MASTER METIERS DE L'ÉDUCATION, DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA FORMATION	
Mention	**Parcours**
Premier degré	M2A
Site de formation :	Croix de Pierre, TOULOUSE

MEMOIRE

Les obstacles des élèves dans la comparaison des nombres décimaux au cycle 3

RAYNAUD Leslie

Directeur-trice de mémoire (en précisant le statut)	**Co-directeur-trice de mémoire** (en précisant le statut)
LAGUERRE Éric, Maître de conférences	
Membres du jury : (en précisant le statut)	
- **FRUCHON Cédric,** PRAG - **LAGUERRE Éric,** Maître de conférences	
Remis le : **09/06/2020**	**Soutenu le :** **..../..../2020**

Année universitaire 2019-2020

Table des matières

Introduction

Ce mémoire de recherche s'inscrit dans le cadre du master MEEF (Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement et de la Formation) premier degré.

Actuellement professeur des écoles stagiaire en école maternelle, en classe de moyenne section, j'ai cependant fait le choix de réaliser ce mémoire de recherche sur une thématique abordée au cycle 3.

En effet, au cours de ma première année de master MEEF Professeur des écoles au sein de l'INSPÉ (Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation) de Toulouse, j'ai réalisé un stage d'observation et de pratique accompagnée dans une classe de CM2 (Cours Moyen 2ème année). J'ai notamment animé, au sein de cette classe, une séance portant sur la comparaison des nombres décimaux. J'ai alors été confrontée à l'hétérogénéité des conceptions et des procédures des élèves dans la réalisation de cette tâche. Cela m'a rapidement placée en difficulté, ne sachant pas comment déconstruire certaines procédures erronées.

En effet, comme le stipule Brousseau en 1998, les connaissances et procédures erronées des élèves produisent, très souvent, des réponses correctes. Si cette procédure erronée produit une bonne réponse sur un temps long, alors il sera plus difficile de la modifier ou de la rejeter. Il parle alors d'obstacles qui posent des difficultés pour la suite des apprentissages.

L'enseignement des nombres décimaux fait l'objet de nombreuses recherches scientifiques depuis le siècle dernier mais il continu à poser des difficultés aux professeurs des écoles.

Les évaluations nationales à l'entrée en sixième (Chesné et Fischer, 2015) viennent confirmer les propos des didacticiens en mathématiques quant aux difficultés des élèves dans l'apprentissage des nombres décimaux. Ces difficultés perdurent, pour certains, dans le temps puisque 10% des jeunes français sont en difficulté pour réaliser des activités quotidiennes utilisant des nombres, et notamment les nombres décimaux (Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance, 2014).

Cette pratique accompagnée réalisée au cours du master 1 MEEF a donc soulevé chez moi de nombreuses questions auxquelles je souhaite apporter une réponse. J'ai donc conservé cette thématique de recherche car elle constitue une de mes nombreuses préoccupations professionnelles.

Je souhaiterais, à travers ce mémoire de recherche, comprendre l'origine des conceptions des élèves concernant les nombres décimaux et avoir des outils pour pouvoir concevoir un enseignement permettant d'aider les élèves à surmonter leurs obstacles dans la comparaison des nombres décimaux. Le but de l'enseignement est en effet de permettre aux élèves de dépasser leurs conceptions initiales si elles sont erronées ou bien d'acquérir des méthodes qui facilitent la résolution de situations.

La construction de ce mémoire de recherche me permettra d'étoffer mes compétences professionnelles sur l'ensemble des cycles de l'école primaire. Cela me sera utile dans ma carrière lorsque je serai confrontée à l'enseignement de cette notion.

Ce mémoire de recherche portera donc sur les obstacles des élèves dans la comparaison des nombres décimaux au cycle 3.

I. Cadre théorique

a. *Les obstacles*

La notion d'obstacle, évoquée précédemment, a été clarifiée par Duroux (1983) car elle était trop souvent confondue avec celle de difficulté (obstacle et difficulté pouvant tout deux conduire à des erreurs de la part des élèves).

Il précise, en premier lieu, qu'un obstacle est une connaissance ce qui le différencie dès lors de la difficulté. L'obstacle ne conduit pas toujours à des erreurs : en effet, la connaissance liée à l'obstacle produit des réponses justes dans un certain nombre de situations. En dehors de ces situations, cette connaissance aboutira à des erreurs qui pourront alors être repérées. De plus, cette connaissance est très stable : il est plus coûteux pour l'élève de la rejeter totalement que de l'adapter aux situations dans lesquelles elle n'est pas valable. Elle empêche ainsi la construction d'une connaissance plus adaptée. Le franchissement d'un obstacle ne peut se faire que dans certaines situations où il sera rejeté, ce qui permettra de construire le savoir. Cependant, après la prise en compte par les élèves de son inexactitude, cette connaissance peut parfois réapparaitre inopinément.

Il existe plusieurs types d'obstacles, ayant chacun une origine propre : les obstacles épistémologiques et les obstacles didactiques.

Les obstacles épistémologiques sont liés à la résistance d'un savoir mal adapté.

Les obstacles didactiques sont liés aux choix du système éducatif, de l'enseignant et aux variables didactiques choisies.

i. Les obstacles épistémologiques

Comme évoqué dans l'introduction, l'apprentissage d'une nouvelle connaissance nécessite de modifier, de faire évoluer des représentations initiales. Cela pose d'autant plus de problème lorsqu'il est nécessaire d'abandonner totalement ces représentations mentales. Cet abandon constitue, pour les élèves, un obstacle épistémologique dans l'apprentissage de la connaissance nouvelle.

Lors de l'apprentissage des nombres décimaux, les élèves possèdent de multiples connaissances sur les nombres entiers. Or, ces représentations vont devoir être en partie modifiées puisque certaines règles s'appliquant aux nombres entiers ne sont pas valables pour les nombres décimaux.

En appui sur les travaux de Bachelard et de Piaget, Brousseau (1976) définit le concept d'obstacle épistémologique :

> L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.

Grisvard et Léonard, en 1983, se sont intéressés à ces obstacles et ont identifié certaines règles erronées utilisées par les élèves pour comparer les nombres décimaux. Certains élèves rangent les nombres en fonction de la partie entière puis ils appliquent aux parties décimales seules, la procédure de comparaison des entiers. D'autres rangent les nombres décimaux dans l'ordre inverse de la longueur de leur partie décimale : plus la partie décimale est courte, plus le nombre est considéré comme « grand ». Enfin, une autre règle erronée a été identifiée : les nombres ayant zéro dixième sont considérés comme les plus petits, les autres nombres sont rangés en suivant la première règle.

Pour permettre aux élèves de surmonter ces obstacles épistémologiques, Brousseau (1976) souligne l'importance de confronter les représentations initiales des élèves à de multiples situations où elles ne sont pas valables et produisent des réponses fausses. Ceci va alors permettre à l'élève de mettre en doute sa connaissance et de la modifier pour construire une connaissance nouvelle.

ii. Les obstacles didactiques

Les obstacles didactiques, quant à eux, peuvent résulter des programmes scolaires ou bien des pratiques propres à chaque enseignant.

Par exemple, Comiti et Neyret (1979) se sont intéressés à diverses présentations des nombres décimaux et aux effets qu'elles pouvaient avoir sur les conceptions des élèves. Une présentation non adaptée des nombres décimaux peut créer un obstacle pour les élèves. Par exemple, le fait de présenter les nombres décimaux comme des nombres qui comprennent deux parties séparées par une virgule, renforce l'idée qu'il est nécessaire de comparer séparément chaque partie des nombres décimaux pour pouvoir déterminer lequel est le plus grand. Un nombre décimal est, dans ce cas, conçu comme deux nombres entiers séparés par une virgule, ce qui renforce les représentations erronées des élèves concernant les nombres décimaux. Il est donc préférable d'énoncer « 2 unités, 3 dixièmes et 5 centièmes » plutôt que de dire « 2 virgule 35 ».

Certaines situations, appelées situations fondamentales, peuvent permettre, selon Brousseau (1998), de dépasser ces obstacles.

b. Les situations fondamentales

En 1998, Brousseau a établi une classification des situations d'enseignement en mathématiques (également appelées situations didactiques).

Une situation mathématique correspond aux relations entre un ou plusieurs sujets (élève, enseignant) et leur milieu. Les sujets, selon un projet, vont transformer le milieu pour l'amener vers un état terminal. Cette transformation nécessite l'utilisation particulière d'une connaissance mathématique.

Il a notamment défini la notion de situation fondamentale, situation permettant de dépasser un obstacle.

Une situation fondamentale doit remplir plusieurs conditions. Cette situation doit être a-didactique c'est-à-dire que l'élève ne doit pas pouvoir identifier la connaissance en jeu. Il doit être capable de résoudre le problème posé indépendamment de toute indication didactique (intentions et interventions de l'enseignant). Cependant, l'élève doit être capable de s'engager dans une réponse (pouvant être partielle) grâce à ses connaissances. Il doit pouvoir agir sur la situation et cette dernière doit lui renvoyer de l'information lui permettant de valider la solution proposée ou de rétroagir sur cette situation. Enfin, la meilleure solution au problème posé doit être le savoir visé.

Brousseau a identifié quatre phases nécessaires à la construction de nouvelles connaissances par les élèves. A la suite de la phase d'action de l'élève sur le milieu, l'apprenant doit pouvoir échanger, avec un interlocuteur, sur les résultats de ses actions et formuler la connaissance en jeu (phase de formulation). S'en suit une phase de validation, au cours de laquelle s'instaure un débat scientifique entre les deux actants. Les élèves confrontent leur avis et exposent leurs arguments afin de valider la connaissance en lien avec la situation. La phase d'institutionnalisation permet de faire passer la connaissance du statut de moyen pour résoudre la situation au statut de référence (méthode ou théorème) pour diverses situations futures. Cette dernière phase permet aux élèves d'acquérir de nouvelles connaissances ou de modifier des connaissances fausses pouvant constituer des obstacles.

II. Problématique et questions de recherche

L'apprentissage des nombres décimaux au cycle 3 est un tournant pour les élèves puisqu'il remet en question leurs connaissances sur les nombres, acquises depuis le cycle 1. En effet, ils découvrent l'existence de nouveaux nombres, les nombres décimaux, sur lesquels les règles apprises jusqu'alors, concernant les nombres entiers, ne sont pas toujours applicables. Cet apprentissage les confronte donc à de nombreux obstacles – au sens de Brousseau (1976) – qui, pour certains, n'ont jamais été surmontés, et continuent à exister dans leur vie d'adulte. Par exemple, certains élèves pensent que les notions de prédécesseur et de successeur, valables pour les entiers, le sont aussi pour les nombres décimaux ce qui constitue un obstacle épistémologique dans la résolution de nombreuses activités quotidiennes. Afin de remédier à cela, je souhaite, à travers ce mémoire de recherche, répondre à la problématique suivante :

Comment aider les élèves à surmonter certains obstacles auxquels ils font face dans la comparaison des nombres décimaux ?

Plusieurs questions gravitent autour de cette problématique centrale. Nous essaierons d'y répondre au mieux afin d'identifier le plus précisément possible les obstacles des élèves et les méthodes nécessaires pour les franchir. Tout d'abord, il est nécessaire de définir ce qu'est un nombre décimal, de repérer sa fonction et d'établir sa particularité par rapport aux autres fractions. Par la suite, nous devrons analyser les prescriptions institutionnelles (programmes du cycle 3) quant à la comparaison des nombres décimaux. Enfin, nous nous intéresserons à la didactique des nombres décimaux et plus particulièrement nous essayerons de répertorier plusieurs obstacles (didactiques et épistémologiques) liés à la comparaison des nombres décimaux. Il faudra, par la suite, proposer des méthodes d'enseignement permettant de déconstruire les conceptions erronées pour dépasser les obstacles épistémologiques et d'éviter les obstacles didactiques.

III. Protocole de recueil des données

Afin de répondre au plus juste à la problématique posée, nous commencerons par donner une définition du nombre décimal et définir son utilité dans notre quotidien.

Afin d'identifier certains obstacles didactiques dans la comparaison des nombres décimaux, nous analyserons les programmes du cycle 3, les ressources Éduscol et certains manuels de mathématiques. Ces analyses seront complétées par les apports des articles de recherche traitant de ce sujet.

Aussi, nous créerons et proposerons, à des élèves de CM2, une évaluation diagnostique portant sur la comparaison des nombres décimaux. Celle-ci doit permettre de confronter les élèves à toutes les difficultés de comparaison des nombres décimaux (présence de chiffres 0 dans la partie décimale, nombres à comparer ayant le même nombre de chiffres ou non, intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux donnés …). Nous pourrons ainsi identifier quelques obstacles épistémologiques auxquels les élèves font face. Nous nous appuierons également sur les articles de recherche pour compléter ce recueil de données.

Il sera ensuite nécessaire d'élaborer une séquence, en prenant appui sur nos constats et sur les articles de recherche traitant de ce thème (notamment la situation fondamentale définie par Brousseau (cf. I. b.)). Cette séquence sera testée dans la même classe de CM2.

L'efficacité des dispositifs proposés au cours des séances sera évaluée grâce à une évaluation sommative pour identifier les progrès des élèves (à la fois sur le court terme mais également sur le long terme). En effet, comme le soulignent Grisvard et Léonard, « la compréhension d'une notion n'est pas immédiate » (Grisvard, Léonard, 1983 : 458). Il faudra, à certains élèves, plus ou moins de temps pour bien intégrer une procédure fiable.

IV. Recueil et analyse de données

a. Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

Un nombre décimal peut être défini de plusieurs façons.

Tout d'abord, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire une fraction ayant une puissance de 10 comme dénominateur. Par exemple, $\frac{8}{1000}$ est un nombre décimal.

Il peut être également caractérisé comme un nombre possédant une partie décimale finie, séparée de la partie entière par une virgule : 1,25 est un nombre décimal.

Enfin, il peut être particularisé comme suit : c'est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers irréductible dont le dénominateur est un produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5. Par exemple, $\frac{5}{20}$ est un nombre décimal ($20 = 2^2 x5$).

Les nombres décimaux peuvent donc se rencontrer sous deux formes : sous une écriture à virgule ou sous une écriture fractionnaire.

Une définition erronée des nombres décimaux peut être source de nombreux obstacles : encore aujourd'hui, de nombreuses personnes caractérisent les nombres décimaux comme des nombres à virgule.

b. À quoi servent les nombres décimaux ?

Les nombres décimaux sont apparus au XVI$^{\text{ème}}$ siècle par S. Stevin. À cette époque, l'intérêt des nombres décimaux était limité à la simplification : les calculs et les mesures étaient simplifiés par l'utilisation de ces nouveaux nombres. Or, cette image des nombres décimaux a masqué la principale fonction de ces nombres qui est celle d'approcher n'importe quel nombre réel. En effet, l’utilisation de certains nombres réels est facilitée par l’approximation décimale de ce nombre.

Ainsi, les nombres décimaux sont souvent utilisés comme outils pour mesurer car ils permettent d’obtenir un résultat précis.

Cependant, il est nécessaire de dissocier mesures et nombres décimaux. Limiter l’utilisation des décimaux à des activités de mesure pourrait effectivement engendrer des obstacles chez les élèves. En effet, les conversions dans le système métrique renforcent l’idée que les nombres décimaux sont constitués de deux entiers séparés par une virgule : par exemple, 1,25 m correspond à 1 m et 25 cm.

c. *Les nombres décimaux dans les instructions officielles*

i. Les programmes de 2018

Les nombres décimaux sont abordés pour la première fois dans les programmes du cycle 3 (Ministère de l’Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018), ils sont absents des programmes des cycles antérieurs.

Dans les programmes de 2018, ils apparaissent dans tous les attendus de fin de cycle du domaine « Nombres et calculs » (Ministère de l’Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018 : 29). Les élèves doivent donc être capables, à la fin du cycle 3, d’utiliser, de représenter les nombres décimaux mais également de résoudre des calculs et des problèmes les faisant intervenir.

En ce qui concerne la comparaison des nombres décimaux, nous nous situons dans l’attendu de fin de cycle « Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux » (Ministère de l’Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018 : 29). Nous pouvons apercevoir clairement ici le lien nécessaire entre fractions et nombres décimaux. Nous pouvons y voir également une certaine progression pour l’enseignement de ces différents nombres. Dans un premier temps, il semblerait important d’étudier les grands nombres entiers et notamment les unités de la numération décimale et leurs relations. Par la suite, l'apprentissage et l'utilisation des fractions doit permettre d'introduire l'enseignement des nombres décimaux.

La comparaison des nombres décimaux implique de connaitre la valeur de chaque chiffre en fonction de sa position dans le nombre (numération décimale de position). L'acquisition de cette compétence est facilitée par l'apprentissage, en amont, des fractions notamment des fractions décimales.

En observant plus en détails les compétences relatives aux nombres décimaux, nous nous apercevons qu'elles font appel à divers registres de représentation : écriture décimale, écriture fractionnaire, représentation sur une graduation, mesures de grandeurs … Éric Roditi (2007) s'est intéressé à ces changements de registres et à leurs effets sur les performances des élèves dans la comparaison des nombres décimaux. Il lui semblerait que comparer des nombres décimaux dans différents registres de représentation favoriserait l'apprentissage des élèves.

Au sein de la sous-partie concernant les nombres décimaux, nous pouvons identifier la compétence « Comparer, ranger des nombres décimaux » (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018 : 30). Cependant, l'exercice de comparaison des nombres décimaux me semble rassembler plusieurs autres compétences mentionnées dans ces programmes. Placer des nombres décimaux sur une demi-droite graduée, encadrer un nombre décimal par deux nombres décimaux ou par deux nombres entiers, intercaler des nombres décimaux entre deux nombres donnés nécessitent implicitement d'effectuer un travail de comparaison des nombres en jeu.

La comparaison des nombres décimaux fait donc appel à de nombreuses compétences mentionnées dans les programmes de cycle 3 de 2018, programmes en adéquation avec les recherches scientifiques.

La comparaison des nombres décimaux se poursuit au cycle 4 avec l'apparition de l'écriture scientifique.

En complément de ces programmes nationaux, les ressources Éduscol nous permettent de nous informer et nous accompagnent afin de concevoir et de mettre en œuvre un enseignement adapté.

ii. Les ressources Éduscol

À ce jour, il existe une ressource, intitulée *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016), qui nous détaille la progressivité des apprentissages et nous propose des stratégies d'enseignement et quelques situations d'apprentissage concernant ces notions.

Des stratégies sont notamment proposées pour l'enseignement de la comparaison des nombres décimaux. Il est indiqué qu'il est nécessaire de choisir les nombres proposés dans les activités en s'appuyant sur les obstacles mis en évidence par les travaux de recherche. Ainsi, lors de la conception de l'évaluation diagnostique que nous proposerons à des élèves de CM2, il sera nécessaire de choisir avec précision les nombres présents afin que les activités proposées puissent nous permettre d'identifier certains obstacles. De plus, pour déceler certaines conceptions erronées, il est important de donner la possibilité aux élèves de justifier les réponses qu'ils fournissent afin d'expliciter les procédures qu'ils utilisent.

À partir des programmes de mathématiques du cycle 3 et des ressources Éduscol, des activités permettant de travailler les différentes compétences concernant la comparaison des nombres décimaux peuvent être proposées aux élèves de CM2. Les manuels de mathématiques présentent de nombreuses activités et contenus de savoir dont certains peuvent créer des obstacles pour les élèves. Nous allons donc, à présent, analyser les contenus de plusieurs manuels de mathématiques.

d. Les obstacles didactiques dans les manuels de mathématiques

Les enseignants de cycle 3 font face à une large offre de manuels de mathématiques. Afin d'identifier les activités les plus cohérentes et d'éviter de créer certains obstacles didactiques, les enseignants doivent analyser les contenus proposés par ces manuels.

Nous allons donc analyser les pages concernant la comparaison des nombres décimaux et plus précisément les traces écrites proposées par quatre manuels de mathématiques de CM2 : *J'aime les maths CM2* (Rzanny, Bourreau, Ferro, Moreira et Graff, 2017), *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean, Carle et Ginet, 2017), *Graine de maths CM2* (Malaval et al., 2017) et *Cap Maths CM2* (Charnay, Anselmo, Combier, Dussuc et Madier, 2017). J'ai pu identifier, au sein des contenus proposés, plusieurs points pouvant constituer des obstacles didactiques.

La plupart des manuels étudiés (trois manuels sur quatre) propose un algorithme de comparaison des nombres décimaux. L'algorithme détaillé par le manuel *J'aime les maths CM2* (Rzanny et al., 2017) peut constituer un obstacle didactique (Annexe I.A). En effet, il est présenté comme suit : « Pour comparer deux nombres décimaux, il faut comparer les parties entières, puis les parties décimales entre elles si les parties entières sont égales » (Rzanny, Bourreau, Ferro, Moreira et Graff, 2017 : 60). La méthode proposée n'est pas fausse mais peu détaillée et les élèves peuvent ainsi penser qu'il est nécessaire de comparer les parties entières entre elles puis les parties décimales entre elles en utilisant, pour chaque partie, la procédure de comparaison des nombres entiers. De plus, cette proposition risque de renforcer une des conceptions erronées que peuvent avoir certains élèves, concernant le nombre décimal, à savoir qu'il est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. L'algorithme proposé par le manuel *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean et al., 2017) renforce aussi cette représentation du nombre décimal (Annexe I.B) : « Attention quand on compare des nombres décimaux qui n'ont pas le même nombre de chiffres après la virgule, il faut compléter la partie décimale » (Petit-Jean, Carle et Ginet, 2017 : 40). Ce manuel propose donc de rajouter des chiffres 0 à la suite du nombre ayant la plus courte partie décimale afin que les parties décimales des nombres à comparer aient le même nombre de chiffres. Cela vise ensuite à comparer les parties décimales entre elles en utilisant la procédure de comparaison des nombres entiers. Cette méthode est valable et peut être utilisée à condition que les élèves ne conçoivent pas le nombre décimal comme deux nombres entiers séparés par une virgule. *Graine de maths CM2* (Malaval et al., 2017) propose un algorithme beaucoup plus précis limitant ainsi les obstacles didactiques (Annexe I.C). Il vise à comparer les parties entières puis, si elles sont égales, les chiffres des dixièmes. Si les parties entières et les chiffres des dixièmes sont égaux, alors il indique de comparer les chiffres des centièmes et ainsi de suite jusqu'à ce que les chiffres de même rang soient différents. Le nombre le plus grand sera celui dont le chiffre du rang considéré est le plus élevé. Le manuel *Cap Maths CM2* (Charnay et al., 2017) ne propose pas un algorithme de comparaison des nombres décimaux à appliquer mais demande aux élèves de le rédiger eux-mêmes (Annexe I.D). Cela doit permettre, lors de la mise en commun, de déconstruire les procédures erronées proposées et d'institutionnaliser l'algorithme à mettre en œuvre lié à la valeur de chaque chiffre du nombre (aspect positionnel).

Le manuel *J'aime les maths CM2* (Rzanny et al., 2017) défini l'encadrement d'un nombre décimal par l'écriture du nombre « qui vient juste avant et celui qui vient juste après » (Rzanny et al., 2017 : 60). Cette affirmation n'est pas correcte puisqu'elle fait référence aux notions de prédécesseur et de successeur non valables pour les nombres décimaux. De plus, il est indiqué dans ce même manuel que l'on peut intercaler 999 nombres entre 9 et 10, de 9,001 à 9,999. Cela serait juste s'il était précisé que l'on peut intercaler 999 nombres dont la partie décimale est formée d'un, deux ou trois chiffres. Entre 9 et 10, comme entre n'importe quels nombres, il est possible d'intercaler une infinité de nombres.

Après avoir identifié certains obstacles didactiques présents dans des manuels de mathématiques de cycle 3, nous visons à présent à déceler certains obstacles épistémologiques. Pour cela, j'ai conçu une évaluation diagnostique, pour des élèves de CM2, sur la comparaison des nombres décimaux.

e. Analyse de l'évaluation diagnostique

i. Conception de l'évaluation diagnostique

Cette évaluation diagnostique (Annexe II) a été construite à partir des programmes de mathématiques du cycle 3 (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018). Elle vise à évaluer les différentes compétences, évoquées précédemment, concernant la comparaison des nombres décimaux : « comparer », « ranger », « encadrer », « intercaler » et « placer un nombre décimal sur une droite graduée » (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2018 : 30).

L'objectif de cette évaluation est d'identifier certains obstacles épistémologiques auxquels font face les élèves lorsqu'ils comparent les nombres décimaux. De plus, elle nous permettra de construire une ou plusieurs séances qui auront pour but d'aider les élèves à surmonter ces obstacles.

Pour permettre cela et comme le précise la ressource Éduscol *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016), il est nécessaire de s'appuyer sur les obstacles décelés dans la recherche. Ainsi, pour concevoir cette évaluation, j'ai utilisé deux articles de recherche écrits par Grisvard et Léonard (1981, 1983). Ces chercheurs ont identifié trois règles utilisées par les élèves pour comparer les nombres décimaux. Ces règles constituent des obstacles puisqu'elles produisent des réponses justes dans certains contextes. Les exercices proposés dans cette évaluation visent à déceler l'utilisation d'une ou de plusieurs règles par les élèves. Par exemple, si l'élève utilise la règle n°1, à savoir qu'il compare les parties décimales seules comme il compare les entiers, il produira une réponse fausse en comparant 2,78 et 2,8 (exercice n°1) : 2,78 > 2,8 puisque 78 > 8. S'il compare les nombres décimaux en fonction de la longueur de leur partie décimale (le nombre ayant la plus grande partie décimale étant le plus petit), il produira notamment une erreur dans l'exercice n°1 : 23,786 < 23,78. L'application de la troisième règle (Le nombre le plus petit est celui dont le chiffre des dixièmes est 0 ; les autres nombres sont rangés en suivant la première règle) produira une réponse erronée dans l'exercice n°2 : 3,091 < 3.5 < 3.48. Cet exercice n°2 vise à comparer un nombre plus important de nombres décimaux afin de déceler l'utilisation de certaines règles. En effet, comme le précisent Grisvard et Léonard (1983), la comparaison de deux nombres décimaux n'ayant que deux réponses possibles, il est parfois plus difficile d'identifier les règles utilisées (cela est notamment vrai pour la règle n°3 qui produit une réponse juste lorsqu'elle est applicable et appliquée pour comparer deux nombres).

Comiti et Neyret (1979) ont identifié une autre règle pouvant être utilisée et contraire à la règle n°2 définie par Grisvard et Léonard (1981, 1983) : le nombre décimal le plus petit est celui qui a le moins de décimales. L'élève utilisant cette règle produira une réponse fausse dans le cas suivant de l'exercice n°1 : 0,08 > 0,8. De même, une conception erronée que peuvent avoir certains élèves est que plus l'écriture du nombre est longue, plus ce nombre est grand avec ou sans parties entières égales. En revanche, les erreurs produites seront identiques dans le cas où les parties entières des nombres sont égales, que l'élève considère uniquement la longueur de la partie décimale ou bien qu'il considère la longueur totale du nombre. Pour déceler la règle utilisée, nous nous appuierons sur la justification donnée par l'élève.

Ainsi, la justification des réponses demandée à l'exercice 1 vise à pouvoir identifier plus justement les règles utilisées et les obstacles épistémologiques des élèves dans la comparaison des couples de nombres.

Roditi (2007), quant à lui, s'est intéressé à l'effet de la présentation des nombres à comparer sur la réussite des élèves. L'exercice 3 est proposé pour identifier cela. La mise en contexte des nombres à comparer peut-elle, ou non, influer sur la réussite des élèves ?

L'exercice 4 permet de travailler les compétences d'encadrement et d'intercalation des nombres décimaux. Cet exercice peut nous permettre d'infirmer ou de confirmer les conceptions erronées de certains élèves concernant les nombres décimaux.

L'exercice 5 fait intervenir le registre graphique : l'élève doit placer des nombres décimaux sur une droite graduée (en dixièmes ou en centièmes). A travers cet exercice, nous allons nous intéresser, tout comme Éric Roditi en 2007, au lien entre la capacité à comparer les nombres décimaux et la capacité à changer de registre de représentation.

Cette évaluation diagnostique a été proposée à une classe de CM2 de 27 élèves. Nous allons, à présent, analyser les productions des élèves.

ii. Analyse des réponses des élèves

Lors de l'analyse des réponses de l'exercice 1, j'ai remarqué que six élèves avaient justifié la majorité de leurs réponses de la manière suivante : « x est plus grand que/plus petit que/égal à y », x et y correspondant aux nombres décimaux à comparer (Annexe III.A). Dans un premier temps, nous pouvons penser que ces élèves ne justifient pas leurs réponses mais expliquent la signification de l'écriture mathématique (x >/</= y). Par ailleurs, il est envisageable que ces élèves renvoient, au travers des termes « grand » et « petit », à la longueur des nombres à comparer. Une interrogation se pose donc à nous : Ces élèves considèrent-ils la valeur des nombres ou bien leur longueur ?
Il semblerait que seul un entretien individuel avec les élèves concernés permettrait d'y répondre … En effet, l'ensemble de ces élèves a réussi à comparer les nombres 9,35 et 9,68. Ils ont, tous les six, donné une justification similaire : « 9,68 est plus grand que 9,35 ». Dans ce cas-là, le terme « grand » est associé à la valeur du nombre puisque les deux nombres à comparer ont une longueur égale. De même, quatre de ces six élèves ont également réussi à comparer les nombres 23,1 et 22,256, dont les parties entières sont différentes, en justifiant que 23,1 est plus grand que 22,256 (ils considèrent donc, à nouveau, la valeur des nombres). Cependant, ces six élèves ne réussissent pas à

comparer 54,5 et 54,499, dont les parties entières sont égales, mais utilisent la même justification (54,499 est plus grand 54,5). Il est donc difficile de déterminer avec certitude, pour chaque réponse donnée par ces élèves, si la justification concerne la valeur des nombres ou bien leur longueur. Il semble évident qu'ils évoquent la valeur des nombres dans certains cas (9,35<9,68 et 23,1>22,256) et n'expliquent donc pas leur procédure de réalisation. En ce qui concerne les justifications des autres couples à comparer, nous ne pouvons pas déterminer si ces élèves considèrent la valeur des nombres ou bien évoquent leur longueur. Nous ne pouvons donc pas avoir accès à leur procédure de réalisation pour l'ensemble de l'exercice 1.

Dans la suite de cette analyse, nous ne prendrons donc pas en compte les justifications du type « x est plus grand que/plus petit que/égal à y » excepté lorsqu'aucun doute n'est possible sur les significations des termes « grand », « petit » et « égal » (valeur ou longueur des nombres).

Sur un total de 27 élèves, cinq n'ont justifié aucune réponse, un seul n'a pas réalisé l'exercice n°1.

En analysant l'ensemble des réponses données à l'exercice n°1, nous pouvons identifier plusieurs procédures utilisées par les élèves.

Tout d'abord, nous allons nous intéresser aux règles erronées constituant des obstacles épistémologiques puisqu'elles permettent d'obtenir une réponse correcte dans un certain nombre de situations.

Certains élèves (27%) comparent les parties décimales des deux nombres en utilisant la procédure de comparaison des nombres entiers (règle n°1 définie par Grisvard et Léonard (1981, 1983)). Ainsi, ils affirment que 9,48 est plus grand que 9,480 car 480 est supérieur à 48 (Annexe III.B).

D'autres élèves (6%) utilisent la règle définie par Comiti et Neyret (1979), selon laquelle le nombre le plus petit est celui qui a le moins de chiffres dans sa partie décimale. Grâce à cette règle, ils réussissent à comparer 23,786 et 23,78 mais commettent une erreur en comparant 2,78 et 2,8 (Annexe III.C).

13% des élèves utilisent les deux procédures, en fonction des nombres à comparer.

50% des élèves pensent que 0,8 est égal à 0,08. Lorsqu'ils justifient leur réponse, ils indiquent que le « 0 ne compte pas » ou bien que l'on peut ajouter ou supprimer autant de 0 que l'on souhaite et que ça ne changera pas le nombre. Ils appliquent à nouveau leurs connaissances des nombres entiers : 08 est égal à 8. 92% d'entre eux ont également commis une erreur en comparant 11,59 et 11,087. Les élèves ayant justifié leur réponse stipulent que 59 est inférieur à 87 puisqu'ils considèrent que le chiffre 0 peut être supprimé (Annexe III.D).

Sur l'ensemble des élèves ayant justifié leurs réponses, aucun ne semble avoir utilisé la règle n°2 définie par Grisvard et Léonard (1981, 1983) selon laquelle le nombre le plus petit est celui ayant le plus de chiffres dans sa partie décimale.

Par ailleurs, certaines procédures utilisées par les élèves permettent de réussir à comparer les nombres décimaux.

Lorsque les parties entières des nombres sont différentes, la majorité des élèves (88%) réussit à comparer les deux nombres. La plupart des procédures utilisées (92%) vise à comparer les parties entières des nombres (Annexe III.E). Le nombre ayant la plus grande partie entière est donc le plus grand. Un seul élève compare les chiffres de même rang en débutant par le rang le plus à gauche du nombre (Annexe III.F). Dans le cas de la comparaison de 23,1 et 22,256, il compare les chiffres des dizaines, puis ceux des unités et conclut donc que 23,1 est supérieur à 22,256 puisque 3 est supérieur à 2.

Plusieurs procédures ont été utilisées par les élèves pour comparer deux nombres dont les parties entières sont égales. Certains élèves utilisent parfois des procédures différentes en fonction des couples à comparer.

Certains élèves (14%) comparent les chiffres de même rang dans la partie décimale en commençant par le rang le plus à gauche (Annexe III.G). Lorsque les chiffres d'un même rang sont différents, le nombre le plus grand est celui qui possède le chiffre le plus grand sur le rang considéré.

Quelques élèves (14%) ont rajouté ou supprimé des chiffres 0 à la droite des nombres afin que les nombres à comparer aient une partie décimale de même longueur (Annexe III.H). Si les nombres possèdent déjà des parties décimales de même longueur, alors ils comparent ces parties en utilisant la procédure de comparaison des nombres entiers. Cette procédure, proposée par le manuel *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean et al., 2017), est valable mais risque de renforcer l'idée qu'un nombre décimal est formé de deux entiers séparés par une virgule. Ce n'est donc pas la procédure optimale.

Concernant l'exercice 2, 63% des élèves n'ont pas réussi à ranger les nombres d'au moins une liste dans l'ordre croissant. 53% d'entre eux semblent ranger les nombres en comparant dans un premier temps les parties entières. Pour les nombres ayant des parties entières égales, ils comparent les parties décimales en utilisant la procédure de comparaison des nombres entiers (Annexe III.I). Dans ce cas-là, et contrairement à la règle n°3 définie par Grisvard et Léonard (1983) selon laquelle le nombre ayant 0 dixièmes est considéré comme le plus petit puis les autres nombres sont rangés en comparant les parties décimales comme des entiers, les élèves ne tiennent pas compte des chiffres 0 de la partie décimale situés entre la virgule et le premier chiffre différent de 0 : 3,48 est considéré comme plus petit que 3,091 car 48 est inférieur à 91.

D'autres élèves (29%), en tenant compte ou non de la valeur de la partie entière des nombres, les rangent en fonction de leur longueur (Annexe III.J). Dans ce cas-là, nous ne pouvons pas déterminer s'ils comparent la longueur totale des nombres ou bien uniquement la longueur des parties décimales puisque les parties entières des nombres à comparer ont la même longueur. Il aurait été nécessaire de proposer des nombres avec des parties entières de longueurs différentes pour pouvoir déterminer si ces élèves considèrent la longueur totale du nombre ou uniquement la longueur de la partie décimale.

Dans l’exercice n°4, 78% des élèves ont réussi à intercaler un nombre décimal entre 2,6 et 2,8. Tous ont répondu 2,7 alors qu’une infinité de réponses est possible. Seuls 33% d’entre eux ont également réussi à intercaler un nombre entre 5,6 et 5,7. Ainsi, la majorité des élèves parvient à intercaler un nombre décimal entre deux autres lorsque ces derniers possèdent des parties décimales de même longueur et si, considérées seules (comme des entiers), ces parties ne sont pas successives (par exemple, 2,6 et 2,8, 6 et 8 n’étant pas successifs). En revanche, lorsque les parties décimales considérées seules sont successives (dans le cas de 5,6 et 5,7), nombreux sont ceux qui échouent (Annexe III.K).

Ces résultats nous montrent donc que, la majorité des élèves considère le nombre décimal comme deux nombres entiers séparés par une virgule. Ainsi, lorsqu’il est demandé d’intercaler un nombre entre 2,6 et 2,8 ils cherchent à intercaler un nombre entre 6 et 8 et trouvent assez facilement 7. Cependant, ils ne parviennent pas à intercaler un nombre entre 5,6 et 5,7 puisqu’entre 6 et 7 aucun nombre entier ne peut être intercalé. Ils appliquent donc, sur les nombres décimaux, les connaissances qu’ils possèdent des nombres entiers. Ainsi, comme pour les nombres entiers, ils considèrent qu’il existe un successeur et un prédécesseur à chaque nombre décimal et n’ont pas acquis le fait qu’une infinité de nombres peut être intercalée entre deux nombres décimaux donnés. Ces conceptions erronées concernant les nombres décimaux viennent expliquer les procédures erronées utilisées par les élèves pour comparer ces nombres.

Intéressons-nous à présent aux résultats de l’exercice n°3. L’objectif est, je le rappelle, de pouvoir déterminer si la mise en contexte des nombres à comparer est favorable ou non à la réussite des élèves. Pour cela, nous allons comparer les réussites des élèves à l’exercice n°1 et à l’exercice n°3. En effet, les couples à comparer dans l’exercice n°3 sont similaires à certains proposés dans l’exercice n°1. Les réussites à la première question de l’exercice n°3, seront confrontées aux résultats de la comparaison de 2,78 et 2,8. La seconde question sera mise en parallèle avec le couple 11,59 et 11,087 de l’exercice n°1. Ainsi, pour cette analyse, nous allons prendre en compte uniquement les réponses des 25 élèves ayant réalisé à la fois l'exercice n°1 et l'exercice n°3.

32% des élèves ont réussi entièrement l'exercice n°3, 12% ont réussi uniquement la deuxième question et 56% ont échoué aux deux questions.

32% des élèves ont réussi la première question qui visait à comparer 1,58 m et 1,6 m. La comparaison de 2,78 et 2,8, dans l'exercice 1, possède le même pourcentage de réussite. En revanche, seule la moitié des élèves ayant réussi à l'exercice 1 est parvenue à répondre correctement à la première question de l'exercice 3. Ainsi, 50% des élèves ayant réussi à l'exercice 1, n'ont pas réussi à l'exercice 3, et inversement (50% des élèves ayant réussi à l'exercice 3 n'ont pas réussi à l'exercice 1).

Ces premiers résultats ne nous permettent donc pas de dresser un bilan de l'effet de la présentation des nombres sur la réussite des élèves.

44% ont réussi à comparer 1,6€ et 1,09€ (question n°2 de l'exercice n°3) alors que 28% seulement ont donné une réponse correcte lors de la comparaison de 11,59 et 11,087 (exercice n°1). L'ensemble des élèves ayant réussi à l'exercice n°1 ont également mené à bien la comparaison de l'exercice n°3. Ainsi, pour 16% des élèves, la mise en contexte des nombres à comparer a donc été bénéfique à leur réussite.

D'après les résultats obtenus, il semblerait que la présentation des nombres à comparer puisse influer sur la réussite des élèves. En effet, lorsque les nombres à comparer sont présentés dans un contexte, certains élèves réussissent mieux à comparer les nombres que lorsque ceux-ci sont donnés seuls, sans contexte. En revanche ces résultats sont peu significatifs puisqu'ils ne concernent qu'une minorité d'élèves et ne sont issus que d'une seule question sur les deux proposées.

Terminons par l'analyse des réponses de l'exercice n°5 qui visait à changer de registre de représentation (passage de l'écriture décimale à une représentation sur une graduation).

Nous allons prendre en compte les réponses des 21 élèves ayant à la fois résolu l'exercice n°1 et l'exercice n°5 puisque nous nous intéressons à l'éventuel lien entre la capacité à changer de registre de représentation et la capacité à comparer des nombres décimaux.

76% des élèves ont réussi à placer correctement les trois nombres décimaux sur la demi-droite graduée en dixièmes et 67% sont parvenus à placer les trois nombres, ayant deux chiffres dans leur partie décimale, sur la demi-droite graduée en centièmes. 57% ont placé correctement les six nombres proposés. Nous pouvons donc remarquer que cet exercice a été réussi par une grande majorité des élèves, contrairement aux tâches de comparaisons de l'exercice 1 (où seuls 24% des élèves n'ont commis aucune erreur). D'après les résultats obtenus, il semble exister un lien entre la capacité à changer de registre de représentation et la capacité à comparer les nombres décimaux. En effet, 89% des élèves ayant commis au moins une erreur à l'exercice n°5 en ont commis également à l'exercice n°1. En revanche, seuls 67% des élèves ayant réussi entièrement l'exercice n°5 ont commis au moins une erreur en comparant les nombres décimaux de l'exercice n°1. Les élèves qui parviennent à placer les nombres sur une demi-droite graduée et donc à changer de registre de représentation semblent mieux réussir les tâches de comparaison. Ces résultats sont en accord avec ceux d'Éric Roditi (2007).

Le passage d'un registre de représentation à un autre pourrait permettre aux élèves de mieux comprendre un nombre décimal et ainsi de mieux réussir à le comparer à d'autres. Il serait donc envisageable de faire intervenir divers registres de représentation afin d'aider l'élève à surmonter certains des obstacles auxquels il fait face dans la comparaison des nombres décimaux.

Pour conclure cette analyse, la majorité des procédures de comparaison des nombres décimaux utilisées par les élèves fait intervenir des connaissances ne concernant que les nombres entiers. Ainsi, très souvent, les élèves comparent la longueur des parties décimales (règle de Comiti et Neyret (1979)) ou bien comparent les parties décimales en utilisant la procédure de comparaison des nombres entiers (règle n°1 de Grisvard et Léonard (1981, 1983)). Ces procédures résultent du fait que, pour la majorité d'entre eux, le nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. De plus, un nombre important d'élèves considère que chaque nombre décimal a un prédécesseur et un successeur, comme cela est le cas pour les nombres entiers.

Les conceptions erronées des élèves, créant des obstacles lors de la comparaison des nombres décimaux, sont donc liées à la construction du nombre décimal, notamment sous son écriture à virgule. En effet, les élèves ne parviennent pas à comparer les nombres décimaux puisqu'ils ne sont pas parvenus à construire l'identité du nombre décimal. Il est ainsi nécessaire, afin d'éviter de renforcer les obstacles liés au nombre décimal, d'essayer de les dépasser dès l'introduction de ces nouveaux nombres, et plus précisément lors de l'introduction de l'écriture à virgule.

Pour cela, et contrairement à ce qui était prévu, nous allons non pas proposer une ou plusieurs séance(s) d'aide à la comparaison des nombres décimaux mais nous allons nous intéresser aux situations proposées permettant d'introduire l'écriture à virgule des nombres décimaux. Nous allons analyser les situations proposées dans des manuels scolaires à travers la théorie des situations didactiques afin de déterminer si elles correspondent ou non à des situations fondamentales. Cette analyse devrait nous permettre d'identifier des situations non fondamentales pouvant être à l'origine d'éventuels obstacles. De même, nous allons chercher à détecter une ou plusieurs situations fondamentales pouvant permettre de surmonter certains obstacles ou, du moins, limiter leur apparition ; situation(s) à privilégier pour introduire l'écriture à virgule auprès des élèves de cycle 3.

f. *Analyse des situations d'introduction des nombres décimaux dans les manuels scolaires à travers la théorie des situations didactiques*

Nous reprenons l'analyse des contenus proposés dans les quatre manuels évoqués précédemment (cf. IV. d.). Cette fois-ci nous allons nous intéresser aux situations introduisant l'écriture à virgule des nombres décimaux.

L'ensemble de ces quatre manuels propose une progression similaire et en accord avec les préconisations institutionnelles. Ils débutent par l'étude des grands nombres entiers puis des fractions simples. Les fractions décimales sont abordées par la suite et permettent d'introduire les nombres décimaux. Cette progression est également préconisée par plusieurs chercheurs et notamment par Brissiaud (1998) qui souligne l'importance de distinguer les nombres décimaux et les nombres entiers. En effet, comme il l'évoque, les nombres décimaux, sous leur écriture à virgule, ressemblent à des entiers alors que ce sont des fractions. Ceci peut donc constituer un obstacle pour les élèves : ceux qui n'auront pas construit la véritable identité du nombre décimal le considèreront donc comme un nombre entier voire comme deux nombres entiers séparés par une virgule. Ainsi, pour limiter cela, il semble nécessaire d'introduire l'écriture à virgule des nombres décimaux à partir des fractions décimales.

Cap Maths CM2 (Charnay et al., 2017) propose une première situation (Annexe IV.A) « Je cherche avec une virgule » (Charnay et al., 2017 : 42). Au sein de celle-ci, il présente l'écriture à virgule comme une simplification de l'écriture des fractions décimales, sans évoquer le terme de « nombre décimal ». Il est demandé par la suite aux élèves de transformer plusieurs fractions décimales en nombre à virgule puis de préciser le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes et de millièmes (décomposition du nombre décimal). Les élèves disposent, pour cela, de deux exemples et de la décomposition de chaque fraction décimale. Dans un deuxième temps, seule l'écriture à virgule est donnée aux élèves et ils

doivent, à partir de celle-ci, écrire la fraction décimale correspondante, sa décomposition ainsi que la décomposition du nombre décimal.
A travers cette situation, les élèves apprennent que les fractions décimales peuvent également s'écrire à l'aide d'une virgule. Ceci est fondamental pour limiter l'association des nombres décimaux et des nombres entiers. Le nom donné à cette écriture à virgule, à savoir « nombre décimal » n'est cependant pas évoqué.
Néanmoins, nous pouvons remarquer que cette situation n'est pas une situation fondamentale. En effet, il n'y a pas de réel problème posé et l'élève comprend rapidement qu'il suffit de transformer chaque fraction décimale en nombre à virgule. L'élève résout l'exercice sans utiliser ses connaissances mais en prenant appui sur l'exemple donné et en appliquant une méthode sans réellement comprendre de quoi il s'agit. En effet, comme cela est évoqué dans la ressource d'accompagnement d'Éduscol *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016), l'élève peut agir par mimétisme en prenant appui sur l'exemple et peut donc réussir l'ensemble de l'exercice sans avoir réellement acquis une nouvelle connaissance. À la suite de cet exercice, aucun savoir ne semble réellement acquis par l'élève.

Graine de maths CM2 (Malaval et al., 2017) présente une partie de cartes entre quatre enfants (Annexe IV.B). Chacun lit le nombre décimal qu'il possède en détaillant le nombre d'unités, de dixièmes ou de centièmes et leurs paroles sont retranscrites. Les élèves ont pour consigne de donner l'écriture à virgule de chaque nombre (47,15 ; 0,5 ; 10,07 ; 47,13). Ils doivent, par la suite, trouver deux nombres compris entre quarante-sept unités et treize centièmes et quarante-sept unités et quinze centièmes.
Dans cette situation, le lien entre nombres décimaux et fractions décimales est peu visible. Nous pouvons remarquer que les nombres décimaux ne sont pas présentés ici comme une écriture des fractions décimales. En revanche, les termes « dixièmes » et « centièmes » ont déjà été utilisés précédemment lors de l'apprentissage des fractions décimales et permettent ainsi de créer ce lien. En

effet, pour résoudre cet exercice, les élèves doivent utiliser leurs connaissances acquises au cours de l'apprentissage des fractions décimales. Ils connaissent les termes « dixièmes », « centièmes » et « millièmes » utilisés pour désigner ces fractions. Ils ont également appris à décomposer les fractions décimales et à effectuer des conversions entre les différentes unités décimales (unités, dixièmes, centièmes et millièmes). L'ensemble de leurs connaissances peut leur permettre de répondre, même partiellement, aux questions posées. Ceci correspond à une condition essentielle pour que la situation soit considérée comme fondamentale.
Cependant, cette situation n'est pas une situation a-didactique puisque les élèves identifient clairement la connaissance en jeu (« nombres décimaux », « écriture à virgule » (Malaval et al., 2017 : 38)). De plus, elle ne renvoie aucune information à l'élève lui permettant de valider ou d'invalider sa proposition et ainsi de la modifier au besoin (mais cela peut être modifié en fonction de la mise en œuvre de cette situation par le professeur). La situation proposée ne constitue donc pas une situation fondamentale.
Concernant la deuxième partie de la situation, à savoir intercaler deux nombres décimaux entre deux autres, il me semble prématuré de demander cela aux élèves. En effet, comme nous avons pu le remarquer lors de l'analyse de l'évaluation diagnostique, cette compétence pose de nombreuses difficultés aux élèves de par les obstacles auxquels ils font face. Entre 47,13 et 47,15, ils vont parvenir à intercaler 47,14 (comme c'est le cas dans l'évaluation diagnostique où la majorité des élèves propose d'intercaler 2,7 entre 2,6 et 2,8). En revanche, et comme nous avons pu le remarquer dans l'évaluation diagnostique, rares sont ceux qui parviennent à trouver un nombre à intercaler entre deux nombres décimaux ayant des parties décimales consécutives (dans l'évaluation diagnostique, entre 5,6 et 5,7), lorsqu'elles sont considérées comme des nombres entiers (ce qui, comme nous l'avons précédemment montré, est le cas de la plupart des élèves). Ainsi, la majorité des élèves, après avoir proposé 47,14, ne parviendra sûrement pas à intercaler un deuxième nombre entre 47,13 et 47,15. Il me semble nécessaire, dans un premier temps, de construire le nombre décimal avant de débuter un travail de comparaison, d'intercalation et

d'encadrement qui placerait les élèves en échec. De plus, la réussite à cette question implique une réussite à la question précédente puisque les deux nombres délimitant l'intervalle sont issus de la première question. Ainsi, si l'élève ne réussit pas à trouver ces deux nombres en résolvant la première question, il ne pourra réussir la seconde.

Dans la partie « Passer de la fraction décimale au nombre décimal » (Petit-Jean et al., 2017 : 34), le manuel *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean et al., 2017) suggère une activité de recherche (Annexe IV.C). Il fournit aux élèves les performances réalisées par trois joueurs olympiques sous la forme d'entiers et de fractions décimales ou sous la forme de nombres décimaux (88 m et $\frac{24}{100}$ de m ; 90 m et $\frac{7}{10}$ de m ; 85,38 m). Il est demandé aux élèves de donner le classement de ces trois joueurs.
Les élèves ont préalablement acquis des connaissances sur les fractions décimales notamment sur la décomposition de ces fractions et leurs équivalences. Les nombres à comparer sont donnés sous la forme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1 ou sous la forme d'un nombre décimal. Les élèves, grâce à leurs connaissances sur les fractions décimales, vont remarquer que les fractions décimales sont inférieures à 1 et qu'il est ainsi nécessaire de comparer uniquement les parties entières des nombres pour résoudre le problème posé. En effet, les parties entières des trois nombres à comparer sont différentes. Ainsi, pour résoudre cette situation, les élèves peuvent utiliser leurs connaissances sur la comparaison des nombres entiers. Les élèves n'ont donc pas nécessairement besoin de comparer les fractions décimales et les parties décimales. Cette situation ne correspond donc pas à une situation fondamentale puisque le savoir visé n'est pas nécessairement utilisé ici. Cette situation ne semble pas permettre à l'élève de « passer de la fraction décimale au nombre décimal » (Petit-Jean et al., 2017 : 34), contrairement à ce qu'indique le titre. De plus, aucune information ne permet à l'élève de valider ou d'invalider ses réponses et de rétroagir, au besoin, sur cette situation.

Le manuel *J'aime les maths CM2* (Rzanny et al., 2017) propose un découpage différent de la progression. Tout comme les trois autres livres analysés, il débute par les grands nombres entiers puis les fractions décimales introduisent les nombres décimaux. Cependant, il a fait le choix de séparer l'apprentissage des dixièmes et des centièmes de celui des millièmes. Ainsi, il propose d'étudier, dans un premier temps, les dixièmes et les centièmes et, dans un second temps, les millièmes. Trois doubles-pages identiques sont dédiées à chaque partie. Tout d'abord, il propose l'étude des fractions décimales, puis, une seconde double-page vise à apprendre à lire et à écrire les nombres décimaux. Enfin, la dernière double-page s'intéresse à l'écriture des fractions décimales sous la forme de nombres à virgule. Au total, quatre doubles-pages sont donc consacrées à l'introduction de l'écriture à virgule des nombres décimaux (jusqu'aux millièmes). Nous allons donc analyser les situations de recherche proposées par ces quatre double-pages (Annexe IV.D). Les exercices proposés pour les dixièmes et les centièmes et pour les millièmes sont les mêmes (seuls les nombres impliqués varient). Nous allons donc analyser les deux situations de recherche : la première concernant la lecture et l'écriture des nombres décimaux et la seconde qui vise à écrire les fractions décimales sous la forme de nombres décimaux.

La première situation de recherche, située sur les double-pages « Lire et écrire les décimaux » (Rzanny et al., 2017 : 44 ; 52) présente douze cartes nombres : quatre nombres décimaux présenté sous trois écritures différentes. Ainsi, chaque nombre décimal est écrit en chiffres sur une carte, en lettres sur une autre et sous sa forme décomposée (nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes voire de millièmes) sur la troisième carte. A partir de ces cartes nombres, les élèves doivent repérer les cartes représentant le même nombre.

Cette situation, proposée deux fois dans ce manuel (pour l'étude des dixièmes et des centièmes puis des millièmes), ne constitue pas une situation fondamentale. En effet, elle ne renvoie aucune information à l'élève lui permettant de valider ou non la solution qu'il propose. De plus, les nombres proposés possèdent tous une partie entière différente. Ainsi, les élèves peuvent s'appuyer uniquement sur cette partie entière pour rassembler les cartes désignant le même nombre sans faire intervenir la partie décimale. Cette situation ne permet donc pas aux élèves d'acquérir un nouveau savoir puisque la solution correcte peut ne s'appuyer que sur une étude des parties entières des nombres. Elle ne permet pas d'aborder les aspects positionnel et décimal de la numération décimale.

À présent, nous allons analyser la seconde situation de recherche, proposée sur les deux double-pages « Ecrire une fraction sous la forme d'un décimal : dixième et centième » (Rzanny et al., 2017 : 48) et « Ecrire une fraction sous la forme d'un décimal : millième » (Rzanny et al., 2017 : 54). Elle présente une droite graduée sur laquelle sont placées des fractions décimales accompagnées, ou non, de leur écriture à virgule. Dans une première partie, il est demandé aux élèves de répondre par « Vrai » ou « Faux » à trois phrases affirmatives. La première concerne la lecture des fractions décimales : dans un cas, sont-elles exprimées en centièmes et dans l'autre, sont-elles exprimées en millièmes ? La seconde affirmation donne un intervalle et les élèves doivent déterminer si les fractions décimales présentes sur la droite graduée sont comprises dans cet intervalle. Dans le cas de l'étude des dixièmes et des centièmes, cet intervalle est donné en nombres entiers ([3 ;4]) et les élèves peuvent s'appuyer sur les nombres entiers placés sur la droite graduée, à savoir, 6 et 7. Pour les millièmes, l'intervalle est donné sous formes de fractions décimales ; l'une en centièmes ($\frac{2}{100}$) et l'autre en millièmes ($\frac{37}{1000}$). Sur la droite graduée en millièmes, les nombres définissant l'origine et le pas de la droite sont $\frac{20}{1000}$ et $\frac{30}{1000}$. La dernière affirmation vise la lecture d'un nombre décimal. Un nombre décimal est donné ainsi qu'une proposition de décomposition de ce nombre (valeur de la partie entière et valeur de la partie décimale (en centièmes ou en millièmes)).
Dans une seconde partie, il est demandé aux élèves d'écrire, pour chaque fraction décimale (en centièmes ou en millièmes) placée sur la droite graduée, l'écriture à virgule qui lui correspond.
Cette situation ne correspond pas à une situation fondamentale. D'une part, les exercices sous la forme VRAI/FAUX n'engagent pas une nécessaire réflexion de la part des élèves. Ils peuvent, en effet, donner des réponses correctes (50% de chance pour chaque affirmation) par pur hasard sans avoir réellement utiliser leurs connaissances. De plus, le manuel donne deux exemples d'égalité entre

une fraction décimale et un nombre décimal. Il est demandé aux élèves d'écrire le nombre décimal (avec une virgule) correspondant à chaque fraction décimale placée sur la droite graduée. Or, les élèves peuvent résoudre cela en prenant appui uniquement sur les exemples, et non sur leurs connaissances, étant donné que toutes les fractions décimales sont exprimées en centièmes (pour la partie concernant les dixièmes et les centièmes) ou en millièmes (pour la partie concernant les millièmes). Comme cela a été évoqué pour la situation du manuel *Cap Maths CM2* (Charnay et al., 2017), nous ne pourrons donc pas déterminer avec certitude si l'élève parvient à transformer une fraction décimale en nombre décimal. Ainsi, cette situation ne permet pas à l'élève de fournir une réponse en utilisant ses connaissances et ne permet donc pas de transmettre le savoir visé qui est de construire l'écriture à virgule des nombres décimaux.

Enfin, nous pouvons remarquer que les double-pages concernant la lecture et l'écriture des nombres décimaux précèdent celles visant à transformer une fraction décimale en nombre décimal. Ainsi, le lien nécessaire entre fractions décimales et nombres décimaux se fait à la suite de l'introduction des nombres décimaux (lecture et écriture de ces nombres). Il me semblerait plus approprié, après avoir étudié les fractions décimales, de s'intéresser au lien entre fractions décimales et nombres décimaux, ce qui permettrait d'introduire ces derniers, pour pouvoir, par la suite, apprendre à les manipuler, les comparer …

Pour conclure, nous pouvons remarquer que l'ensemble des manuels analysés propose une progression en accord avec les recommandations institutionnelles et un véritable lien est fait entre fractions décimales et nombres décimaux (le plus souvent, les nombres décimaux sont présentés comme une nouvelle écriture des fractions décimales). Cela contribue à une meilleure compréhension des nombres décimaux et permet de limiter l'apparition de certains obstacles.

En revanche, les situations de recherche permettant d'introduire les nombres décimaux ne semblent pas permettre de construire des savoirs sur ces nombres. En effet, les situations analysées ne correspondent pas à des situations fondamentales. Le plus souvent, les élèves peuvent réussir l'ensemble des exercices sans avoir utilisé leurs connaissances mais en prenant appui sur des exemples. De plus, parfois, la meilleure solution au problème posé n'est pas le savoir visé : les élèves peuvent réussir la situation en utilisant uniquement des connaissances sur les nombres entiers (lorsque les nombres proposés possèdent une partie entière différente). Cela ne leur permet donc pas de construire une nouvelle connaissance et risque de créer des obstacles comme notamment l'extension des propriétés des nombres entiers aux nombres décimaux.

Indépendamment du fait que ces activités ne correspondent pas à des situations fondamentales, les choix didactiques ne me semblent pas appropriés pour construire un savoir nouveau. En effet, les exemples fournis dans les activités, ne permettent pas à l'élève d'exercer les compétences relatives aux mathématiques (notamment chercher et raisonner). De plus, les nombres choisis doivent faire l'objet d'une attention particulière afin que le savoir visé soit réellement enseigné et afin d'éviter de créer des obstacles didactiques. Ainsi, toute situation, sans être nécessairement fondamentale, doit faire l'objet de choix didactiques permettant à l'élève d'acquérir le savoir visé.

Dans l'espoir de trouver une situation fondamentale permettant d'introduire les nombres décimaux, nous allons nous intéresser à la séance proposée par Guy et Nadine Brousseau (1987). Avant de publier sa *Théorie des situations didactiques* (1998), Brousseau a proposé une situation permettant d'introduire l'écriture décimale (Annexe V).

g. Analyse de la situation proposée par Guy et Nadine Brousseau

Guy et Nadine Brousseau (1987) proposent, dans un premier temps, un jeu, déjà réalisé par les élèves pour trouver une fraction décimale à l'aide de questions portant sur sa décomposition. Les questions à poser avaient été trouvées par les élèves : « Combien y-a-t-il d'unités ? » « de $\frac{1}{10}$? » « de $\frac{1}{100}$? » …

Ce jeu est réalisé une nouvelle fois par les élèves. Ils choisissent une fraction décimale (sauf un élève mis à l'écart qui devra retrouver la fraction choisie en posant les questions précédemment trouvées). Cette fois-ci, l'enseignant indique à l'élève isolé qu'il devra renseigner les informations recueillies dans un tableau (tableau de numération). Dans ce dernier, à la suite de chaque question posée, sera inscrit le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes …

Par exemple, si la fraction choisie est $\frac{875}{100}$, le tableau sera rempli comme suit :

1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
8	7	5	0	0

L'élève devra ensuite écrire la fraction trouvée.
Cet exercice est renouvelé plusieurs fois en changeant d'élève isolé à chaque fois. Cette phase permet de faire du lien (tissage) avec les séances précédentes.

Dans un deuxième temps, le tableau est agrandi et les élèves vont, à tour de rôle, remplir ce tableau en fonction d'une fraction choisie par la classe ou par le professeur. Durant ce temps, les élèves peuvent réagir aux propositions de chacun pour éventuellement proposer des corrections. Cette phase est ensuite réalisée individuellement : chaque élève place quatre fractions données par l'enseignant dans le tableau, sur son cahier ($\frac{7345}{100}$, $\frac{7345}{10}$, $\frac{7345}{10000}$, $\frac{7345}{1000}$).

Le professeur inscrit ensuite le nombre 7345 quatre fois sur le tableau blanc et demande aux élèves si les nombres inscrits sont les mêmes. Il est attendu de la part des élèves qu'ils remarquent que ce sont les mêmes nombres (nombres entiers) mais qu'en revanche, s'ils étaient placés dans le tableau de numération et de façon différente, alors ce seraient des nombres différents. Une discussion doit alors s'instaurer avec les élèves afin de trouver un moyen permettant de distinguer ces quatre nombres hors du tableau de numération. Si l'idée d'utiliser une virgule n'est pas proposée par les élèves, alors l'enseignant l'introduira. Il placera alors la virgule dans les quatre nombres étudiés : 73,45 – 734,5 – 0,7345 – 7,345. Les élèves doivent alors remarquer que la virgule est toujours placée juste après les unités. Une lecture de ces nombres est alors faite, par le professeur puis par les élèves (par exemple, pour 73,45, ils liront « soixante-treize unités et quarante-cinq centièmes »).

Afin de contrôler la compréhension de chaque élève et leur permettre de s'entrainer, une dernière phase individuelle est proposée. À partir de fractions décimales données, les élèves doivent trouver leur écriture à virgule. Puis, des nombres décimaux sous leur forme à virgule doivent être transformés en fractions décimales. Ce travail individuel doit permettre à l'enseignant de repérer les éventuelles difficultés des élèves afin de pouvoir les aider.

Analysons à présent cette situation afin de déterminer si elle correspond à une situation fondamentale.

Tout d'abord, elle est a-didactique puisque l'élève n'identifie pas le savoir visé. En effet, rien n'indique à l'élève qu'il va apprendre à écrire les fractions décimales sous la forme d'un nombre à virgule. Un lien est fait entre les fractions décimales et leur écriture à virgule mais, contrairement aux situations proposées par les manuels, l'écriture à virgule se construit progressivement et la situation ne consiste pas à transformer une fraction décimale en écriture à virgule en appliquant une méthode à suivre (l'aspect positionnel de la numération est ici largement identifiable). De plus, l'élève est capable, à l'aide de ses connaissances, de produire une réponse pour chaque phase de la séance, indépendamment des interventions de l'enseignant.

Cependant, toutes les conditions ne sont pas réunies pour que cette situation soit considérée comme fondamentale. En effet, elle ne renvoie aucune information à l'élève lui permettant de valider ou de modifier la solution qu'il propose notamment lorsque l'écriture à virgule est recherchée. C'est, à ce moment-là, la voix du professeur qui valide ou invalide les hypothèses des élèves et qui peut proposer l'écriture à virgule. Or, cette étape me semble indispensable car, comme lors de l'apprentissage de multiples notions, le savoir doit être apporté ou validé par le professeur car rien ne permet de l'acquérir autrement.

Néanmoins, cette situation me semble être plus appropriée pour permettre aux élèves de construire l'écriture à virgule des nombres décimaux, en comparaison avec les propositions des manuels de mathématiques analysés.

Une question vient donc à se poser : Peut-on introduire les nombres décimaux sous leur écriture à virgule à l'aide d'une situation fondamentale ?

En 1998, Aline Robert s'est intéressée aux différentes notions mathématiques introduites au lycée et à l'université et les a classées en fonction de leur insertion dans les connaissances préalablement introduites. Elle a montré que, pour certaines d'entre elles, appelées FUG (Formalisatrices, Unificatrices, Généralisatrices), l'introduction via un problème initial semblait être difficile. C'est au cours de cette même année que Brousseau publie ses travaux sur la *Théorie des Situations Didactiques*. En 2016, l'article de recherche *Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples* (Bridoux, Grenier-Boley, Hache, Robert) précise, en effet, que certaines notions sont « peu accessibles par l'intermédiaire d'une situation fondamentale » (Bridoux, Grenier-Boley, Hache, Robert, 2016 : 4).

Ces conclusions renvoient à des travaux menés sur des notions introduites au cours de l'enseignement secondaire et supérieur. Nous pouvons cependant penser que certaines notions de l'enseignement primaire relèvent de ces mêmes conclusions. Nous ne pouvons cependant pas affirmer que l'introduction des nombres décimaux ne peut se faire à l'aide d'une situation fondamentale. Malgré cela, pour ma part, il me semble difficile de concevoir une situation fondamentale permettant d'introduire l'écriture à virgule.

Conclusion

L’objectif de ce mémoire de recherche était d’identifier certains obstacles didactiques et épistémologiques rencontrés par les élèves de CM2 lorsqu’ils comparent les nombres décimaux afin de pouvoir les aider à les surmonter.

Dans un premier temps, nous avons analysé les pages de certains manuels de mathématiques portant sur la comparaison des nombres décimaux. Nous avons, grâce à cela, identifié plusieurs obstacles didactiques pouvant résulter de l’utilisation des activités et leçons issues de ces manuels scolaires. Nous avons ainsi montré l’importance de l’analyse des activités de la part du professeur afin de limiter les obstacles didactiques pour permettre à l’élève de réussir et de construire un savoir nouveau.

L’évaluation diagnostique réalisée par les élèves d’une classe de CM2 nous a permis de remarquer que la majorité des obstacles épistémologiques auxquels les élèves font face sont dus au fait qu’ils considèrent les nombres décimaux comme des nombres entiers et leur appliquent les mêmes propriétés. Ces obstacles ne concernent donc pas directement la comparaison des nombres décimaux mais relèvent de l’identité de ces nombres. Ainsi, nous pouvons penser que les élèves font face à ces obstacles quelle que soit la manipulation qu’ils font de ces nombres. Ces obstacles prennent donc leur source dès l’introduction de ces nouveaux nombres. Cette observation nous a conduit à modifier le protocole de recueil des données initialement prévu.

Nous avons donc, par la suite, analysé les situations d’introduction des nombres décimaux proposés par les manuels précédemment étudiés. L’objectif de cette analyse était d’observer si les activités d’introduction des nombres décimaux constituaient des situations fondamentales, telles que définies par Brousseau. L’intérêt de proposer une situation fondamentale dès l’introduction de l’écriture à virgule des nombres décimaux est de limiter l’apparition des obstacles. Nous avons pu remarquer que les situations proposées ne correspondaient pas à des situations fondamentales ce qui peut causer un renforcement des obstacles. De plus, indépendamment du fait qu’elles ne constituent pas des situations fondamentales, les choix didactiques ne me semblent pas appropriés pour construire une connaissance nouvelle.

Nous nous sommes, par la suite, intéressés à la situation d'introduction des nombres décimaux proposés par Guy et Nadine Brousseau. Elle ne regroupe pas l'ensemble des caractéristiques d'une situation fondamentale mais les choix didactiques semblent être plus appropriés à la construction de l'écriture à virgule des nombres décimaux (aspect décimal et positionnel de la numération). Malgré l'absence du caractère fondamental de cette situation, elle devrait permettre de limiter les obstacles rencontrés par les élèves et limiter ainsi les erreurs produites lors de la manipulation des nombres décimaux. Cependant, pour confirmer cela, il serait nécessaire de proposer cette situation à des élèves n'ayant pas encore construit l'identité du nombre décimal, leur faire ensuite passer l'évaluation diagnostique et comparer les résultats des deux populations.

Les analyses et recherches menées nous ont interrogés sur la possibilité d'introduire l'écriture à virgule des nombres décimaux à l'aide d'une situation fondamentale. Ce questionnement doit faire l'objet de recherches supplémentaires plus approfondies.

Bibliographie

BRIDOUX, S., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., ROBERT, A (2016). Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. Dans F. PLUVINAGE et É. RODITI (reds.) *Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 21* (p. 187-233). Strasbourg : IREM de Strasbourg.

BRISSIAUD, R. (1998). Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche. *Actes du XXVème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* (p. 147-171). COPIRELEM – Loctudy 11 – 13 mai 1998 IREM de Brest.

BROUSSEAU, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans J. VANHAMME et W. VANHAMME (eds.). *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (p. 101-117). Louvain la Neuve.

BROUSSEAU, G. et BROUSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1998). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématique*. Repéré à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

CHARNAY, R., ANSELMO, B., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., MADIER, D. (2017). *Cap Maths CM2*. Paris : Hatier.

CHESNÉ, J.-F. et FISCHER J.-P. (2015). Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire.* Repéré à http://www.cnesco.fr/fr/numeration/bilan-des-acquis/

COMITI, C. et NEYRET, R. (1979). À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N, n°18,* 5-20. Repéré à https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-18-grand-n/1-a-propos-des-problemes-rencontres-lors-de-l-enseignement-des-decimaux-en-classe-de-cours-moyen--530910.kjsp?RH=1550440845167

DIRECTION DE L'ÉVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE (2014). *Journée Défense et Citoyenneté 2013 : un jeune français sur dix en difficulté dans l'utilisation des mathématiques de la vie quotidienne* (note d'information n°13, 04.2014). Repéré à https://www.education.gouv.fr/cid78994/journee-defense-et-citoyennete-2013-un-jeune-francais-sur-dix-en-difficulte-dans-l-utilisation-des-mathematiques-de-la-vie-quotidienne.html

DUROUX, A. (1983). La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x,* n°3, 43-66. Repéré à https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-3-petit-x/4-la-valeur-absolue-difficultes-majeures-pour-une-notion-mineure--570238.kjsp?RH=1550095626645

GRISVARD, C. et LÉONARD, F. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP,* n°327, 47-60. Repéré à http://numerisation.univ-irem.fr/AAA/AAA81017/AAA81017.pdf

GRISVARD, C. & LÉONARD, F. (1983). Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin de l'APMEP,* n°340, 450-459. Repéré à http://numerisation.univ-irem.fr/AAA/AAA83022/AAA83022.pdf

MALAVAL, J., LE DANTEC, O., GIAUFFRET, L., PEINDARIES, P., PLANTIVEAU, A., SATRE, N., WALKOWIAK, A. (2017). *Graine de Maths CM2*. Paris : Nathan.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE (2016*). Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. Repéré à https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (2018). *Annexe 2 Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3)* (arrêté du 17.07.2018, Bulletin Officiel n°30, 26.07.2018). Repéré à https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/ensel169_annexe2V2_986050.pdf

PETIT-JEAN, I., CARLE, S., GINET, S. (2017). *Les nouveaux outils pour les maths CM2*. Paris : Magnard.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

RODITI, É. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°12, 55-81. Repéré à https://pdfs.semanticscholar.org/537b/748d0465831ef68c9106f1f706593f0345e7.pdf?_ga=2.71912019.1305368949.1578589712-1109056050.1578403819

RZANNY, F., BOURREAU, S., FERRO, P., MOREIRA, S., GRAFF, O. (2017). *J'aime les maths CM2*. Paris : Belin ÉDUCATION.

Annexes

Table des annexes

<u>Annexe I :</u> Les leçons et situations de recherche, portant sur la comparaison des nombres décimaux, proposées par les manuels de mathématiques

<u>Annexe I.A :</u> La trace écrite du manuel *J'aime les maths CM2* (Rzanny et al., 2017)

Retenons ensemble

Comment comparer, ranger, encadrer et intercaler les décimaux ?

- Pour **comparer** deux nombres décimaux, il faut comparer les **parties entières**, puis les **parties décimales** entre elles, si les parties entières sont égales.
  17,425 < 17,428 car 5 < 8
  On peut alors **ranger** les nombres dans l'**ordre** croissant ou décroissant.
- **Intercaler un nombre** entre deux autres, c'est écrire **un nombre compris entre les deux nombres** qui servent de limites.
  Entre 9 et 10, on peut intercaler 999 nombres
  9,001 • 9,002 • 9,003 etc. jusqu'à 9,999.
- **Encadrer** un nombre décimal, c'est écrire le nombre qui vient **juste avant et celui qui vient juste après**.
  Encadrer 9,356. 9,355 < 9,356 < 9,357

Mots à retenir
- comparer
- intercaler
- encadrer

<u>Annexe I.B :</u> La trace écrite du manuel *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean, Carle et Ginet, 2017)

Je retiens

- Pour **comparer des nombres décimaux**, on compare d'abord la **partie entière**.
  Ex. : 14,12 > 13,64 car 14 > 13
- S'ils ont la **même partie entière**, on **compare la partie décimale, chiffre par chiffre,** d'abord les dixièmes, puis les centièmes, et ensuite les millièmes.
  Ex. : 17,45 < 17, 82 car 4 dixièmes < 8 dixièmes • 24,25 > 24,21 car 5 centièmes > 1 centième
- Attention quand on compare des nombres décimaux qui n'ont **pas le même nombre de chiffres après la virgule**, il faut **compléter la partie décimale**.
  Ex. : 5,6 > 5,467 car 5,600 > 5,467
- Pour **ranger des nombres décimaux**, on doit d'abord les comparer un à un puis les ordonner en utilisant les signes **<**, **>** ou **=** :
  – **dans l'ordre croissant** en utilisant le signe **<** : 15,41 <15,5 < 15,62 < 15,8
  – **dans l'ordre décroissant** en utilisant le signe **>** : 23,4 > 23,37 > 23,2 > 23,12

Annexe I.C : La trace écrite du manuel *Graine de maths CM2* (Malaval et al., 2017)

MÉMO

- **Pour comparer deux nombres décimaux en écriture à virgule, on compare d'abord leurs parties entières.**
  – S'ils ont la même partie entière, on compare leurs chiffres des dixièmes.
  – S'ils ont la même partie entière et le même chiffre des dixièmes, on compare leurs chiffres des centièmes.
  – Et ainsi de suite…

5,47 < 8,2	car 5 < 8
5,47 > 5,2	car 4 > 2
5,47 < 5,49	car 7 < 9
5,475 > 5,470	car 5 > 0

- **On peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux.**

7,64 < 7,648 < 7,65

On a **intercalé** le nombre décimal 7,648 entre les nombres décimaux 7,64 et 7,65.

Annexe I.D. : La situation de recherche du manuel *Cap Maths CM2* (Charnay, Anselmo, Combier, Dussuc et Madier, 2017)

UNITÉ 5 **Nombres décimaux : comparaison**

Je cherche **RANGER DES LONGUEURS**

A Voici trois bandes qui mesurent 1 *u* ; 0,1 *u* et 0,01 *u*.

1 *u*

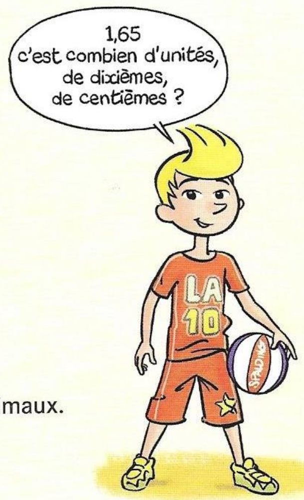
0,1 *u*

0,01 *u*

En mettant bout à bout des bandes identiques à celles-ci, Alice, Idriss, Kriss et Ulysse ont réalisé chacun une bande.
Voici les mesures de leurs bandes exprimées avec l'unité *u* :

Alice	Idriss	Kriss	Ulysse
2,6	1,65	2,07	2,12

Sans les construire, range ces quatre bandes de la moins longue à la plus longue.
Explique la méthode que tu as utilisée.



B Écris une méthode qui permet de comparer deux nombres décimaux.

C Complète avec le signe <, > ou =.
Explique chaque fois la méthode que tu as utilisée.

a. 9,8 … 9,15 **c.** 19,63 … 20,1 **e.** 9 … 7,8
b. 14,068 … 14,3 **d.** 6,450 … 6,45 **f.** 6,405 … 6,45

<u>Annexe II :</u> L'évaluation diagnostique conçue pour une classe de CM2

EVALUATION DIAGNOSTIQUE

<u>Exercice 1 :</u> **Compare les nombres suivants en mettant le signe qui convient (<, >, =). Justifie ta réponse :**

	Justification
23,786 …………..23,78	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
2,78 ……………. 2,8	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
23,1 …………….. 22,256	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
6,65 ……………… 6,1	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
9,48……………… 9,480	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
9,35 ………………. 9,68	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
11,59 …………….. 11,087	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
0,08 ………………. 0,8	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………
54,5 ………………. 54,499	→………………………………………………………………… …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………

<u>Exercice 2 :</u> **Range ces nombres décimaux dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) :**

3,5 – 3,48 – 3,091

……………………………………………………………………………………………………

4,89 – 7,3 – 4,9 – 7,165 – 7,001

……………………………………………………………………………………………………

1,589 – 1,9 – 1,59 – 1,899 – 1,6 – 1,08

………

8,9 – 2,2 – 2,09 – 3,011 – 8,79 – 8,801 – 3,3 – 3,33 – 8,1

………

Exercice 3 :

- **Paul mesure 1,58 m et Jade mesure 1,6 m. Qui est le plus grand ?**

- **Eric possède 5,6€ et Nathalie a 5,09€. Qui est le plus riche ?**

Exercice 4 :

Encadre chaque nombre par deux nombres entiers :

…………… < 7,9 <……………..

Encadre chaque nombre par deux nombres décimaux :

………….. < 5,67 <……………..

Intercale un nombre décimal entre les deux nombres :

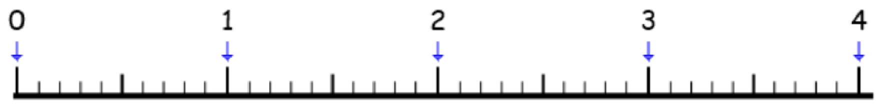
2,6 <……………< 2,8

5,6 <……………< 5,7

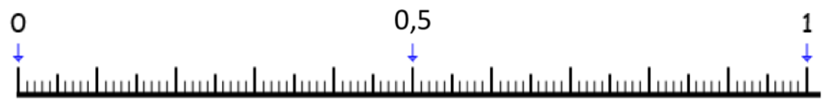
4,348 <…………..< 4,35

Exercice 5 :

Place sur la demi-droite graduée les nombres suivants : 2,6 ; 0,3 ; 3,1



Place sur la demi-droite graduée les nombres suivants : 0,35 ; 0,83 ; 0,07



Annexe III : Quelques productions d'élèves

Annexe III.A : Exercice 1, utilisation des termes « grand » et « petit »

Exercice 1 : **Compare les nombres suivants en mettant le signe qui convient (<, >, =).**
Justifie ta réponse :

	Justification
23,786 ...>... 23,78	→ 23,786 et plus grand que 23,78
2,78 ...>... 2,8	→ 2,78 et plus grand que 2,8
23,1 ...>... 22,256	→ 23,1 et plus grand que 22,256
6,65 ...>... 6,1	→ 6,65 et plus grande que 6,1
9,48 ...<... 9,480	→ 9,48 et plus petit que 9,480
9,35 ...<... 9,68	→ 9,35 et plus petit que 9,68
11,59 ...<... 11,087	→ 11,59 et plus petit que 11,087
0,08 ...>... 0,8	→ 0,08 et plus grand que 0,8
54,5 ...<... 54,499	→ 545 et plus petite que 54,499

Annexe III.B : Exercice 1, comparaison en utilisant la règle n°1 définie par Grisvard et Léonard

9,48 ...<... 9,480 → Parce que 48 est plus petit que 480.

Annexe III.C : Exercice 1, comparaison en utilisant la règle définie par Comiti et Neyret

2,78 ...>... 2,8 → Parce que le chiffre derrière la virgule est plus grand que l'autre.

Annexe III.D : Exercice 1, comparaison des nombres en supprimant les chiffres 0

11,59 ...<... 11,087 → 087 ou 87 est plus grand que 59

0,08 ...=... 0,8 → 08 et 8 sont pareil

Annexe III.E : Exercice 1, comparaison des parties entières

23,1 ...>... 22,256 → Parce que 22 est plus petit que 23.

Annexe III.F : Exercice 1, comparaison des chiffres de même rang dans la partie entière

23,1 ...>... 22,256 → Car 3 est plus grand que 2

Annexe III.G : Exercice 1, comparaison des chiffres de même rang dans la partie décimale

23,786 ...>... 23,78 → Car 6 est plus grand que 0

Annexe III.H : Exercice 1, comparaison en ajoutant des chiffres 0 à la droite des nombres

23,786 ...>... 23,78 → Si on ajoute un zéro à 23,78 → 23,780 donc c'est plus petit.

Annexe III.I : Exercice 2, rangement en utilisant la méthode de comparaison des nombres entiers

Exercice 2 : **Range ces nombres décimaux dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) :**

3,5 – 3,48 – 3,091

3,5 < 3,48 < 3,091

4,89 – 7,3 – 4,9 – 7,165 – 7,001

4,9 < 4,89 < 7,001 < 7,3 < 7,165

Annexe III.J : Exercice 2, rangement en fonction de la longueur des nombres

Exercice 2 : **Range ces nombres décimaux dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) :**

3,5 – 3,48 – 3,091

3,5 - 3,48 - 3,091

4,89 – 7,3 – 4,9 – 7,165 – 7,001

4,9 - 7,3 - 4,89 - 7,001 - 7,165

Annexe III.K : Exercice 4

2,6 < ....2,7.... < 2,8

5,6 < .....5,5.. < 5,7

Annexe IV : Situations d'introduction de l'écriture à virgule des nombres décimaux proposées par les manuels de mathématiques

Annexe IV.A : Exercice issu du manuel *Cap Maths CM2* (Charnay, Anselmo, Combier, Dussuc et Madier, 2017)

UNITÉ 3 **Nombres décimaux**

Je cherche **AVEC UNE VIRGULE**

Il y a plus de 400 ans, les mathématiciens ont inventé une façon plus simple d'écrire les fractions décimales en utilisant une virgule.

EXEMPLE :

Fraction	Décomposition	Écriture à virgule	Lecture
$\frac{45}{10}$	$4 + \frac{5}{10}$	4,5	4 et 5 dixièmes
$\frac{1\,753}{100}$	$17 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$	17,53	17 et 5 dixièmes et 3 centièmes

A En utilisant l'exemple, trouve l'écriture à virgule des fractions de la recherche page 40. Pour cela, recopie et complète ce tableau.

Fraction	Décomposition	Écriture à virgule	Lecture
$\frac{78}{10}$	$7 + \frac{8}{10}$		
$\frac{209}{100}$	$2 + \frac{9}{100}$		
$\frac{1\,250}{100}$	$12 + \frac{5}{10}$		
$\frac{803}{1\,000}$	$\frac{8}{10} + \frac{3}{1\,000}$		

B En utilisant toujours l'exemple, recopie et complète ce tableau.

Fraction	Décomposition	Écriture à virgule	Lecture
		3,7	
		13,06	
		8,732	
		36,008	

Annexe IV.B : Exercice proposé par le manuel *Graine de maths CM2* (Malaval et al., 2017)

Comprendre les nombres décimaux

COMPÉTENCES
→ Comprendre la convention d'écriture.
→ Relier unités de numération et valeurs des chiffres.

La partie de cartes

Aël, Bilal, Charles et Delia jouent aux cartes.
Ils lisent les nombres décimaux écrits sur leurs cartes.

Aël : « J'ai quarante-sept unités quinze centièmes. »

Bilal : « Moi, j'ai cinq dixièmes. »

Gabriel : « Et moi, dix unités sept centièmes. »

Délia : « J'ai quarante-sept unités treize centièmes. »

Donne l'écriture à virgule de chaque nombre.
Imagine deux nombres compris entre ceux d'Aël et de Delia.

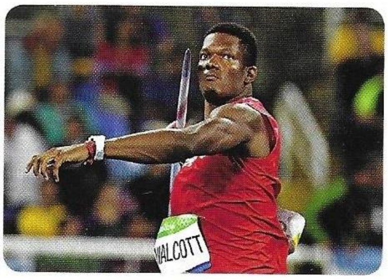
Annexe IV.C : Situation issue du manuel *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Petit-Jean, Carle et Ginet, 2017)

Passer de la fraction décimale au nombre décimal

Cherchons

Voici les performances réalisées par les trois finalistes au lancer de javelot des Jeux olympiques de Rio en 2016.

Athlètes	Pays	Meilleur essai
Julius Yego	Kenya	88 m et $\frac{24}{100}$ de m
Thomas Röhler	Allemagne	90 m et $\frac{7}{10}$ de m
Keshorn Walcott	Trinité et Tobago	85,38 m



- **Qui a été à la 1re, 2e et 3e place sur le podium ?**

Annexe IV.D : Exercices proposés par le manuel *J'aime les maths CM2* (Rzanny et al., 2017)

Lire et écrire les décimaux : dixième et centième

Cherchons ensemble — Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici les cartes nombres que Malika et Hugo ont reçues.

5,37	cent-quinze virgule neuf	115 unités et 9 dixièmes
64,76	cinq virgule trente-sept	5 centièmes
0,05	soixante-quatre virgule soixante-seize	5 unités 3 dixièmes et 7 centièmes
115,9	zéro virgule zéro cinq	64 unités et 76 centièmes

Écris les nombres identiques ensembles.

Écrire une fraction sous la forme d'un décimal : dixième et centième

Cherchons ensemble — Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici la droite graduée et les cartes de fractions décimales que le groupe de Malika a reçues.

A : $\frac{623}{100}$ = …,…
$\frac{663}{100}$ = 6,63
B : $\frac{689}{100}$ = …,…
$\frac{715}{100}$ = 7,15
C : $\frac{728}{100}$ = …,…
D : $\frac{750}{100}$ = …,…

Écris VRAI ou FAUX.

a. Les fractions sont exprimées en centièmes.
b. Les nombres sont compris entre 3 et 4.
c. Dans 6,63 la partie entière est 6 et la partie décimale est constituée de 63 centièmes.

Recopie les fractions décimales puis **écris** le nombre à virgule correspondant.

milliard 1 000 000 000 neuf 9

Lire et écrire les décimaux : millième

Cherchons ensemble
Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici les cartes nombres que Sami et Lisa ont reçues.

5,127	zéro virgule zéro zéro sept	5 unités 1 dixième 2 centièmes et 7 millièmes
14,706	cent-cinquante virgule zéro dix-neuf	sept millièmes
0,007	quatorze virgule sept-cent-six	150 unités et 19 millièmes
150,019	cinq virgule cent-vingt-sept	14 unités et 706 millièmes

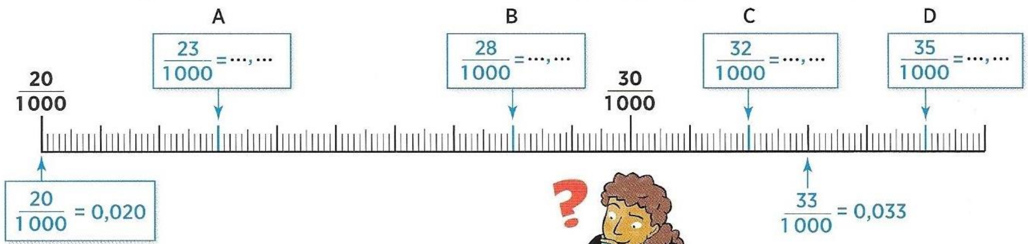
Écris les nombres identiques ensembles.

milliard 1 000 000 000 neuf 9

Écrire une fraction sous la forme d'un décimal : millième

Cherchons ensemble
Activité s'appuyant sur la situation de **manipulation** décrite dans le guide

1 Voici la droite graduée et les cartes de fractions décimales que le groupe de Malika a reçues.



Écris VRAI ou FAUX.

a. Les fractions sont exprimées en millièmes.

b. Les nombres sont compris entre $\frac{2}{100}$ et $\frac{37}{1000}$.

c. Dans 0,035, la partie entière est 0 et la partie décimale est constituée de 35 millièmes.

Recopie les fractions décimales puis **écris** le nombre à virgule correspondant.

Annexe V : Situation permettant d'introduire l'écriture décimale, issue de l'ouvrage *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (BROUSSEAU, 1987)

MODULE 5 - Activité 4 Séance 24

5.4 - PASSAGE DE L'ECRITURE EN FRACTION DES RATIONNELS DECIMAUX A L'ECRITURE DECIMALE

5.4.1. : Reprise du jeu de l'activité précédente (15 minutes)

a) Consigne : la même consigne est reprise.

b) Déroulement :

Un enfant sort, ses camarades choisissent une fraction qu'il devra trouver en posant les mêmes questions que lors de l'activité précédente.

Mais alors l'enseignant propose de marquer les renseignements demandés dans le tableau suivant (tableau A) qui servira pour chaque jeu.

valeur des intervalles	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
	0	2	3	9		$\frac{239}{1000}$

(Tableau A)

Par exemple, si la fraction choisie est $\frac{239}{1000}$, l'enfant qui demande le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc... place 0 dans la colonne 1 , 2 dans la colonne $\frac{1}{10}$, 3 dans la colonne $\frac{1}{100}$, 9 dans la colonne $\frac{1}{1000}$ et il marque la fraction trouvée en face.

Un ou deux autres enfants peuvent jouer encore et inscrire les renseignements et la fraction dans le tableau A.

5.4.2. Ecriture des fractions dans le tableau A (15 minutes)

a) Consigne : "Nous allons marquer dans ce tableau les fractions que vous aviez choisies et devinées dans l'activité
.../...

précédente et que j'ai relevées".

b) Déroulement :

1) L'enseignant envoie plusieurs enfants au tableau, à tour de rôle, afin d'inscrire les fractions du jeu précédent dans le tableau A.

Il fait ensuite marquer d'autres fractions choisies soit par les enfants, soit par lui-même (par exemple $\frac{325}{100}$; $\frac{1240}{10}$; $\frac{85}{10\ 000}$ etc...)

Remarque : Cette phase est collective. Tous les enfants participent, soit en venant au tableau, soit en faisant des remarques, soit en protestant si une erreur est faite par celui qui vient inscrire les fractions.

Elle doit se dérouler rapidement, comme un jeu.

2) D'autres exemples sont ensuite faits individuellement. L'enseignant dicte les fractions suivantes que les enfants placent dans le tableau qu'ils ont fait sur leur cahier de brouillon.

$\frac{7345}{100}$; $\frac{7345}{10}$; $\frac{7345}{10000}$; $\frac{7345}{1000}$

5.4.3. Passage à l'écriture décimale (15 minutes)

a) apport d'information : L'enseignant écrit sur le tableau (en dehors du tableau A) :

7345
7345
7345
7345

et demande aux enfants s'il s'agit du même nombre. Les enfants répondent que, écrits ainsi hors du tableau A, il s'agit bien du même nombre alors qu'écrits dans le tableau A, ce sont des nombres différents.

Après discussion avec les enfants sur les moyens possibles de savoir distinguer ces nombres, l'enseignant introduit la virgule :

.../...

précédente et que j'ai relevées".

b) Déroulement :

1) L'enseignant envoie plusieurs enfants au tableau, à tour de rôle, afin d'inscrire les fractions du jeu précédent dans le tableau A.

Il fait ensuite marquer d'autres fractions choisies soit par les enfants, soit par lui-même (par exemple
$\frac{325}{100}$; $\frac{1240}{10}$; $\frac{85}{10\,000}$ etc...)

Remarque : Cette phase est collective. Tous les enfants participent, soit en venant au tableau, soit en faisant des remarques, soit en protestant si une erreur est faite par celui qui vient inscrire les fractions.

Elle doit se dérouler rapidement, comme un jeu.

2) D'autres exemples sont ensuite faits individuellement. L'enseignant dicte les fractions suivantes que les enfants placent dans le tableau qu'ils ont fait sur leur cahier de brouillon.

$\frac{7345}{100}$; $\frac{7345}{10}$; $\frac{7345}{10000}$; $\frac{7345}{1000}$

5.4.3. Passage à l'écriture décimale (15 minutes)

a) apport d'information : L'enseignant écrit sur le tableau (en dehors du tableau A) :

7345
7345
7345
7345

et demande aux enfants s'il s'agit du même nombre. Les enfants répondent que, écrits ainsi hors du tableau A, il s'agit bien du même nombre alors qu'écrits dans le tableau A, ce sont des nombres différents.

Après discussion avec les enfants sur les moyens possibles de savoir distinguer ces nombres, l'enseignant introduit la virgule :

.../...