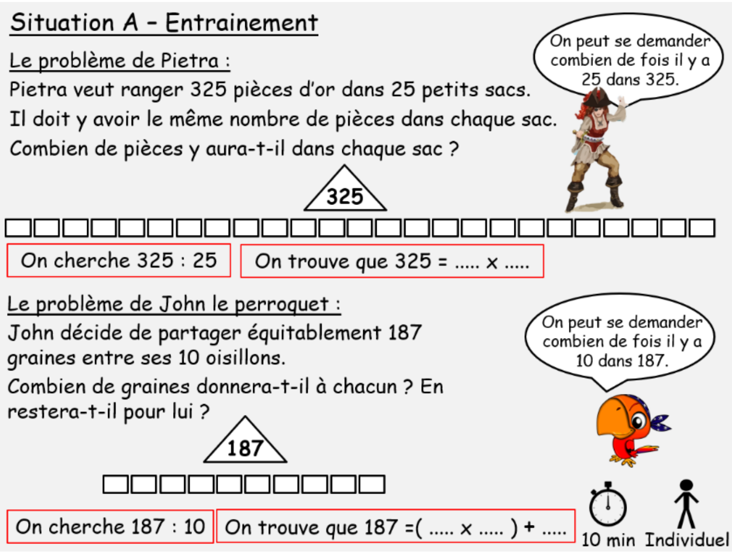
Exercice 2	**Les tables de soustraction de 1 à 18.**	1 min	Score : ..../16
Trouve autant de réponses que possibles en une minute.			
12 - 4 =_____	4 - 3 =_____	18 - 7 =_____	10 - 4 =_____
5 - 2 =_____	13 - 9 =_____	7 - 6 =_____	15 - 12 =_____
8 - 5 =_____	16 - 5 =_____	14 - 8 =_____	18 - 15 =_____
9 - 6 =_____	17 - 6 =_____	11 - 4 =_____	16 - 9 =_____

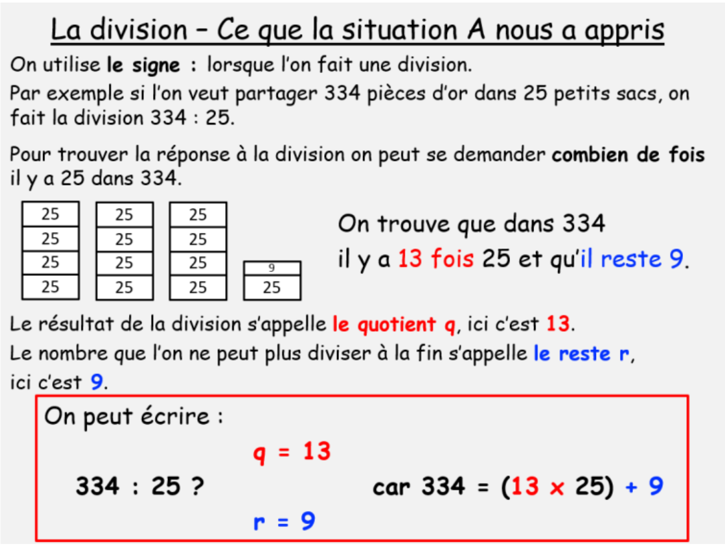
Exercice 3	**Les soustractions posées**		2 min
Calcule les soustractions suivantes.			
89 - 48	72 - 18	50 - 9	43 - 35
Pose et calcule les soustractions suivantes.			
67 - 49 =_____	25 - 14 =_____	31 - 7 =_____	80 - 32 =_____

C. Séquence CM1 – Séance 2 : Sens de la division – Extraits du PowerPoint servant de support au déroulement de la séance

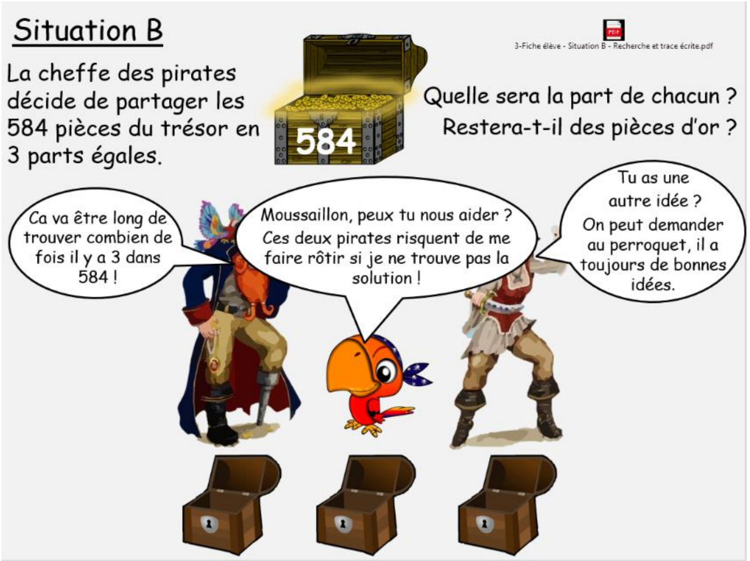


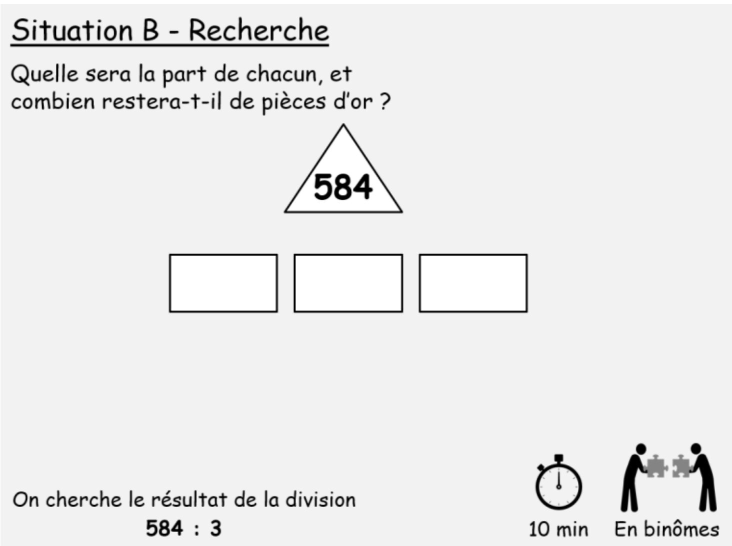


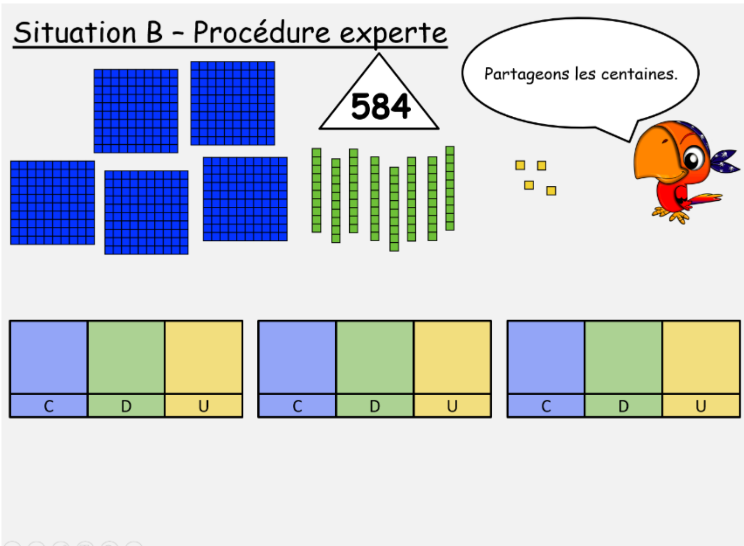


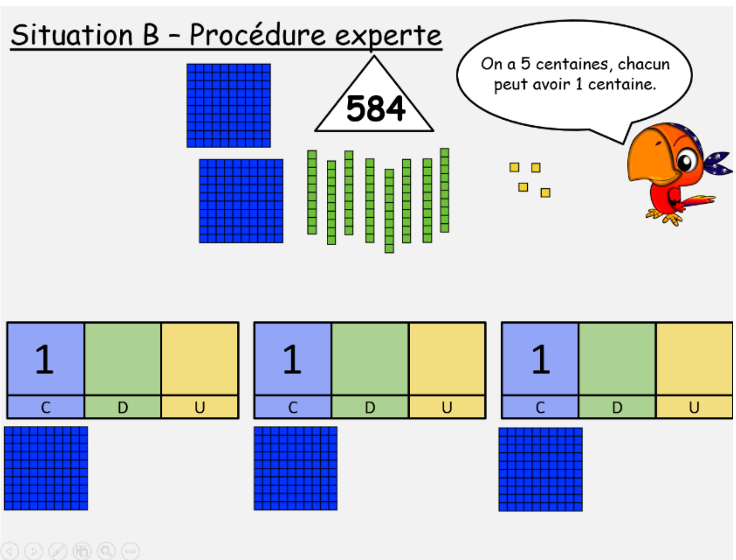


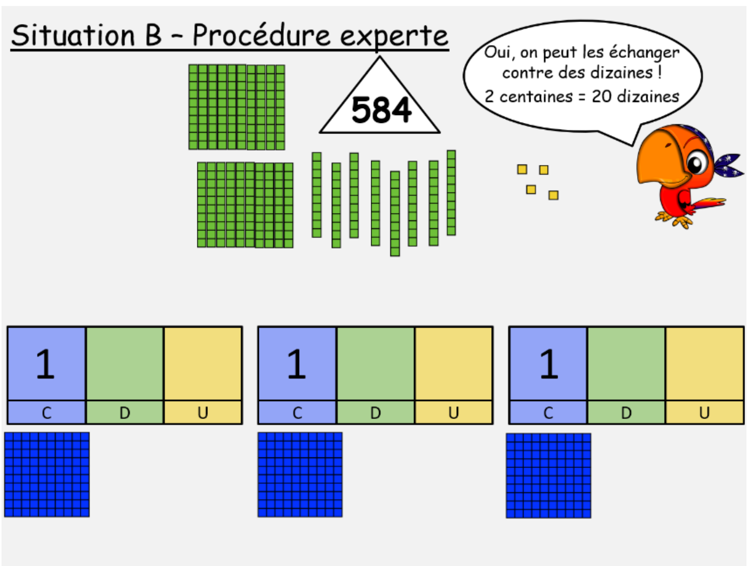
D. Séquence CM1 – Séance 3 : Vers la division posée – Extraits du PowerPoint servant de support au déroulement de la séance

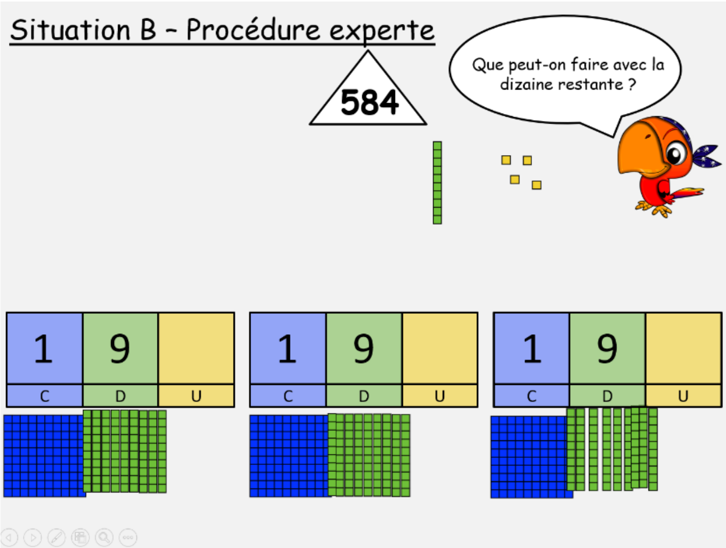


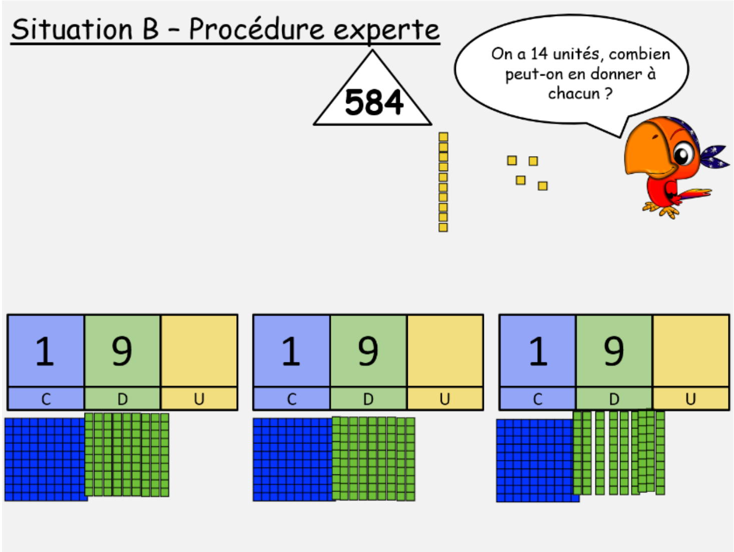


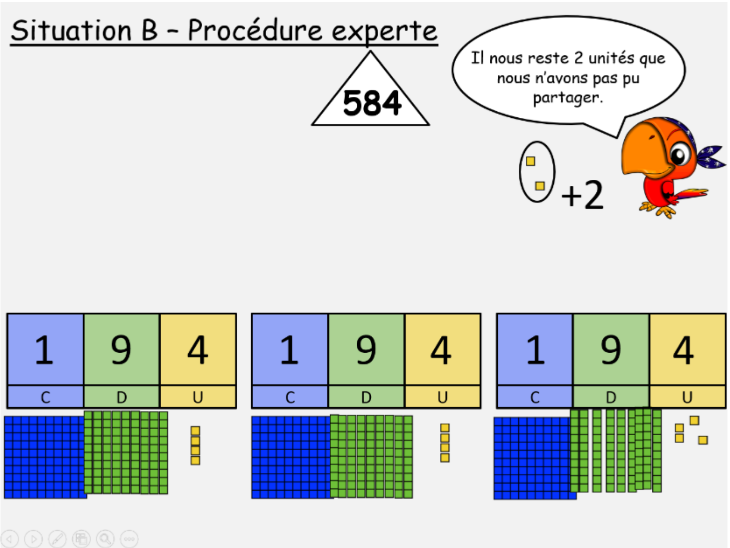


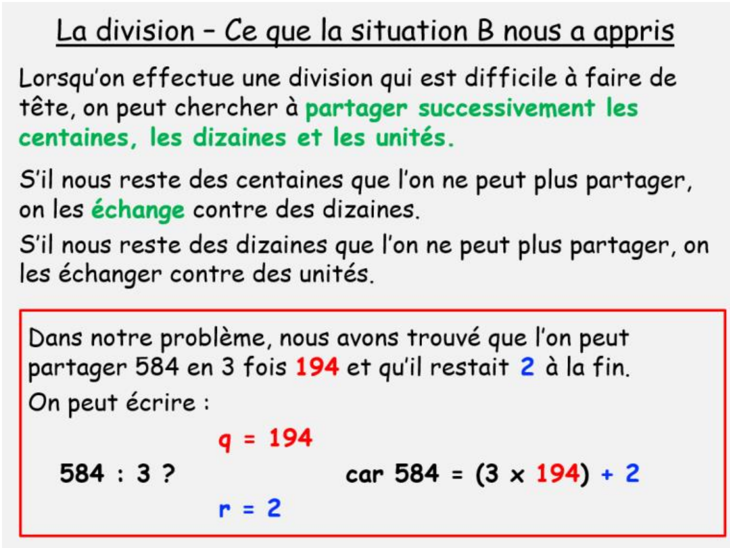


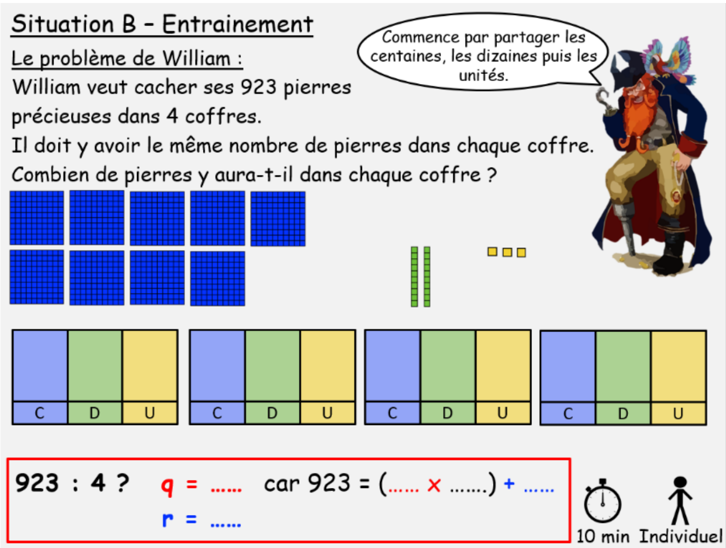


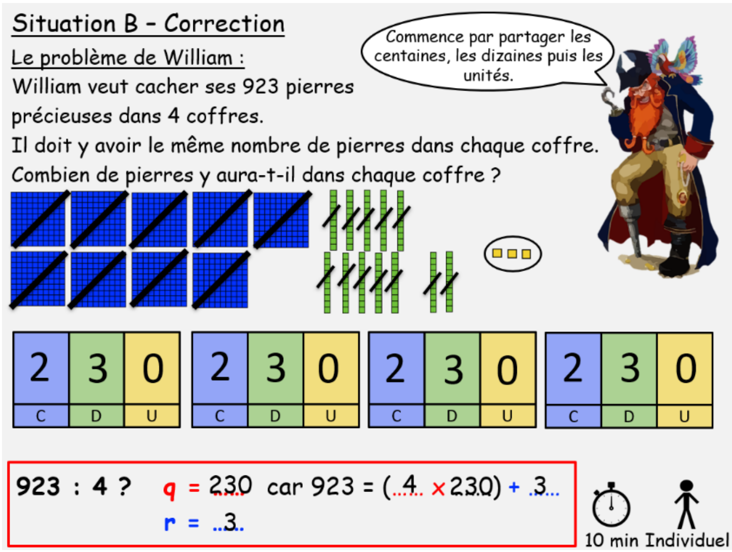

Situation B – Procédure experte
584
Que peut-on faire avec la dizaine restante ?
1 9
C D U
1 9
C D U
1 9
C D U


Situation B – Procédure experte
584
On a 14 unités, combien peut-on en donner à chacun ?
1 9
C D U
1 9
C D U
1 9
C D U


Situation B – Procédure experte
584
Il nous reste 2 unités que nous n'avons pas pu partager.
+2
1 9 4
C D U
1 9 4
C D U
1 9 4
C D U

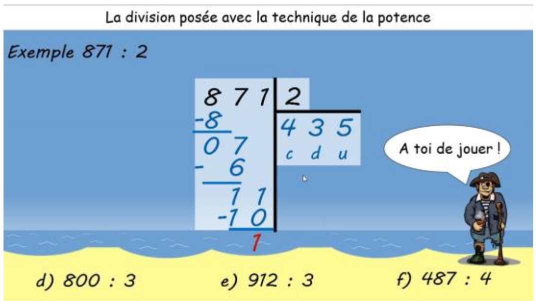

La division – Ce que la situation B nous a appris
Lorsqu'on effectue une division qui est difficile à faire de tête, on peut chercher à partager successivement les centaines, les dizaines et les unités.
S'il nous reste des centaines que l'on ne peut plus partager, on les échange contre des dizaines.
S'il nous reste des dizaines que l'on ne peut plus partager, on les échanger contre des unités.
Dans notre problème, nous avons trouvé que l'on peut partager 584 en 3 fois 194 et qu'il restait 2 à la fin.
On peut écrire :
q = 194
584 : 3 ? car 584 = (3 x 194) + 2
r = 2


Situation B – Entrainement
Le problème de William :
William veut cacher ses 923 pierres précieuses dans 4 coffres.
Il doit y avoir le même nombre de pierres dans chaque coffre.
Combien de pierres y aura-t-il dans chaque coffre ?
Commence par partager les centaines, les dizaines puis les unités.
C D U
C D U
C D U
C D U
923 : 4 ? q = …… car 923 = (…… x ……) + ……
r = ……
10 min Individuel

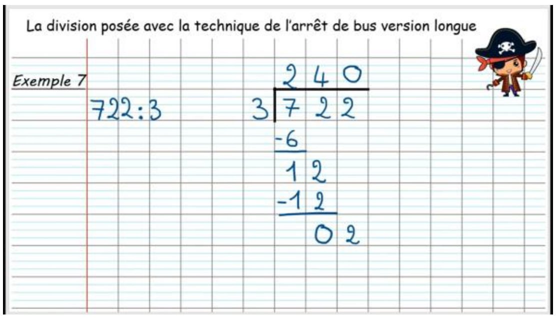

Situation B – Correction
Le problème de William :
William veut cacher ses 923 pierres précieuses dans 4 coffres.
Il doit y avoir le même nombre de pierres dans chaque coffre.
Combien de pierres y aura-t-il dans chaque coffre ?
Commence par partager les centaines, les dizaines puis les unités.
2 3 0
C D U
2 3 0
C D U
2 3 0
C D U
2 3 0
C D U
923 : 4 ? q = 230 car 923 = (4 x 230) + 3
r = 3
10 min Individuel

E. Séquence CM1 – Séances 4 et 4 bis : Apprentissage de la technique de division posée

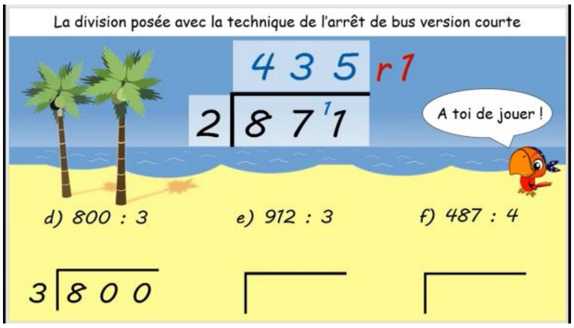
Une des trois vidéos ci-dessous, selon la technique enseignée, est visionnée en classe. Deux séances de 45 minutes sont nécessaires. Pendant la séance 4, les élèves regardent les exemples 1 et 2, font les questions d'entrainement pendant 15 minutes, regardent les exemples 3 et 4 puis s'entrainent à nouveau pendant 15 minutes. Durant la séance 4 bis, les élèves regardent les exemples 5,6 et 7 puis font les questions d'entrainement pendant 30 minutes.



Vidéo complète disponible sur https://www.youtube.com/watch?v=9J9WJ1hWImc



Vidéo complète disponible sur https://www.youtube.com/watch?v=VAHO6LxaRoU



Vidéo complète disponible sur https://www.youtube.com/watch?v=TgH0MegQVkM

F. Séquence CM1 – Séance 5 : Evaluation sommative

Les élèves sont évalués à l'aide d'une des trois fiches d'évaluation suivantes, selon la technique qui leur a été enseignée. Les questions sont les mêmes dans chaque fiche d'évaluation. Ces fiches d'évaluation sont aussi utilisées pour les élèves de CM2.

Prénom : ……………………………… Nom : ……………………………………… Date : ……………………………

Classe : ……………… Enseignant.e : ……………………………………… Ecole : …………………………………

<u>Evaluation - La division posée avec la technique de la potence</u>

30 min

Pose les divisions suivantes et écris leur résultat comme dans l'exemple.

Exemple : 436 : 3

	4	3	6	3		
	-3			1	4	5
	1	3				
-	1	2				
		1	6			
	-	1	5			
			1			

q = 145

r = 1

Car 436 = (145 x 3) + 1

1) 858 : 6

q = …

r = …

Car ……………………………………

2) 681 : 5

q = …

r = …

Car ……………………………………

3) 500 : 3

q = …

r = …

Car ……………………………………….

4) 827 : 4

q = …

r = …

Car ……………………………………….

5) 609 : 2

q = …

r = …

Car ……………………………………….

6) 370 : 8

q = …

r = …

Car ……………………………………….

7) 683 : 4

q = ...

r = ...

Car ....

8) 207 : 3

q = ...

r = ...

Car ....

9) 638 : 9

q = ...

r = ...

Car ....

10) 762 : 7

q = ...

r = ...

Car ....

Prénom : .... Nom : .... Date : ....

Classe : .... Enseignant.e : .... Ecole : ....

Evaluation - La division posée avec la technique de l'arrêt de bus version longue

30 min

Pose les divisions suivantes et écris leur résultat comme dans l'exemple.

Exemple : 436 : 3

		1	4	5
	3	4	3	6
		-3		
		1	3	
	-	1	2	
			1	6
		-	1	5
				1

q = 145

r = 1

Car 436 = (145 x 3) + 1

1) 858 : 6

2) 681 : 5

q = ...

r = ...

Car ....

q = ...

r = ...

Car ....

3) 500 : 3

q = …

r = …

Car ……………………………………

4) 827 : 4

q = …

r = …

Car ……………………………………

5) 609 : 2

q = …

r = …

Car ……………………………………

6) 370 : 8

q = …

r = …

Car ……………………………………

7) 683 : 4

q = ...

r = ...

Car ....

8) 207 : 3

q = ...

r = ...

Car ....

9) 638 : 9

q = ...

r = ...

Car ....

10) 762 : 7

q = ...

r = ...

Car ....

Prénom : ………………………………………	Nom : ……………………………………………	Date : …………………………………
Classe : …………………	Enseignant.e : ………………………………………………	Ecole : ……………………………………………

Evaluation - La division posée avec la technique de l'arrêt de bus version courte

30 min

Pose les divisions suivantes et écris leur résultat comme dans l'exemple.

Exemple : 436 : 3

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ 4\ \ 5\ \ \ r\,1 \\ \hline 3 & 4\ {}^{1}3\ {}^{1}6 \end{array}$$

q = 145

r = 1

Car 436 = (145 x 3) + 1

1) 858 : 6

q = …

r = …

Car ……………………………………….

2) 681 : 5

q = …

r = …

Car ……………………………………….

3) 500 : 3

q = …

r = …

Car ……………………………………….

4) 827 : 4

q = …

r = …

Car ……………………………………….

5) 609 : 2

q = …

r = …

Car ……………………………………

6) 370 : 8

q = …

r = …

Car ……………………………………

7) 683 : 4

q = …

r = …

Car ……………………………………

8) 207 : 3

q = …

r = …

Car ……………………………………

9) 638 : 9

q = …

r = …

Car ……………………………………

10) 762 : 7

q = …

r = …

Car ……………………………………

G. Séquence CM1 – Séance décrochée : Questionnaires élèves et questionnaire enseignant

Les élèves un des trois questionnaires suivants selon la technique qui leur a été enseignée. Les enseignants remplissent le questionnaire enseignant.

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Enseignant.e :	Ecole : ....

<u>Questionnaire élève CM1 – Potence</u> <u>(à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)</u>

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ....

2) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ....

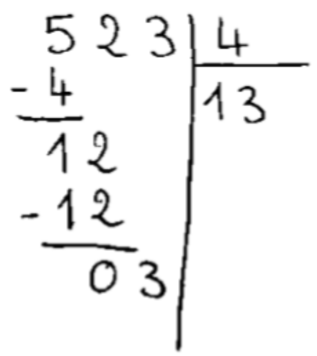
3) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

....

....

4) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non



$q = 13$

$r = 3$

car $523 = (13 \times 4) + 3$

Explique pourquoi.

....

....

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Enseignant.e :	Ecole : ....

Questionnaire élève CM1 – ADBVL (à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ....

2) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ....

3) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

....

....

4) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non

```
    1 3
4 | 5 2 3
   -4
    1 2
   -1 2
      0 3
```

$q = 13$

$r = 3$

car $523 = (13 \times 4) + 3$

Explique pourquoi.

....

....

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Enseignant.e :	Ecole : ....

<u>Questionnaire élève CM1 – ADBVC</u> <u>(à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)</u>

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ....

2) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ....

3) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

....

....

4) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non

$$4 \,\big|\, \overline{5\;{}^{1}2\;3}^{\;1\;3\;\; r\,3}$$

q = 13

r = 3

car 523 = (4 × 13) + 3

Explique pourquoi.

....

....

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Nombre d'élèves :	Ecole : ....

Questionnaire enseignant CM1 (à remplir après la séquence)

Entourez la réponse qui vous semble être la plus proche de la réalité et commentez si besoin.

1.a. De manière générale, quelle a été l'attitude des élèves face à l'apprentissage de la division posée au début de la séquence ?	Positive	Neutre	Négative
Commentaire :			

1.b. Cette attitude a-t-elle évolué au cours de la séquence ? Si oui de quelle manière ?	Oui beaucoup	Oui un peu	Non
Commentaire :			

1.c Cette attitude varie-t-elle selon le groupe d'élève (si on considère des groupes de besoins par exemple) ? Si oui, de quelle manière ?	Oui beaucoup	Oui un peu	Non
Commentaire :			

2.a. Quelles ont été les difficultés principales des élèves lors de la construction de la technique opératoire ?

2.b. Quelles ont été les difficultés principales des élèves lors des phases d'entrainement ?

2. c. Quelles difficultés vos élèves rencontrent-ils lorsqu'ils effectuent une division posée ?

2.d. Certaines étapes de la procédure de division posée posent-elles plus de difficultés que d'autres ?

3.a. Vos élèves semblent-ils avoir compris le sens de la division ?	Oui	Non
3.b. Pensez-vous que la construction de la technique opératoire les y a aidé ? Si oui comment ?	Oui	Non
Commentaire :		
4. Quels sont selon vous les avantages/inconvénients principaux de la technique opératoire que vous avez eu à enseigner si on compare à la technique opératoire traditionnelle de la potence ? (L'enseignant ayant enseigné la technique de la potence ne répondra pas à cette question.)		
Commentaires libres :		

MERCI POUR VOTRE TEMPS ET VOTRE CONTRIBUTION 😊

H. Séquence CM2 – Séance décrochée : Questionnaires élèves et questionnaire enseignant

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Enseignant.e :	Ecole : ....

<u>Questionnaire élève CM2 – Potence</u> <u>(à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)</u>

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ....

2) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ....

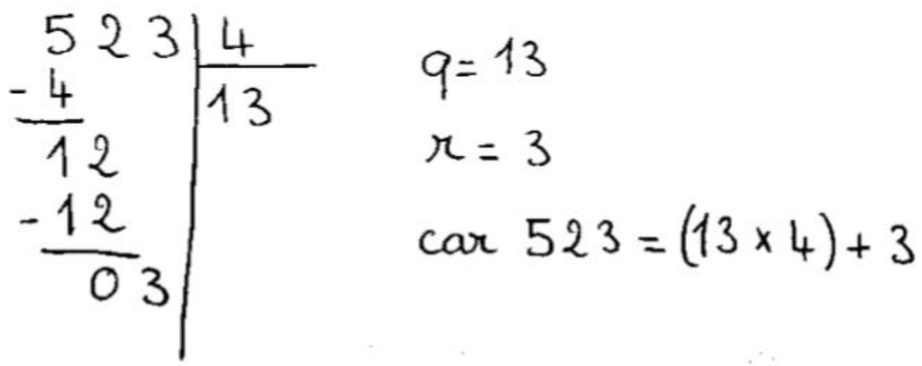
3) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

....

....

4) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non



Explique pourquoi.

....

....

Prénom : …………………………………… Nom : ……………………………………………… Date : …………………………………

Classe : ………………… Enseignant.e : ……………………………………………… Ecole : ……………………………………………

<u>Questionnaire élève CM2 – ADBVL</u> <u>(à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)</u>

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ……

2) Avec quelle technique préfères-tu faire une division posée ?

Avec celle de la potence Avec celle de l'arrêt de bus

Pourquoi ? ……

3) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ……

4) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

……

……

5) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non

13
4 | 523
-4
12
-12
03

q= 13
r= 3
car 523 = (13 x 4) + 3

Explique pourquoi.

……

……

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Enseignant.e :	Ecole : ....

Questionnaire élève CM2 – ADBVC (à faire après l'évaluation finale, à la fin de la séquence)

Entoure la réponse qui est la plus proche de ce que tu penses et réponds aux questions.

1) Aimes-tu faire une division posée ? Oui Non

Pourquoi ? ....

2) Avec quelle technique préfères-tu faire une division posée ?

Avec celle de la potence Avec celle de l'arrêt de bus

Pourquoi ? ....

3) Faire une division posée c'est : Très difficile Assez difficile Assez facile Très facile

Pourquoi ? ....

4) Qu'est-ce que ce que le mot « diviser » veut dire ?

....

....

5) Es-tu d'accord avec le calcul de cet élève qui a voulu effectuer la division de 523 par 4 ?

Oui Non

$$\begin{array}{r|l} & 1\ 3 \quad r\,3 \\ 4 & 5\ {}^{1}2\ 3 \end{array}$$

$q = 13$

$r = 3$

car $523 = (4 \times 13) + 3$

Explique pourquoi.

....

....

Prénom :	Nom :	Date : ....
Classe :	Nombre d'élèves :	Ecole : ....

Questionnaire enseignant CM2 (à remplir après la séquence)

Entourez la réponse qui vous semble être la plus proche de la réalité et commentez si besoin.

1.a. De manière générale, quelle a été l'attitude des élèves face à l'apprentissage d'une autre technique de division posée que celle qu'ils connaissaient déjà ?	Positive	Neutre	Négative
Commentaire :			
1.b. Cette attitude a-t-elle évolué au cours de la séquence ? Si oui de quelle manière ?	Oui beaucoup	Oui un peu	Non
Commentaire :			
1.c Cette attitude varie-t-elle selon le groupe d'élève (si on considère des groupes de besoins par exemple) ? Si oui, de quelle manière ?	Oui beaucoup	Oui un peu	Non
Commentaire :			

1.d Avez-vous constaté un changement de rapport affectif pour la division avec cette nouvelle technique ? Entourez en bleu pour les élèves qui n'avaient pas de difficultés à faire une division posée avant cette séquence, en vert pour la majorité de la classe, et en rouge pour les élèves qui avaient des difficultés à faire des divisions posées avant cette séquence.	**Oui,** faire une division posée semble **plus facile** avec la nouvelle technique.	**Oui,** faire une division posée semble **plus difficile** avec la nouvelle technique.	**Non,** faire une division avec une technique ou l'autre est **aussi facile.**	**Non,** faire une division avec une technique ou l'autre est **aussi difficile.**
Commentaire :				

2.a. Quelles ont été les difficultés principales rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de cette nouvelle technique opératoire ?

2.a. Cette technique opératoire vous semble-t-elle ...... les difficultés rencontrées lors de **l'apprentissage** de la division posée pour les élèves ? Justifier :	Accroitre	Égaler	Diminuer

2.b. Cette technique opératoire vous semble-t-elle ...... les difficultés rencontrées lors de **la réalisation** de la division posée pour les élèves ? Justifier :	Accroitre	Égaler	Diminuer

3.a. Apprendre cette technique opératoire en plus de celle de la potence a ....la compréhension du **sens de la division** pour les élèves. Pourquoi selon vous ?	A amélioré	A renforcer	N'a rien apporté sur	A déconstruit un peu de

4. Quels sont selon vous les avantages/inconvénients principaux de cette technique opératoire si on compare à la technique opératoire traditionnelle de la potence ?

<u>Commentaires libres :</u>

MERCI POUR VOTRE TEMPS ET VOTRE CONTRIBUTION 😊

I. Typologie d'erreur pour une méthode de division traditionnelle et exemples.

Cette typologie et ses exemples sont issus de la thèse de M.P. Normandeau[45], qui s'est elle-même basée sur les travaux de J. Brun, F. Conne, G. Lemoyne, J. Portugais[46].

1.1 <u>Traitement du dividende</u>

1.1a Segmentation : Abaisser d'un coup une partie du dividende ce qui entraîne l'absence des zéros intercalaires au quotient.

```
  7 1 4 7     | 7
- 7           |______
  -------       1 2 1
    1 4
  - 1 4
    -----
        7
```

1.1b Mettre 1 au quotient à la place de 0 parce qu'un dividende partiel < que le diviseur.

```
  7 8 2 9     | 39
- 7 8         |______
  -------       2 1
      2 9
```

1.1c Faire une suite de soustractions successives ce qui entraine une suite de 1 au quotient

```
  5 4 0 0 6 0   | 9 0 1
-     9 0 1     |__________
  -----------     1 1 1 1 1
  4 4 9 9
-   9 0 1
  -----------
  3 5 9 8
-   9 0 1
  -----------
  2 6 9 7
-   9 0 1
  -----------
  1 7 9 6
-   9 0 1
  -----------
    8 9 5 6
```

---

[45] NORMANDEAU, Marie-Pierre. Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant : une analyse didactique en termes de schèmes. Thèse de Ph.D. en sciences de l'éducation option didactique. Montréal : Université de Montréal, Faculté des études supérieures, janvier 2000.

[46] BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. et PORTUGAIS, J. (1994). « La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit », dans Cahiers de la Recherche en Éducation, vol. 1, no 1, p.117-132.

1.1d Un même dividende partiel divisé deux fois ce qui entraîne l'écriture successive de 2 chiffres au quotient.

1 5 7 5	1 5
- 1 5	1 0 **4 1**
7 5	
- 6 0	
1 5	
- 1 5	
0 0	

1.2 <u>Traitement du quotient</u>

Le choix d'un quotient inférieur implique un dividende partiel plus grand que le diviseur. L'élève poursuit le cycle de la division en abaissant à nouveau un chiffre d'où :

1.2a L'écriture d'un nombre à deux chiffres au quotient

7 1 2 6	7
- 7	1 0 0 **1 8**
1 2 6	
- 1 2 6	

1.2b L'écriture d'une suite de neuf

9 0 0 9	9
- 8 1	9 9 9
- 8 1	
9 0	
- 8 1	
8 9	
- 8 1	

1.3 <u>Traitement du diviseur</u>

Le diviseur est découpé en une suite de chiffres non emboîtés.

8 1 9 0 9	9 0 1
- 8 1	
0 9	
- 9	
0 0	
- 0	
0 9	
- 9	
0	

1.4 <u>Traitement du reste</u>

1.4a Reste final plus grand ou égal au diviseur

7 3 4 4	1 8
- 7 2	4 0 7
1 4 4	R 1 8
-1 2 6	
1 8	

1.4b Reste final divisé bien que plus petit que diviseur, d'où un 0 supplémentaire au quotient.

5 6 8	3 6 8
- 3 6 8	1 **0**
2 0 0	

2.1 <u>Erreurs de soustraction</u>

2.1a L'inversion

2 7 4 0	1 4
- 1 4	1 9 8
1 3 **4**	R 8
- 1 2 **6**	
1 **2** 0	
- 1 1 2	
8	

2.1b Erreur de table (-)

2 **7** 4 0	1 4
- 1 **4**	1 8 8
1 **2** 4	R 8
- 1 1 2	
1 2 0	
- 1 1 2	
8	

2.1c Les emprunts

1	
5 6 1	1 1 3
- 4 5 2	4
1 9	R 1 9

2.2 Erreurs de multiplication

2.2a Erreur sur le nombre d'additions successives lors de la recherche d'un produit

```
  8 2 2 5        |1 9
- 5 7            4
  2 5 5…
                     1 9
                   + 1 9
                   + 1 9
                     5 7
```

2.2b *Erreur de table (x)*

```
  7 5 6 3        |9
- 5 6            8
    …
            8 x 9 = 56
```

3.1 Placement du dividende

3.1a N'abaisse pas le chiffre de la colonne et arrête.

```
  8 2 4 1       |8
- 8             1 0
  0 2 4
  - 2 4
      0
```

3.1b N'abaisse pas le chiffre de la colonne et inscrit 0 au quotient.

```
  6 3 4 5        |2 8
- 5 6             2 2 0
    7 4
-   5 6
    1 8
```

3.1c Abaisse un 0 (erreur liée aux divisions des nombres décimaux).

```
  3 5 1        |1 5
- 3 0           2 3 4
    5 1
  - 4 5
      6 0
     - 6 0
        0
```

3.2 <u>Inversions</u>

3.2a Le reste est écrit à l'emplacement du quotient.

```
  1 7 3          | 1 3
- 1 3            |______
  ---------        1 3 4
    4 3
   - 3 9
  ---------
      4
```

3.2b Le produit est écrit à l'emplacement du quotient.

```
  1 7 9          | 5
- 1 5            |______
  ---------        3 2 5 4
    2 9
   -   5
  ---------
    2 4
   - 2 0
  ---------
      4
```

3.2c Le dividende est découpé en allant de droite à gauche en conservant la même technique de placement des chiffres dans le quotient.

```
  1 6 3 6        | 1 8
      -3 6       |______
    ---------      2 3
    6 0
   - 5 4
  ---------
  1 6
```

J. Extrait des programmes scolaires anglais[47] relatif à l'enseignement des divisions posées.

*<u>Year 5 curriculum:</u> Pupils should be taught to divide numbers up to **4 digits by a one**-digit number using the formal written method of **short division** and interpret remainders appropriately for the context.*

<u>Year 6 curriculum</u>: Pupils should be taught to:

- *divide numbers up to **4 digits by a two-digit** whole number using the formal written method of **long division**, and interpret remainders as whole number remainders, fractions, or by rounding, as appropriate for the context*
- *divide numbers up to **4 digits by a two-digit** number using the formal written method of **short division** where appropriate, interpreting remainders according to the context*

[47] DEPARTMENT FOR EDUCATION. The national curriculum in England. Framework document [en ligne]. Décembre 2014 [consulté le 05.01.2020]. Disponible sur le Web : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381344/Master_final_national_curriculum_28_Nov.pdf

K. Questions de l'évaluation de janvier de l'étude *From informal strategies to structured procedures : Mind the gap !* [48]

TABLE I

Ten problems used in the first test

number type	bare problem	context problem	(context) problem type
2-digit divided by 1-digit no remainder	6. 96÷6	1. 98 flowers are bundled in bunches of 7. How many bunches can be made?	grouping
2-digit divided by 2-digit no remainder	7. 84÷14	2. 64 pencils have to be packed in boxes of 16. How many boxes will be needed?	grouping
3-digit divided by 2-digit remainder	8. 538÷15	3. 432 children have to be transported by 15 seater buses. How many buses will be needed?	grouping
3-digit divided by 10 remainder	9. 802÷10	4. 604 blocks are laid down in rows of 10. How many rows will there be?	grouping by 10
4-digit divided by 1-digit remainder	10. 1542÷5	5. 1256 apples are divided among 6 shopkeepers. How many apples will each shopkeeper get? How many apples will be left?	sharing

[48] ANGHILERI, Julia, BEISHUIZEN, Meindert, VAN PUTTEN, Kees. "*From informal strategies to structured procedures: Mind the gap!*", Educational Studies in Mathematics. 2002, 49, 149-170.