



Master 2 ISMAG



47 Avenue d'Azereix, 65000 Tarbes

Rapport de Stage

*Définition d'un modèle d'une démarche d'expertise
et de mécanismes d'inférence associés*

Tuteurs en entreprise :

- M. Laurent GENESTE
- M. Romain GUILLAUME

Tuteur pédagogique :

- Mme Caroline THIERRY

Mehdi MEBARKI

Septembre

2014

RÉSUMÉ DU STAGE

Dans le cadre du Master 2 Informatique, Statistique, Mathématiques appliquées à la gestion de production, de l'université Toulouse 2, j'ai effectué un stage au sein du laboratoire de recherche LGP (Laboratoire Génie de Production) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.

Le déroulement du stage peut se résumer en trois parties. Une première partie était consacrée à la recherche bibliographique, en utilisant entre autres le service en ligne Biblio'Tech de l'Institut National Polytechnique de Toulouse. La deuxième partie était consacrée à la proposition d'idées innovantes pour aborder la problématique. Enfin, nous avons validé un axe de direction pour le traitement du problème, à savoir la modélisation et la résolution.

Mon stage a commencé le 05 Mai 2014 pour une durée de cinq mois, sous la direction de M. Laurent Geneste, responsable de l'équipe SDC (Systèmes Décisionnels et Cognitifs) au sein du LGP, M. Romain Guillaume, enseignant chercheur au laboratoire IRIT (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse) et de Mme. Caroline Thierry, tutrice pédagogique.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier M. Laurent Geneste pour m'avoir permis d'effectuer ce stage au sein de son équipe, car c'est une opportunité pour moi de découvrir le monde de la recherche et d'avoir su me guider tout au long du stage.

Je souhaite également remercier M. Romain Guillaume pour m'avoir apporté son expérience et son savoir-faire et pour sa disponibilité.

Je remercie également Mme. Caroline Thierry ma tutrice pédagogique et mon enseignante, pour ces apprentissages qui m'ont été très utiles.

Merci aussi à M. Bernard Kamsu-Foguem pour son apport scientifique.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé du stage	2
Remerciements	3
Introduction	7
1 Présentation des laboratoires	8
1.1 Laboratoire Génie de Production	8
1.1.1 Domaines de recherche	8
1.1.2 Effectif	8
1.1.3 Présentation de l'équipe SDC	9
1.2 Institut de Recherche Informatique de Toulouse	10
1.2.1 Domaines de recherche	10
1.2.2 Effectif	10
1.2.3 Présentation de l'équipe ADRIA	11
2 Présentation du sujet	12
2.1 Présentation Générale d'une démarche d'expertise	12
2.1.1 Définition d'une expertise	12
2.1.2 Démarche d'une expertise	12
2.1.3 Déroulement de l'expertise	13
2.1.4 Valeur d'une hypothèse	16

2.1.5	Durée d'une expertise	16
2.1.6	Coût d'une expertise	17
3	Étude bibliographique	18
3.1	Expertise et formalisation	18
3.2	Représentation mathématique de l'incertitude	20
3.2.1	Théorie des fonctions de croyance	20
3.2.2	Théorie des sous-ensembles flous	21
3.2.3	Théorie des possibilités	22
4	Modélisation du problème	24
4.1	Modélisation du degré de confiance d'une hypothèse	24
4.1.1	Mesure de possibilité	25
4.1.2	Mesure de Nécessité	25
4.2	Ordre d'exploration des hypothèses	26
4.3	Possibilité de conclure sur un ensemble d'hypothèses	29
4.4	Durée d'exploration d'une hypothèse	32
4.4.1	Estimation de la durée d'exploration	32
4.5	Possibilité de finir l'exploration d'un ensemble d'hypothèses	34
4.6	Possibilité de conclure sur un ensemble d'hypothèses avant une certaine date	36
4.7	Coût d'exploration d'une hypothèse	40
4.7.1	Incrément	40
4.7.2	Choix des incréments	40
4.7.3	Coût d'une hypothèse	42
4.7.4	Coût d'exploration d'un ensemble d'hypothèses	43
4.7.5	Choix des hypothèses	44
4.8	Modèle représentatif de la démarche d'expertise	46
4.8.1	Mise en oeuvre	46
4.8.2	Modèle de représentation	47
5	Conclusion	51

Bibliographie

54

INTRODUCTION

L'expertise est une démarche d'investigation, de nature scientifique ou technique, appliquée à un domaine particulier. Traditionnellement, on ne se fie qu'au savoir-faire de l'expert, c'est-à-dire à la maîtrise dans son domaine, ou à l'expérience acquise avec le temps. Cependant, nous constatons que la démarche d'expertise est confrontée à des aléas et à des incertitudes. Ainsi, l'objectif de ce travail est de prendre en compte ces incertitudes pour améliorer la prise de décision.

Ce document a pour but de présenter mon travail tout au long de mon stage de fin d'études au sein du Laboratoire Génie de Production de l'ENI de Tarbes.

Ce rapport se divise en quatre chapitres. Dans le premier, je présente les laboratoires LGP et IRIT. Dans le second, je définis l'expertise et sa problématique. Je présente dans le troisième chapitre quelques éléments de ma recherche bibliographique en ce qui concerne le traitement de l'expertise et les outils mathématiques qui m'ont permis d'appréhender le sujet. Enfin, dans le quatrième chapitre, je propose une modélisation de la démarche d'expertise avec des méthodes de calculs.

Mon objectif, à l'issue de ce stage, est de définir un formalisme permettant de gérer les incertitudes qui entourent une démarche d'expertise, ainsi qu'un modèle représentatif qui permettrait d'optimiser le processus de l'expertise et d'en garder un historique.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DES LABORATOIRES

1.1 Laboratoire Génie de Production

Le Laboratoire Génie de Production (LGP), créé en 1989, est l'unique laboratoire de recherche de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes (ENIT). Il est intégré au Pôle Recherche et Enseignement Supérieur (PRES) de l'université de Toulouse et partage un certain nombre d'actions avec l'Institut National Polytechnique (INP) de Toulouse.

1.1.1 Domaines de recherche

Le LGP est un laboratoire pluridisciplinaire, dans la mesure où ses thématiques de recherche s'insèrent dans le cadre général de l'automatique, des matériaux, de la mécanique, du génie industriel ainsi qu'au niveau des compétences et connaissances humaines. Généralement, les recherches sont issues de projets communs entre universitaires et industriels. Le Laboratoire a ainsi tissé un réseau de relations partenariales dans différents domaines d'applications : ferroviaire, aéronautique, santé. . .

1.1.2 Effectif

Le laboratoire comprend près de 100 personnes dont 52 enseignants chercheurs (19 professeurs des universités et 33 maîtres de conférences) et 39 doctorants, répartis dans 4

équipes de recherche :

- Systèmes Décisionnels et Cognitifs (SDC).
- Interfaces et Matériaux Fonctionnels (IMF).
- Mécanique des Matériaux, des Structures et Procèdes (M2SP).
- Décision et Interaction Dynamique pour les Systèmes (DIDS).

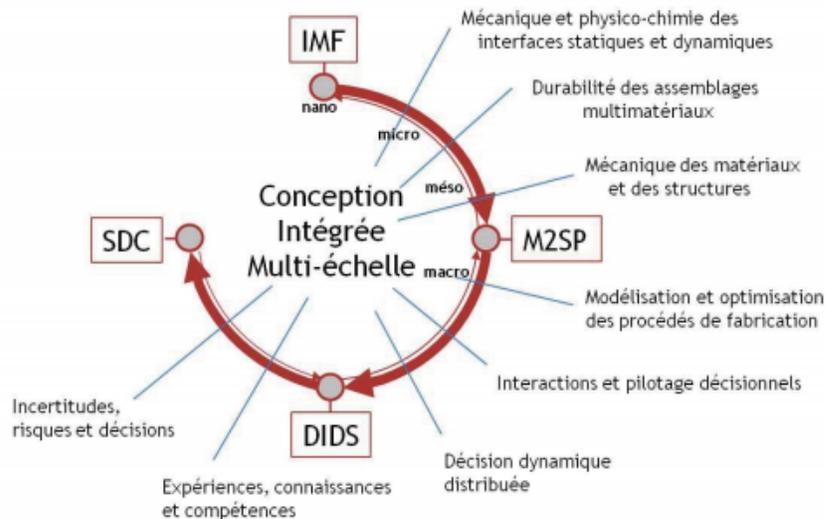


FIGURE 1.1 – Présentation des équipes de recherche.

1.1.3 Présentation de l'équipe SDC

L'équipe Systèmes Décisionnels et Cognitifs (SDC) est composée de 4 professeurs des universités, 6 maîtres de conférences, 9 doctorants. Elle réalise des travaux liés à la définition et l'évaluation des modèles, d'outils et de méthodologies destinés à l'amélioration de l'organisation et du pilotage des systèmes socio-techniques.

L'équipe a pour objectif le développement d'outils d'aide à la décision pour l'amélioration des performances de ces systèmes. Les travaux sont organisés en deux thèmes :

- ECC (Expériences, Connaissances et Compétences).
- IRD (Incertitudes, Risques et Décisions).

Les outils scientifiques utilisés dans les travaux de recherche sont notamment :

- Modélisation de l'incertitude,
- Méthodes d'optimisation combinatoire,

- Évaluation et décision,
- Ingénierie des connaissances,
- Ingénierie des compétences.

1.2 Institut de Recherche Informatique de Toulouse

L'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT), crée en 1990, est une Unité Mixte de Recherche (UMR) commune au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT), l'Université Paul Sabatier (UPS), l'Université Toulouse 2 - Jean Jaurès et l'Université Toulouse 1 - Capitole.

1.2.1 Domaines de recherche

Les travaux de recherche de l'IRIT s'organisent autour de sept thèmes scientifiques qui couvrent l'ensemble des domaines de l'informatique actuelle :

- Analyse et synthèse de l'information,
- Indexation et recherche d'informations,
- Interaction, autonomie, dialogue et coopération,
- Raisonnement et décision,
- Modélisation, algorithmes et calcul haute performance,
- Architecture, systèmes et réseaux,
- Sûreté de développement du logiciel.

1.2.2 Effectif

Les 18 équipes de recherche du laboratoire comprennent près de 600 personnes : 187 chercheurs et enseignants chercheurs, 187 doctorants, 36 post-doctorants et chercheurs contractuels et 47 ingénieurs et administratifs. Les 8 équipes représentées à l'Université Toulouse 2 sont :

- ADRIA (Argumentation, Décision, Raisonnement, Incertitude et Apprentissage),
- IRT (Ingénierie, Réseaux et Télécommunications),
- MACAO (Modèles, Aspects, Composants pour des Architectures à Objets),

- MELODI (MEthodes et ingénierie des Langues, des Ontologies et du DIscours),
- SEPIA (Système d'Exploitation, systèmes réPartis, de l'Intergiciel à l'Architecture),
- SIG (Systèmes d'Informations Généralisés),
- SMAC (Systèmes Multi-Agents Coopératifs),
- TRACES (Traces stands for Research group on Architecture and Compilation for Embedded Systems).

1.2.3 Présentation de l'équipe ADRIA

Les travaux de l'équipe de recherche ADRIA (Argumentation, Décision, Raisonnement, Incertitude et Apprentissage) couvrent les domaines du raisonnement, de la décision, de l'argumentation et de l'apprentissage. La finalité de ces travaux est de formaliser le raisonnement humain, en passant par le traitement de l'incertitude et la remédiation aux insuffisances de la logique et de l'inférence classique.

Les outils formels utilisés sont : la théorie des possibilités et des probabilités imprécises, les modèles de représentation de préférences logiques, la logique floue. . .

CHAPITRE 2

PRÉSENTATION DU SUJET

L'objectif de notre travail est de définir un modèle général représentatif d'une démarche d'expertise et de formaliser les connaissances produites durant son déroulement.

Ce travail se base sur la norme NF X 50-110 [1] (Prescriptions générales de compétences pour une expertise), élaboré par le groupe de travail de la commission de normalisation XD 50.

2.1 Présentation Générale d'une démarche d'expertise

2.1.1 Définition d'une expertise

L'expertise est une démarche utilisée pour connaître la cause d'un évènement, évaluer les risques et/ou aider à la décision dans les domaines où l'incertitude est très présente. Elle contribue à mettre à plat le problème d'une façon claire, grâce à des données techniques ou scientifiques.

2.1.2 Démarche d'une expertise

Une expertise est lancée pour répondre à une question posée dans un domaine particulier.

La première étape de l'expertise consiste à définir clairement le problème, de façon

à avoir une compréhension totale de la part de l'organisme d'expertise, et de répondre pleinement aux attentes du demandeur.

Dès que le problème est clairement compris par les deux parties, l'organisme vérifiera que l'expertise est faisable en termes de risques, capacités, ressources humaines, moyens nécessaires...

Un contrat d'expertise est alors établi et signé par les deux parties, pour reprendre tous les éléments.

2.1.3 Déroulement de l'expertise

Une fois le contrat signé, l'organisme complète et valide les moyens envisagés pour l'expertise, et énonce un ensemble d'hypothèses.

Le rôle du décideur est de définir les hypothèses à retenir, ainsi que le déroulement de l'expertise avec un planning d'enchaînement des tâches qui correspondent aux explorations des hypothèses.

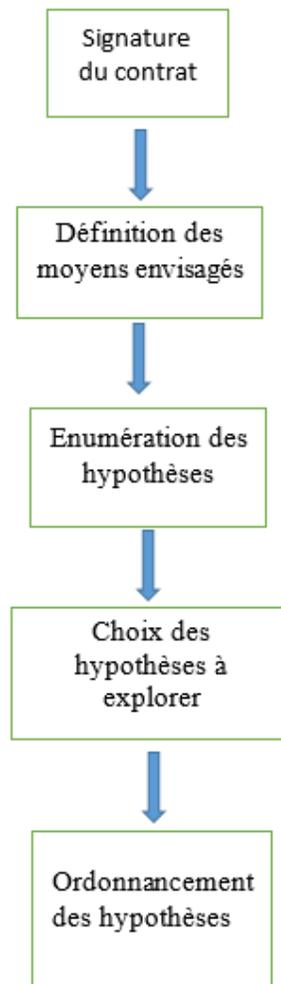


FIGURE 2.1 – Déroulement d'une expertise.

Exploration des hypothèses

La démarche d'exploration des hypothèses varie d'une expertise à une autre, ainsi on peut avoir une exploration en parallèle, en série, ou bien un enchaînement des deux.

Le planning de l'expertise doit être dynamique, du fait qu'on ne connaît pas a priori le résultat de cette dernière, ainsi des modifications peuvent subvenir à n'importe quel moment de l'expertise. Ces modifications peuvent correspondre à l'infirmité d'une hypothèse, à l'ouverture d'une nouvelle voie d'exploration, ou à d'autres facteurs.

Définition d'un incrément

L'incrément est l'investigation menée durant l'exploration pour aboutir à un certain résultat. Ainsi, pour une seule hypothèse plusieurs incréments sont envisageables.

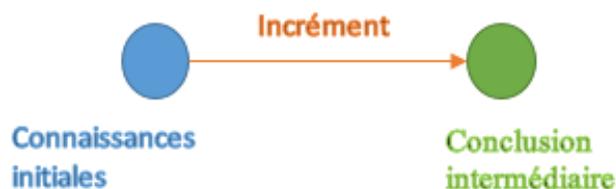


FIGURE 2.2 – Incrément d'une expertise.

Le décideur sera amené à piloter l'exploration des hypothèses, et ceci avec le choix des incréments, en privilégiant ceux qui peuvent apporter le plus de connaissances.

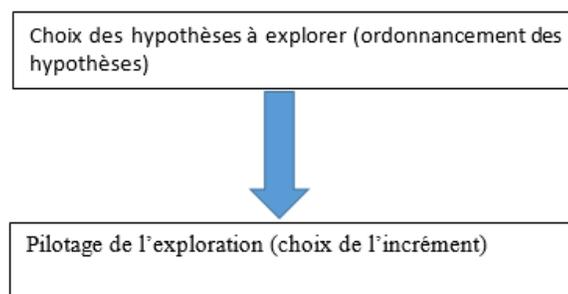


FIGURE 2.3 – Rôle du décideur.

Dans le cas où l'incrément n'a pas été satisfaisante, ou pas assez, un deuxième incrément doit être sélectionné, et ainsi de suite jusqu'à l'atteinte du résultat souhaité, ou bien l'épuisement des incréments.

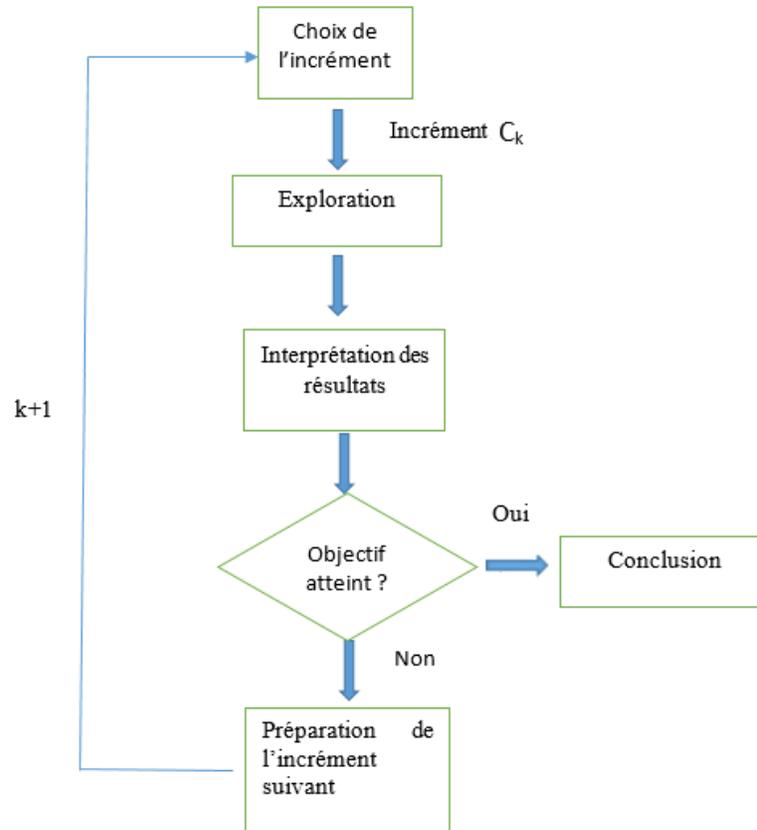


FIGURE 2.4 – Incrémentation.

L'exploration de l'hypothèse peut aboutir à l'affirmation ou l'infirmité de celle-ci.

2.1.4 Valeur d'une hypothèse

Au cours d'une expertise, on est souvent confronté à des contraintes de temps et de coût et on ne peut se permettre l'exploration de la totalité des hypothèses. Dans ce contexte, le classement des hypothèses semble alors inévitable. Dans ce document, nous proposerons une méthode permettant de choisir entre les hypothèses.

2.1.5 Durée d'une expertise

La durée d'une expertise est une valeur qu'on ne connaît pas a priori, alors qu'une date limite est souvent imposée. L'incertitude sur la durée de l'expertise est due à l'ignorance du temps que peut prendre l'exploration de chaque hypothèse. L'un des objectifs de ce

travail est d'estimer cette durée afin de construire un ordonnancement optimal en temps car certaines tâches peuvent être parallélisées et d'autres évitées.

2.1.6 Coût d'une expertise

A l'instar de la durée, le coût est a priori ignoré mais le budget peut être fixé au préalable. Cette incertitude est présente dans le cas où plusieurs incréments sont envisageables sur une hypothèse, sans savoir lequel peut être le plus enrichissant en termes de connaissances. Ainsi, l'estimation du coût est également primordiale pour optimiser la démarche d'expertise.

Fin de l'expertise

Le critère d'arrêt d'une expertise varie d'un domaine à l'autre, ainsi dans certains cas l'expertise s'arrête dès qu'une hypothèse (ou un ensemble) est affirmée, ou au contraire infirmée. Dans le nucléaire, l'exploration de toutes les hypothèses est souvent conseillée pour ne laisser aucune zone d'incertitude.

CHAPITRE 3

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

L'étude bibliographique suivante se concentre sur deux axes. Le premier concerne l'expertise en général, ainsi que des moyens de modélisation de celle-ci. Le second se rapporte la représentation de l'incertitude, qui définit différents outils mathématiques dont une partie a été utilisée dans ce travail.

3.1 Expertise et formalisation

Les méthodologies dans le domaine de l'expertise trouvées en littérature n'ont généralement pas pour finalité de choisir ou de classer des solutions, mais ce sont plutôt des approches dites "naturalistes", qui sont propres à l'expert et à sa façon de travailler. Ceci est dû au fait qu'un expert est présenté comme une personne, soit dont les connaissances sont acquises avec le temps et l'expérience, soit comme quelqu'un de compétent dans son domaine. Cependant, le domaine de l'expertise souffre de maux tels que l'incertitude, le manque d'informations, etc... Par conséquent, un point de vue externe, voire mathématique semble nécessaire, car la fusion d'informations de ces différentes approches peut réduire les problèmes rencontrés. Ainsi, la modélisation et l'approche "naturaliste" sont complémentaires pour l'analyse de l'expertise. [9].

Pour formaliser une démarche d'expertise, nous devons d'abord nous intéresser à ses acteurs, à savoir les experts. Ainsi, l'un des premiers points à capitaliser est la connaissance

de l'expert [11].

Une méthodologie logique et adéquate doit être alors construite à partir du savoir-faire de l'expert. Cette méthodologie est une représentation des mécanismes cognitifs de l'expert, qui permet de répondre à des questions en effectuant des raisonnements logiques.

Au-delà de l'expert et de la méthode, une autre donnée est à prendre en compte. En effet, l'expertise est souvent confrontée à l'incertitude. Ainsi, l'une des avancées scientifiques dans ce domaine est le traitement de cette dernière, par lequel on tend à la réduire en la mesurant [6].

Nous devons d'abord mesurer l'incertitude de la façon la plus explicite possible, puis proposer une représentation mathématique et une méthodologie pratique afin de procéder à des inférences [8]. Plusieurs théories peuvent alors être appliquées.

Ainsi selon [12], la connaissance de l'expert peut être exprimée à partir de distributions de probabilités subjectives, qui serviront à construire des distributions de masse de croyance pour représenter l'incertitude inhérente à la connaissance experte.

Par contre, les probabilités présentent des limites pour représenter l'incertitude. On distingue deux types de probabilités : les probabilités objectives et les probabilités subjectives. Les premières proviennent de l'observation des réalisations d'un évènement. Les probabilités subjectives peuvent quant à elles être exprimées sans base objective, il peut s'agir de probabilités a priori, données avant l'occurrence de l'évènement. Ces dernières ne permettent pas de différencier entre une réponse issue d'un état incertain et une autre issue d'un état d'ignorance [3]. Ainsi d'autres théories récentes permettent de mieux comprendre les informations imprécises et issues de différents états, telles que la théorie des possibilités ou la théorie des ensembles flous. . .

Garder un historique de la démarche d'expertise est également important dans la modélisation. En effet, décomposer l'expertise en processus nous permettra de mieux gérer sa complexité et de garder une trace des raisonnements effectués. Plusieurs techniques permettent la représentation des processus, telles que le formalisme UML, les arbres de décision, la méthode PERT. . .

En résumé, deux types d'informations découlent de la formalisation d'une expertise : les connaissances expertes et les données mathématiques. L'hybridation de ces deux connais-

sances est alors nécessaire pour construire des données plus concrètes. Ainsi, le problème est formalisé mathématiquement avec l'avis des experts, puis analytiquement résolu. Pour finir, les solutions seront soumises à nouveau aux connaissances des experts [5].

3.2 Représentation mathématique de l'incertitude

Au quotidien, on est souvent confronté à l'incertitude et au fait qu'on ne puisse pas répondre précisément à une question. Ainsi, on ne peut s'exprimer sur la véracité d'une proposition, ou sur l'apparition d'un évènement. Cette incertitude est due à une ou plusieurs causes : information pauvre ou contradictoire, variabilité des phénomènes...

3.2.1 Théorie des fonctions de croyance

La théorie des fonctions de croyance offre des outils pour le traitement d'une information aléatoire et imprécise [10].

Une fonction de masse de croyance [2] est une opinion pondérée, qui est mathématiquement définie par :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

Ω est un ensemble fini de réponses à une certaine question.

Elle est représentée par une application m sur Ω :

$$m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

tel que

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

- $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun autre sous-ensemble strict).
- $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Exemple

On demande à deux experts de nous donner leurs avis sur 3 hypothèses $\{h_1, h_2, h_3\}$ qui peuvent être solution à un problème.

- Question : Quelle hypothèse est vraie ?
- Expert 1 : Les trois hypothèses peuvent être vraies.
- Expert 2 : Aucun avis sur la question.

Modélisation du problème :

- Expert 1 : $m_1(\{h_1\}) = m_1(\{h_2\}) = m_1(\{h_3\}) = 1/3$
- Expert 2 : $m_2(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1$

3.2.2 Théorie des sous-ensembles flous

La théorie des sous-ensembles flous [13] a été développée par Zadeh en 1965, afin de représenter mathématiquement l'imprécision et sert de fondement à la logique floue. Elle est l'extension de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble classique.

Soit E un ensemble de référence. Un sous-ensemble flou est caractérisé par une fonction d'appartenance μ de E dans $[0, 1]$ [7] .

Exemple

L'intervalle flou couramment utilisé dans R est de forme trapézoïdale [4]. Il est défini par sa fonction d'appartenance :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a - c \text{ ou } b + d < x; \\ 1, & \text{si } a < x < b; \\ 1 + (x - a)/c & \text{si } a - c < x < a; \\ 1 + (b - x)/d & \text{si } b < x < b + d. \end{cases}$$

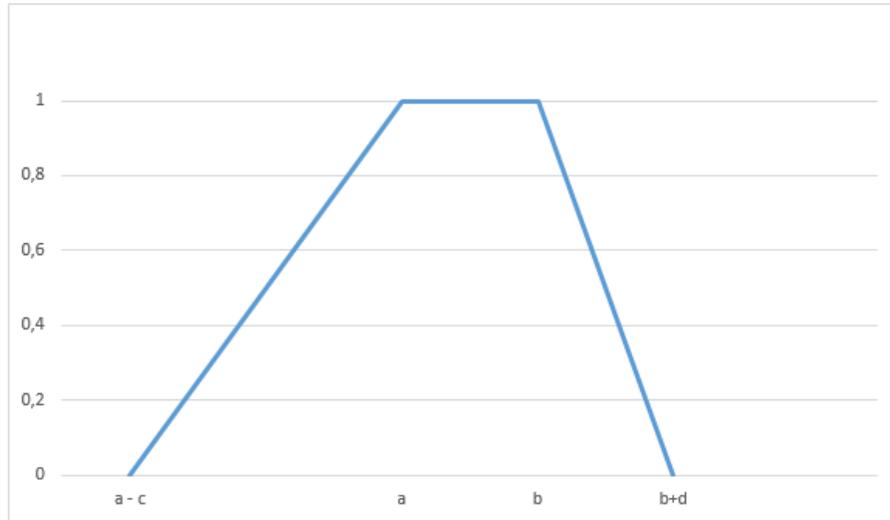


FIGURE 3.1 – Ensemble flou trapézoïdal.

3.2.3 Théorie des possibilités

Définition

La théorie des possibilités permet, avec des outils mathématiques, la représentation d'une information incomplète, imprécise ou vague [14].

Soit un ensemble d'événements E formant une algèbre de Boole [3].

On note S, Φ les événements toujours certains et toujours impossibles respectivement.

On note $g(A)$ la confiance d'un agent dans l'événement A .

Cette mesure de confiance g est une fonction de E dans $[0, 1]$ telle que

$$g(\Phi) = 0 \quad ; \quad g(S) = 1$$

Propriétés

- Si $A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$
- $g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B))$;
- $g(A \cap B) \geq \min(g(A), g(B))$;
- Mesure de probabilité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Mesure de possibilité : $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$.
- Mesure de nécessité : $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$.

Représentation

- Un évènement A est possible : $\Pi(A) = 1$
- L'évènement A est certain : $N(A) = 1$
- L'évènement A est impossible : $\Pi(A) = 0$
- L'évènement A est incertain : $N(A) = 0$
- Les deux mesures de possibilité et de nécessité sont liées par la relation : $N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$; l'occurrence de l'évènement A est certaine si son contraire est impossible.
- $\Pi(A) = \Pi(\bar{A}) = 1, (N(A) = 0)$: Ignorance totale sur l'évènement A .
- $N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$, si l'évènement A n'est pas incertain alors il est possible.

Exemple

Quelle température fait-il? Réponse : "Il fait chaud!".

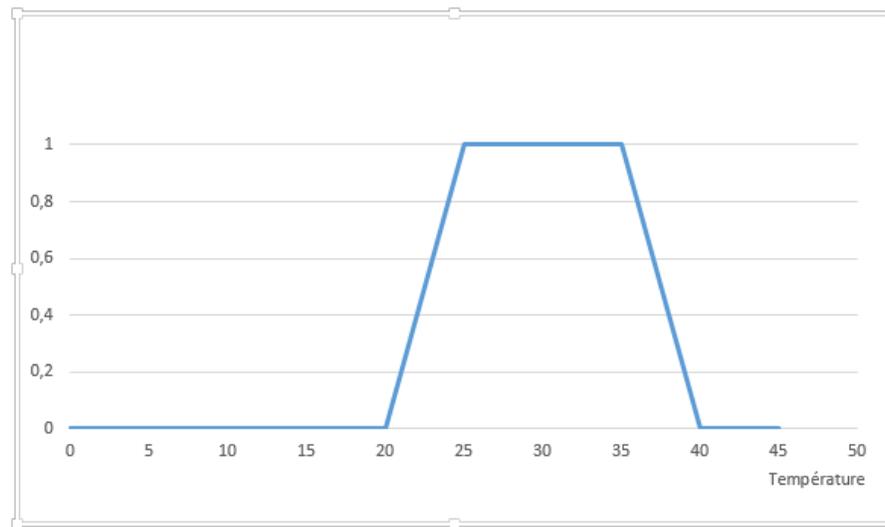


FIGURE 3.2 – Représentation des valeurs possibles de la température.

Pour l'évènement A : "Il fait chaud".

$$\Pi(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } 25 < A < 35; \\ 0, & \text{si } A < 20 \text{ ou } A > 40; \\]0, 1[, & \text{sinon.} \end{cases}$$

CHAPITRE 4

MODÉLISATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous proposerons une modélisation de la démarche d'expertise en nous concentrant sur la formulation des hypothèses, la planification des tâches, et la représentation d'un modèle.

Une fois le problème posé et les hypothèses énoncées, une partie d'entre-elles va être validée par les experts, cette partie sera par la suite jugée sur différents critères.

Une hypothèse est définie par un degré de confiance des experts, et par un ensemble d'incrément. Nous allons dans cette partie proposer une modélisation d'un degré de confiance ainsi que les incréments, en utilisant la théorie des possibilités. A partir de ces modèles nous proposerons des méthodes d'estimations de coût et de durée d'exploration des hypothèses.

4.1 Modélisation du degré de confiance d'une hypothèse

Des hypothèses de départ, seul un ensemble sera retenu par les experts, dans le but d'affirmer ou d'infirmer les hypothèses qui le composent.

Ces experts devront par la suite juger ces hypothèses, dans le but de les classer.

4.1.1 Mesure de possibilité

Soit :

$I = \{1, \dots, N\}$: ensemble des hypothèses.

$$H_i = \begin{cases} t, & \text{si l'hypothèse } i \text{ est confirmée;} \\ f, & \text{si l'hypothèse } i \text{ est infirmée.} \end{cases}$$

Pour chaque hypothèse, on construira avec les avis des experts deux mesures :

$\Pi(H_i = t)$: La possibilité de conclure positivement sur une hypothèse, c'est-à-dire la possibilité d'arriver à un résultat qui confirmerait cette hypothèse.

$\Pi(H_i = f)$: La possibilité de conclure négativement sur une hypothèse, c'est-à-dire la possibilité d'arriver à un résultat qui infirmerait cette hypothèse.

On demandera aux experts de juger les hypothèses selon leurs plausibilités, en leur affectant une valeur entre $[0,1]$ telle que :

- 0 : impossible ;
- $]0;0.2[$: presque impossible ;
- $]0.2;0.4[$: plutôt impossible ;
- $]0.4;0.6[$: surprenant ;
- $]0.6;0.8[$: pas tellement surprenant ;
- $]0.8;1]$: normal.

On posera ainsi :

$$\max(\Pi(H_i = t), \Pi(H_i = f)) = 1, \forall i \in I \quad (4.1)$$

On suppose que l'expertise est lancée, que si on a la possibilité de conclure (positivement ou négativement) sur au moins une hypothèse.

4.1.2 Mesure de Nécessité

Pour pouvoir comparer entre les hypothèses, on définira de la même manière la mesure de nécessité.

$N(H_i = t)$: La nécessité de conclure positivement sur une hypothèse, c'est-à-dire la nécessité d'arriver à un résultat qui confirmerait cette hypothèse.

$N(H_i) = f$: La nécessité de conclure négativement sur une hypothèse, c'est-à-dire la nécessité d'arriver à un résultat qui infirmerait cette hypothèse.

Avec :

$$N(H_i = t) = 1 - \Pi(H_i = f) \quad (4.2)$$

On est certain de conclure positivement sur une hypothèse s'il est impossible de conclure négativement sur cette hypothèse.

Lors de la construction de ces mesures, on doit respecter deux propriétés fondamentales :

$$\Pi(i) < 1 \Rightarrow N(i) = 0 \quad (4.3)$$

Si la conclusion sur l'hypothèse n'est pas complètement possible, alors elle est incertaine.

$$N(i) > 0 \Rightarrow \Pi(i) = 1 \quad (4.4)$$

Si la conclusion sur l'hypothèse n'est pas incertaine alors elle est possible.

4.2 Ordre d'exploration des hypothèses

Une fois les deux mesures construites, les hypothèses pourront être triées de la plus certaine, en passant par la plus possible, jusqu'à la moins possible d'entre-elles, pour définir un ordonnancement optimal.

Un ordonnancement optimal est un enchaînement des explorations qui permettra de conclure directement sur les premières hypothèses.

L'hypothèse i est préférée à l'hypothèse j si il est "plus" possible de conclure sur i que sur j .

$$(N(H_i) \geq N(H_j) \wedge \Pi(H_i) \geq \Pi(H_j)) \Rightarrow i \text{ est préférée à } j; \forall (i, j) \in I.$$

Nous utiliserons dans la suite du rapport la notation suivante :

$$\Pi(H_i = t) = \Pi_i^t$$

$$N(H_i = t) = N_i^t$$

Exemple

Soit I un ensemble d'hypothèses avec : $I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Les experts attribueront les mesures de possibilités Π_i^t selon l'échelle définie précédemment :

I	1	2	3	4	5	6
Π_i^t	0.5	1	0	1	1	0.4

Ainsi, avec la propriété (4.3), on peut déduire la mesure de nécessité de certaines hypothèses :

I	1	2	3	4	5	6
N_i^t	0		0			0

Et avec la propriété (4.2), nous pouvons calculer la mesure de possibilité de conclure négativement sur ces mêmes hypothèses :

I	1	2	3	4	5	6
Π_i^f	1		1			1

Avec la propriété (4.2), nous déduisons :

$$N_i^f = 1 - \Pi_i^t \quad (4.5)$$

Nous calculerons alors la mesure de nécessité de conclure négativement :

I	1	2	3	4	5	6
N_i^f	0.5	0	1	0	0	0.6

Finalement, nous demanderons aux experts d'affecter une mesure de possibilité de conclure négativement sur les hypothèses 2, 4 et 5 telle que : $\Pi_i^f < 1$.

I	1	2	3	4	5	6
Π_i^f	1	0.3	1	0.1	0.2	1

Nous pouvons alors calculer leurs mesures de nécessité de conclure positivement :

I	1	2	3	4	5	6
N_i^t	0	0.7	0	0.9	0.8	0

On a alors :

I	1	2	3	4	5	6
Π_i^t	0.5	1	0	1	1	0.4
N_i^t	0	0.7	0	0.9	0.8	0
Π_i^f	1	0.3	1	0.1	0.2	1
N_i^f	0.5	0	1	0	0	0.6

Ordonnement des explorations :

Dès lors que les deux mesures sont construites, on peut définir un ordre d'exploration de façon à privilégier les hypothèses sur lesquelles on est certain de conclure.

L'ordonnement des hypothèses diffère d'une expertise à une autre. Certaines expertises ont pour but d'affirmer des hypothèses, et d'autres de les infirmer. Dans certains cas on privilégie l'apport de connaissances, c'est-à-dire que les deux options ont leur importance. Dans notre exemple nous appliquerons ce dernier.

Remarque : On peut déjà éliminer l'hypothèse 3, car nous sommes sûr de conclure négativement : $\Pi_3^f = 1$, et $N_3^f = 1$.

Ordre d'exploration :

Pour une exploration en série, on aura l'ordre suivant :

1. Explorer l'hypothèse 4 pour conclure positivement.
2. Explorer l'hypothèse 5 pour conclure positivement.
3. Explorer l'hypothèse 2 pour conclure positivement.
4. Explorer l'hypothèse 6 pour conclure négativement.
5. Explorer l'hypothèse 1 pour conclure négativement.

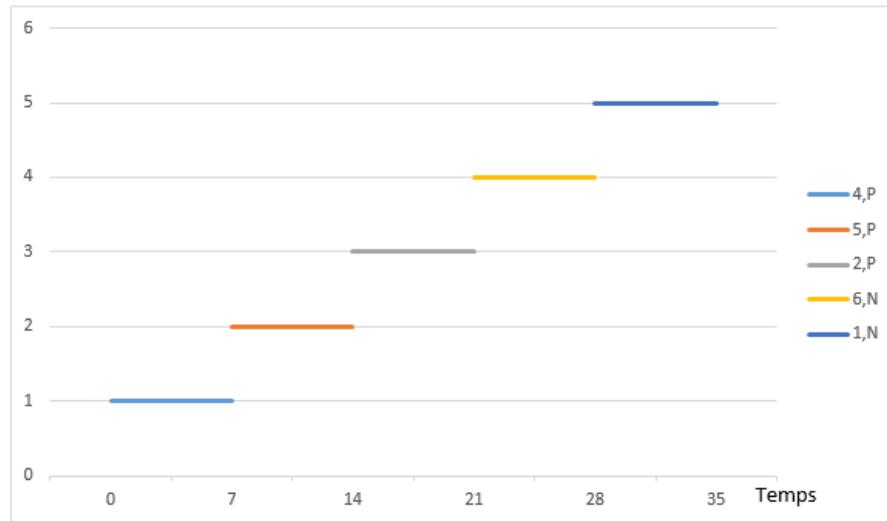


FIGURE 4.1 – Ordonnancement des hypothèses.

4.3 Possibilité de conclure sur un ensemble d'hypothèses

Après avoir défini le degré de confiance des hypothèses, on cherchera à calculer le degré de confiance d'un ensemble d'hypothèses.

Soit : $a \subseteq I$ un sous ensemble d'hypothèses.

A partir des deux mesures définies précédemment, on peut construire la distribution de possibilité et de nécessité de conclure sur a hypothèses.

$\Pi(\text{conclure sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a} (\Pi(H_{(i)} = t))$, avec $H_{(i)}$ une permutation de H_i telle que $\Pi(H_{(1)} = t) \geq \Pi(H_{(2)} = t) \geq \dots \geq \Pi(H_{(|H|)} = t)$

$N(\text{conclure sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a} (N(H_{(i)} = t))$, avec $N_{(i)}$ une permutation de N_i telle que $N(H_{(1)} = t) \geq N(H_{(2)} = t) \geq \dots \geq N(H_{(|H|)} = t)$

La possibilité de conclure sur un ensemble d'hypothèses, revient à la possibilité de conclure sur l'hypothèse ayant le degré de confiance minimal.

Notation :

$$\Pi(H_{(i)} = t) = \Pi_{(i)}^t$$

$$N(H_{(i)} = t) = N_{(i)}^t$$

Méthode de calcul :

1. Trier les hypothèses par ordre décroissant selon leurs mesures de possibilités de

conclure positivement (et les ex-aequo sur leurs mesures de nécessités de conclure positivement).

2. Trier les hypothèses par ordre décroissant selon leurs mesures de possibilités de conclure négativement (et les ex-aequo sur leurs mesures de nécessités de conclure négativement).
3. Calculer la possibilité de conclure positivement sur a hypothèses :
 $\Pi(\text{conclure positivement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^t), \forall i \in a.$
4. Calculer la nécessité de conclure positivement sur a hypothèses :
 $N(\text{conclure positivement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(N_{(i)}^t), \forall i \in a.$
5. Calculer la possibilité de conclure négativement sur a hypothèses :
 $\Pi(\text{conclure négativement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^f), \forall i \in a.$
6. Calculer la nécessité de conclure négativement sur a hypothèses :
 $N(\text{conclure négativement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(N_{(i)}^f), \forall i \in a.$
7. Ordonner les explorations.

Exemple

En reprenant l'exemple ci-dessus, on calculera les possibilités de conclure sur au moins a hypothèses :

I	1	2	4	5	6
Π_i^t	0.5	1	1	1	0.4
Π_i^f	1	0.3	0.1	0.2	1

Premièrement, on triera les deux mesures par ordre décroissant :

I	4	5	2	1	6
Π_i^t	1	1	1	0.5	0.4

I	6	1	2	5	4
Π_i^f	1	1	0.3	0.2	0.1

Soient :

$$\Pi(\text{conclure positivement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^t), \forall i \in a.$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^f), \forall i \in a.$$

$$N(\text{conclure positivement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(N_{(i)}^t), \forall i \in a.$$

$$N(\text{conclure négativement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a}(N_{(i)}^f), \forall i \in a.$$

Calcul :

$$\begin{aligned} &\Pi(\text{conclure positivement sur 1 hypothèse}) = \\ &\min_{i \in \{(1)\}}(\Pi_{(i)}^t), \forall i \in \{(1)\} = \min_{i \in \{(1)\}}(\Pi_4^t) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N(\text{conclure positivement sur 1 hypothèse}) = \\ &\min_{i \in \{(1)\}}(N_{(i)}^t), \forall i \in \{(1)\} = \min_{i \in \{(1)\}}(N_4^{tt}) = 0.9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Pi(\text{conclure négativement sur 1 hypothèse}) = \\ &\min_{i \in \{(1)\}}(\Pi_{(i)}^f), \forall i \in \{(1)\} = \min_{i \in \{(1)\}}(\Pi_6^f) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N(\text{conclure négativement sur 1 hypothèse}) = \\ &\min_{i \in \{(1)\}}(N_{(i)}^f), \forall i \in \{(1)\} = \min_{i \in \{(1)\}}(N_6^f) = 0.6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Pi(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \\ &\min_{i \in \{(1),(2)\}}(\Pi_{(i)}^t), \forall i \in \{(1),(2)\} = \min_{i \in \{5,4\}}(\Pi_i^t) = \Pi_5^t = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \\ &\min_{i \in \{(1),(2)\}}(N_{(i)}^t), \forall i \in \{(1),(2)\} = \min_{i \in \{5,4\}}(N_i^t) = N_5^t = 0.8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Pi(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \\ &\min_{i \in \{(1),(2)\}}(\Pi_{(i)}^f), \forall i \in \{(1),(2)\} = \min_{i \in \{1,6\}}(\Pi_i^f) = \Pi_1^f = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \\ &\min_{i \in \{(1),(2)\}}(N_{(i)}^f), \forall i \in \{(1),(2)\} = \min_{i \in \{1,6\}}(N_i^f) = N_1^f = 0.5. \end{aligned}$$

On a ainsi :

a	1	2	3	4	5
$\min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^t), \forall i \in a$	1	1	1	0.5	0.4
$\min_{i \in a}(N_{(i)}^t), \forall i \in a$	0.9	0.8	0.7	0	0
$\min_{i \in a}(\Pi_{(i)}^f), \forall i \in a$	1	1	0.3	0.2	0.1
$\min_{i \in a}(N_{(i)}^f), \forall i \in a$	0.6	0.5	0	0	0

Ordonnement des explorations :

De ce tableau, on voit que plusieurs choix d'explorations en parallèle se présentent :

- Si on veut affirmer des hypothèses : on lance en parallèle l'exploration des hypothèses 4,5 et 2 car il est possible de conclure positivement sur les 3 avec une nécessité de 0.7.
- Si on veut infirmer des hypothèses : on lance l'exploration des hypothèses 1 et 6 en parallèle puisque il est possible de conclure négativement sur les 2 avec une nécessité de 0.5.
- Si aucune contrainte n'a été imposée : on lance l'exploration des 5 hypothèses car il est possible de conclure soit positivement ou bien négativement sur les 5 avec une nécessité de 0.5.

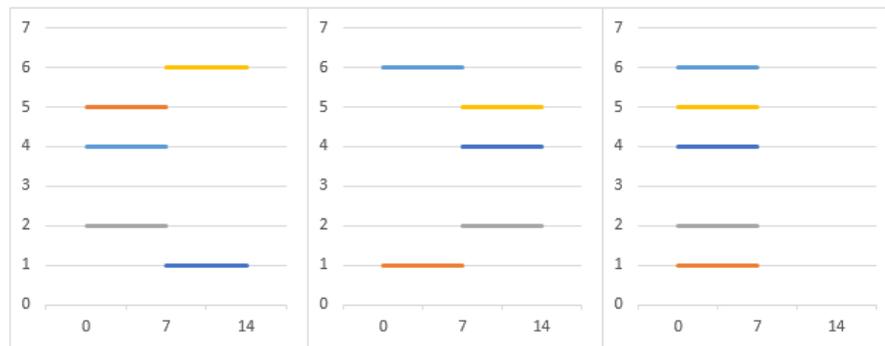


FIGURE 4.2 – Les différents ordonnancements possibles.

4.4 Durée d'exploration d'une hypothèse

La durée d'exploration T_i d'une hypothèse est une valeur qu'on ne connaît pas a priori, mais qu'on peut estimer.

L'estimation du temps de réalisation est une étape nécessaire pour arriver à ordonner les explorations.

Une fois les hypothèses et leurs mesures définies, les experts estimeront les durées d'exploration de chacune d'elle.

4.4.1 Estimation de la durée d'exploration

Nous exprimerons la durée d'exploration T_i d'une hypothèse avec un intervalle flou.

Pour chaque hypothèse, on définit la possibilité $\Pi(T_i \leq d_i)$ et la nécessité $N(T_i \leq d_i)$ de finir l'exploration dans le temps estimé, où d_i est la durée réelle d'exploration.

Finir l'exploration d'une hypothèse n'est pas toujours synonyme de conclusion (positive ou négative) sur celle-ci, car on peut terminer une exploration sans répondre à la question de départ. Ceci peut être dû au fait d'avoir épuisé tous les incréments prévus pour cette hypothèse, ou bien à la nature de l'hypothèse (son degré de confiance).

Exemple

Soit la durée d'exploration d'une hypothèse estimée par les experts de cette manière :

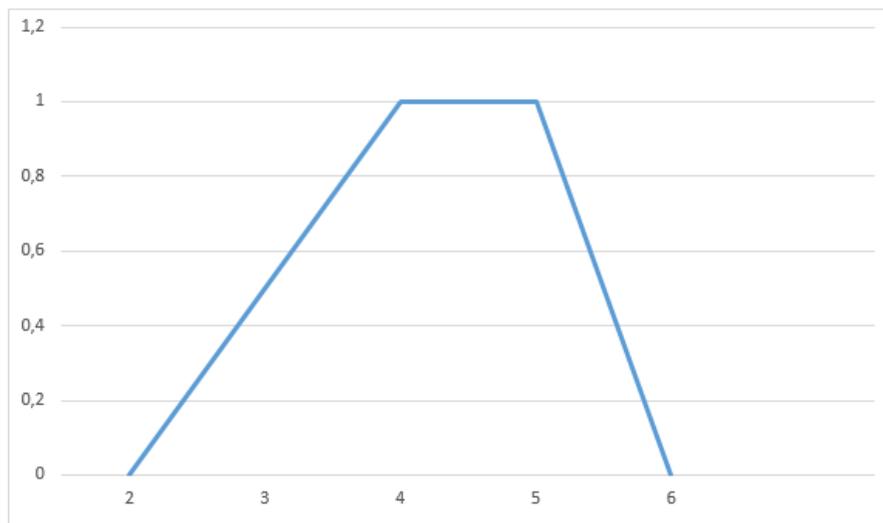


FIGURE 4.3 – Durée d'exploration de forme trappézoïdale.

On pose : $\mu_{T_i}(d)$ la fonction d'appartenance de la durée réelle d'exploration à l'intervalle flou de la durée estimée :

$$\text{On a donc :}$$

$$\mu_{T_i}(d_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 \leq d_i \leq 5; \\ 0, & \text{si } d_i < 2 \text{ ou } d_i > 6; \\ d_i/2 - 1, & \text{si } 2 < d_i < 4; \\ -d_i + 6, & \text{si } 5 < d_i < 6. \end{cases}$$

Par la suite, nous chercherons la possibilité de finir l'exploration d'une hypothèse i avant une date d^* :

$$\Pi(T_i \leq d^*) = \sup \mu_{T_i}(d_i), (d_i \in [0, d^*]);$$

On aura pour cet exemple :

$$d^* = 3 : \text{La possibilité de finir l'exploration avant le 3ème jour : } \Pi(T_i \leq 3) = \sup \mu_{T_i}(d_i), (d_i \in [0, 3]) = 0.5$$

$$d^* = 5 : \text{La possibilité de finir l'exploration avant le 5ème jour : } \Pi(T_i \leq 5) = \sup \mu_{T_i}(d_i), (d_i \in [0, 5]) = 1$$

$$d^* = 7 : \text{La possibilité de finir l'exploration avant le 7ème jour : } \Pi(T_i \leq 7) = \sup \mu_{T_i}(d_i), (d_i \in [0, 7]) = 1$$

4.5 Possibilité de finir l'exploration d'un ensemble d'hypothèses

Lors du lancement d'une expertise, une date limite peut-être fixée. On se pose alors la question : " Combien d'hypothèses peut-on explorer avant cette date ?".

On cherche alors quelle est la mesure de possibilité de conclure sur au moins a hypothèses avec $a \in \{1, \dots, |H|\}$ avant une date d^* ?

Méthode de calcul :

- On ordonne les hypothèses par ordre croissant sur : $\arg \max \mu_{T_i}(d_i), (d_i \in [0, d^*])$
- On calcule pour chaque sous-ensemble a : $\min_{i \in a} \Pi(T_{(i)} \leq d^*), \forall i \in a = \max \min C_I^{|a|} \Pi(T_{(i)} \leq d^*) \forall i \in a$

Exemple

Soit I un ensemble d'hypothèses avec $I = \{1, 2, 3\}$

Leurs durées d'exploration exprimées par les experts sont :

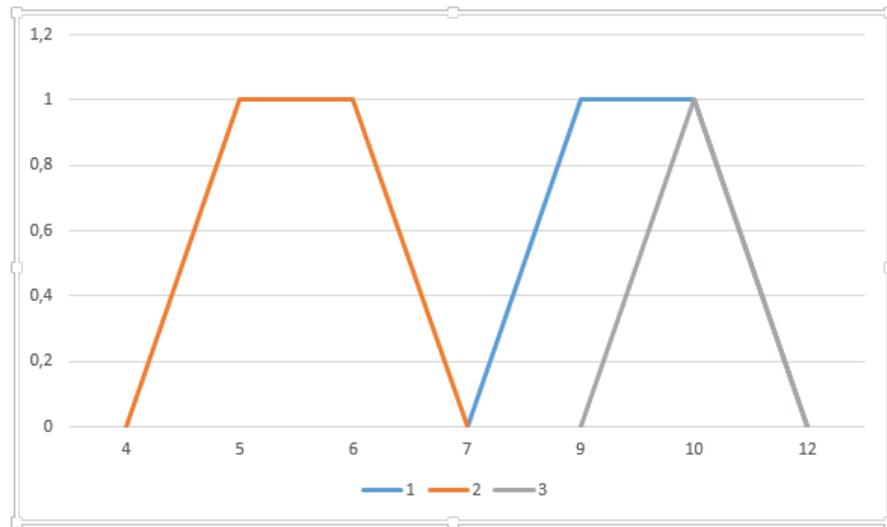


FIGURE 4.4 – Durées d'exploration des 3 hypothèses.

De ce graphique on peut obtenir les possibilités de terminer des explorations à certaines dates (en supposant que les explorations soient lancées en parallèles) :

- Possibilité de conclure à la date 6 sur 1 hypothèse :

$$\min_{i \in \{(1)\}} \Pi(T_i \leq 6) = \max \min C_I^1 \Pi(T_i \leq 6), \forall (i \in a) = 1;$$

- Possibilité de conclure à la date 8 sur 2 hypothèses :

$$\min_{i \in \{(1),(2)\}} \Pi(T_i \leq 8) = \max \min C_I^2 \Pi(T_i \leq 8), \forall (i \in a) = 0.5;$$

- Possibilité de conclure à la date 9 sur 2 hypothèses :

$$\min_{i \in \{(1),(2)\}} \Pi(T_i \leq 9) = \max \min C_I^2 \Pi(T_i \leq 9), \forall (i \in a) = 1;$$

- Possibilité de conclure à la date 10 sur 3 hypothèses :

$$\min_{i \in \{(1),(2),(3)\}} \Pi(T_i \leq 10) = \max \min C_I^3 \Pi(T_i \leq 10), \forall (i \in a) = 1;$$

4.6 Possibilité de conclure sur un ensemble d'hypothèses avant une certaine date

De la section précédente, on connaît la possibilité de finir l'exploration d'un ensemble d'hypothèses avant une date précise, mais ce qui nous intéresse réellement c'est la possibilité et la nécessité de conclure sur ces hypothèses.

Ainsi, on sait qu'à une certaine date on aura fini d'explorer l'hypothèse i , mais qu'en est-il du degré de confiance de cette hypothèse, car s'il n'est pas possible de recueillir plus d'informations, pourquoi ne pas en explorer une autre ?

Dans cette section, nous proposons d'intégrer les mesures de possibilités et nécessités avec celles des dates, pour arriver à un ordonnancement plus solide.

Méthode de calcul :

1. On construit les mesures de possibilité et de nécessité de chaque hypothèse de l'ensemble a .
2. On calcule la possibilité de finir l'exploration des hypothèses de l'ensemble a avant la date d^* :

$$\min_{i \in a} \Pi(T_{(i)} \leq d^*) = \max \min C_I^{|a|} \Pi(T_{(i)} \leq d^*) = \alpha, \forall i \in a$$

3. On calcule la possibilité de conclure sur toutes les hypothèses de l'ensemble :

$$\Pi(\text{conclure positivement sur } a \text{ hypothèses}) = \min_{i \in a} (\Pi_{(i)}^t) = \beta, \forall i \in a$$

4. Enfin, la mesure de possibilité de conclure toutes les hypothèses de l'ensemble a avant la date d^* :

$$\Pi_i(T_i \leq d^*) = \min\{\alpha, \beta\}, \forall i \in a$$

Exemple

Soit les durées d'explorations estimées des hypothèses précédentes :

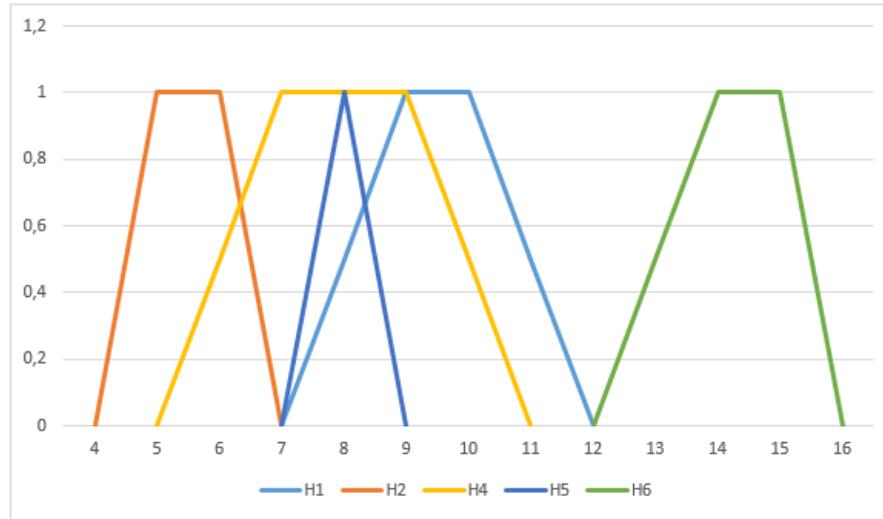


FIGURE 4.5 – Durées d'explorations des hypothèses.

Avec leurs mesures respectives :

I	1	2	4	5	6
Π_i^t	0.5	1	1	1	0.4
N_i^t	0	0.7	0.9	0.8	0
Π_i^f	1	0.3	0.1	0.2	1
N_i^f	0.5	0	0	0	0.6

Il ne reste plus qu'à calculer la mesure de possibilité et de nécessité de conclure sur un ensemble d'hypothèses avant une date d^* .

Calcul des mesures :

– **Possibilité de conclure à la date 7 sur 1 hypothèse :**

$$\Pi(T \leq 7) = \max \min C_I^1 \Pi(T_i \leq 7) = 1, \forall (i \in a); (a = \{2\} \vee a = \{4\})$$

$$\Pi_4^t = 1; N_4^t = 0.9;$$

$$\Pi_2^f = 0.3; N_2^f = 0;$$

$$\Pi_4^t(T_4 \leq 7) = \min\{1, 1\} = 1;$$

$$\Pi_2^f(T_2 \leq 7) = \min\{0.3, 1\} = 0.3;$$

– **Possibilité de conclure à la date 8 sur 2 hypothèses :**

$$\Pi(T \leq 8) = \max \min C_I^2 \Pi(T_i \leq 8) = 1, \forall (i \in a); a = \{4, 5\} \text{ ou } a = \{2, 5\}$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{4,5\}}(\Pi_i^t) = \Pi_5^t = 1$$

$$N(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{4,5\}}(N_i^t) = N_5^t = 0.8.$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,5\}}(\Pi_i^f) = \Pi_5^f = 0.2$$

$$N(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,5\}}(N_i^f) = N_5^f = 0.$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur les hypothèses 4 et 5 avant la date 8}) = \Pi_5^t(T_5 \leq 8) = \min\{1, 1\} = 1;$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur les hypothèses 2 et 5 avant la date 8}) = \Pi_5^f(T_5 \leq 8) = \min\{1, 0.2\} = 0.2;$$

– **Possibilité de conclure à la date 8 sur 3 hypothèses :**

$$\Pi(T \leq 8) = \max \min C_I^3 \quad \Pi(T_i \leq 8) = 1, \forall (i \in a); a = \{2,4,5\};$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur 3 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,4,5\}}(\Pi_i^t) = \Pi_2^t = 1$$

$$N(\text{conclure positivement sur 3 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,4,5\}}(N_i^t) = N_5^t = 0.7.$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur 3 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,4,5\}}(\Pi_i^f) = \Pi_4^f = 0.1$$

$$N(\text{conclure négativement sur 3 hypothèses}) = \min_{i \in \{2,4,5\}}(N_i^f) = N_4^f = 0.$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur les hypothèses 2,4 et 5 avant la date 8}) = \Pi_2^t(T_2 \leq 8) = \min\{1, 1\} = 1;$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur les hypothèses 2,4 et 5 avant la date 8}) = \Pi_4^f(T_4 \leq 8) = \min\{1, 0.1\} = 0.1;$$

– **Possibilité de conclure à la date 14 sur 1 hypothèse :**

$$\Pi(T \leq 14) = \max \min C_I^1 \quad \Pi(T_i \leq 14) = 1, \forall (i \in a); (a = \{2\} \vee a = \{6\});$$

$$\Pi_4^t = 1; N_4^t = 0.9;$$

$$\Pi_6^f = 1; N_2^f = 0.6;$$

$$\Pi_4^t(T_4 \leq 14) = \min\{1, 1\} = 1;$$

$$\Pi_6^f(T_6 \leq 14) = \min\{1, 1\} = 1;$$

– **Possibilité de conclure à la date 14 sur 2 hypothèses :**

$$\Pi(T \leq 14) = \max \min C_I^2 \quad \Pi(T_i \leq 14) = 1, \forall (i \in a); a = \{4, 5\} \text{ ou } a = \{6, 1\}$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{4,5\}}(\Pi_i^t) = \Pi_5^t = 1$$

$$N(\text{conclure positivement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{4,5\}}(N_i^t) = N_5^t = 0.8.$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{6,1\}}(\Pi_i^f) = \Pi_1^f = 1$$

$$N(\text{conclure négativement sur 2 hypothèses}) = \min_{i \in \{6,1\}}(N_i^f) = N_1^f = 0.5.$$

$$\Pi(\text{conclure positivement sur les hypothèses 4 et 5 avant la date 14}) = \Pi_5^t(T_5 \leq 8) = \min\{1, 1\} = 1;$$

$$\Pi(\text{conclure négativement sur les hypothèses 1 et 6 avant la date 14}) = \Pi_1^f(T_1 \leq 14) = \min\{1, 1\} = 1;$$

Interprétation des résultats :

Le tableau qui suit résume les résultats des calculs. Ainsi plusieurs scénarii d'exploration se présentent. Chaque scénario dépend de nos contraintes, que ce soit une contrainte de temps d^* ou de coût (nous résumons la contrainte de coût par le nombre d'hypothèses a à explorer). Nous avons dans chaque case du tableau, la meilleure exploration en termes de possibilité et de nécessité de conclure.

a / d^*	1	2	3	4	5
5	$H_2(1;0.7)$				
7	H_4 (1;0.9)	H_4 et H_2 (1;0.7)			
8	H_4 (1;0.9)	H_5 et H_4 (1;0.8)	H_2, H_5 et H_4 (1;0.7)		
9	H_4 (1;0.9)	H_5 et H_4 (1;0.8)	H_2, H_5 et H_4 (1;0.7)	H_2, H_5, H_4 et H_1 (1;0.6)	
14	H_4 (1;0.9)	H_5 et H_4 (1;0.8)	H_2, H_5 et H_4 (1;0.7)	H_2, H_5, H_4 et H_1 (1;0.6)	H_2, H_5, H_4, H_1 et H_6 (1;0.5)

Par exemple, si nous devons finir l'expertise avant une date $d^* = 8$ et que notre budget nous permet l'exploration de 2 hypothèses seulement, nous explorerons dans ce cas-là les hypothèses 4 et 5 car elles ont la meilleure nécessité de conclusion sous ces contraintes.

4.7 Coût d'exploration d'une hypothèse

Le coût d'exploration d'une hypothèse est la somme des coûts de chaque investigation menée sur celle-ci. Comme nous ignorons au départ le nombre d'incrémentes que nous allons utiliser, le coût de l'exploration reste inconnu mais il peut être estimé.

4.7.1 Incrément

Comme défini ci-dessus, un incrément est une investigation menée dans le but de conclure sur une hypothèse.

Soit $C_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ik}\}$ l'ensemble des incréments de l'hypothèse i .

Chaque incrément c_{ij} à un coût p_{ij} .

Les experts prévoient un ensemble d'incrémentes, car on n'est pas certain de conclure dès le premier incrément, ainsi certains incréments sont plus fiables que d'autres.

Nous définissons alors un degré de confiance $\beta_{ij} \in [0, 1]$ pour chaque incrément tel que :

- $\beta_{ij} = 0$: cet incrément ne nous apportera pas plus de connaissances que ce qu'on sait déjà.
- $\beta_{ij} = 1$: il est possible de conclure (positivement ou négativement) avec cet incrément.

Ce degré de confiance est affecté par les experts à chaque incrément selon la possibilité de conclure ou pas avec celui-ci, il représente les connaissances que nous apportera cet incrément à la fin de l'investigation.

On suppose alors qu'une exploration n'est lancée que s'il est possible de conclure avec un incrément c_h pour lequel $\beta_h = 1$.

4.7.2 Choix des incréments

Au cours de l'expertise, le décideur est amené à choisir les incréments à effectuer sur l'hypothèse. Idéalement, on aimerait conclure dès le premier incrément, mais ce n'est pas toujours le cas.

Ainsi, il faudrait classer les incréments selon leur efficacité estimée.

Nous demanderons alors aux experts de définir, pour chaque hypothèse i , un front d'équivalence $f_i(\text{coût})$, qui répond à la question " Combien sommes-nous prêt à payer pour un certain degré de précision ? "

f_i est une application qui va de \mathbb{N} dans $[0, 1]$ telle que à chaque coût p on affecte une précision β .

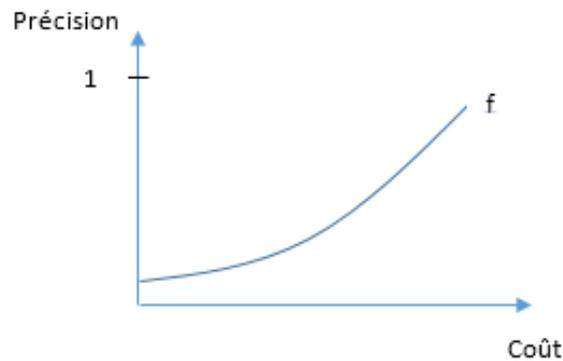


FIGURE 4.6 – Exemple d'un front d'équivalence.

Puis, on demandera aux experts de placer les incréments selon leurs coûts et leurs degrés de confiance.

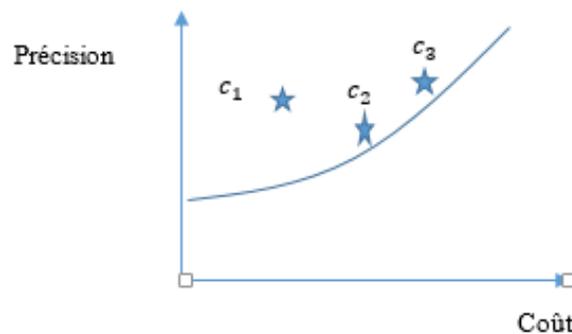


FIGURE 4.7 – Exemple d'incrément par rapport à un front d'équivalence.

Un incrément c^* est optimal (avec son coût p^* et son degré de confiance β^*) s'il satisfait :

$$|p^* - f^{-1}(\beta^*)| \geq |p_j - f^{-1}(\beta_j)|, \forall j. \quad (4.6)$$

et

$$|\beta^* - f(p^*)| \geq |\beta_j - f(p_j)|, \forall j. \quad (4.7)$$

De la même manière, nous pourrions comparer les incréments.

Un incrément c_k est meilleur qu'un incrément c_j si :

$$|p_k - f^{-1}(\beta_k)| \geq |p_j - f^{-1}(\beta_j)|.$$

et

$$|\beta_k - f(p_k)| \geq |\beta_j - f(p_j)|.$$

4.7.3 Coût d'une hypothèse

Comme nous ignorons le nombre d'incrément c_{ij} que nous allons utiliser, nous pouvons représenter le coût P_i d'une hypothèse de cette manière :

$$P_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} * p_{ij};$$

où p_{ij} est le coût de l'incrément c_{ij} ;

$$\text{et } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si l'incrément } c_{ij} \text{ a été utilisé;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant, ce n'est pas toujours évident de le calculer a priori, nous proposons alors une représentation des coûts des hypothèses avec les ensembles flous.

Soit l'hypothèse i , avec ces 3 incréments potentiels triés par ordre de préférence :

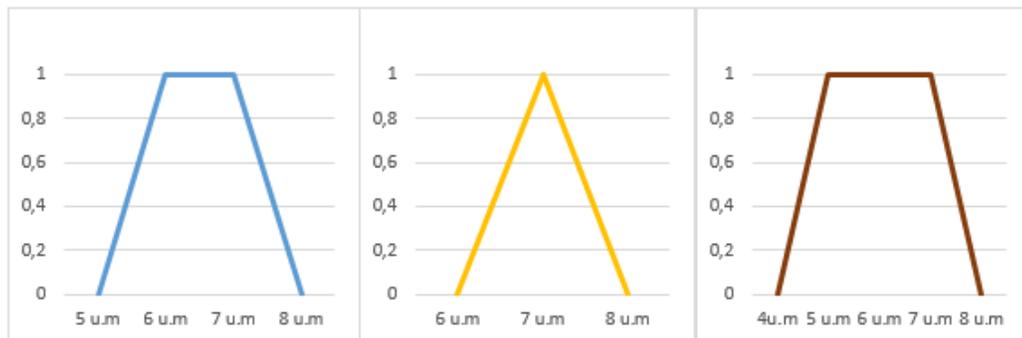


FIGURE 4.8 – Représentation des coûts des incréments.

Ainsi, le coût d'exploration de l'hypothèse peut être représenté de cette manière :

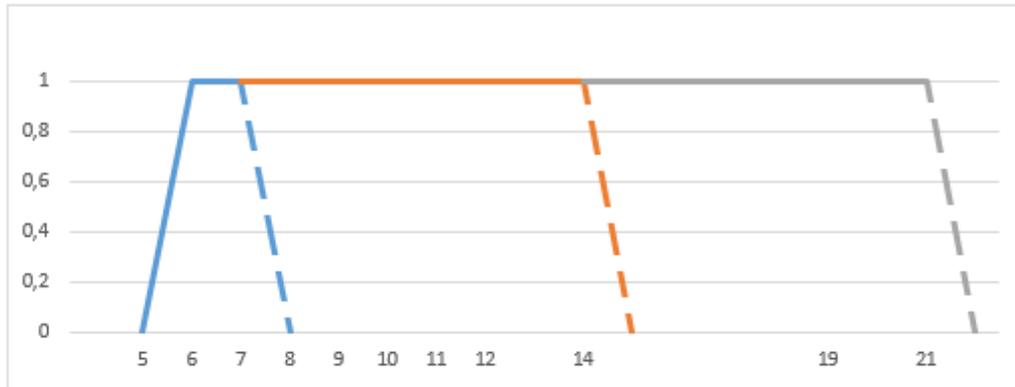


FIGURE 4.9 – Représentation du coût d'une hypothèse.

Cette représentation floue est la représentation du coût de l'hypothèse suivant le nombre d'incrément que nous utiliserons.

On pose : $\mu_{p_i}(x)$ la fonction d'appartenance d'un coût x à l'intervalle flou du coût d'exploration estimé p_i .

4.7.4 Coût d'exploration d'un ensemble d'hypothèses

Le coût d'exploration d'un ensemble d'hypothèses dépend du nombre d'incrément utilisés pour chacune d'elle. Comme nous avons défini un classement d'incrément, nous supposons que lors des explorations d'un ensemble d'hypothèses, nous commençons par l'incrément le plus fiable de chaque hypothèse.

Soit le coût d'exploration de l'hypothèse j représenté comme suit :

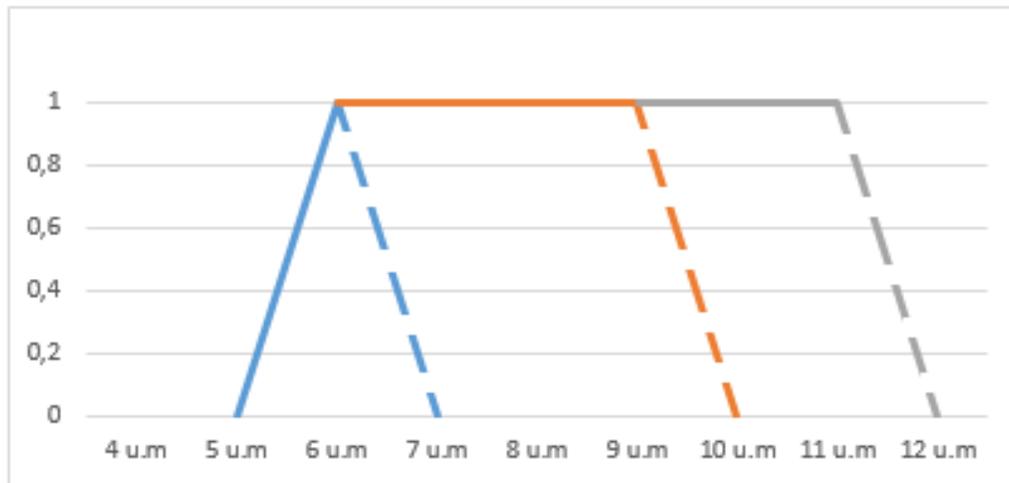


FIGURE 4.10 – Représentation du coût d'une hypothèse.

Alors, le coût d'exploration des hypothèses j et i peut être représenté de cette manière :

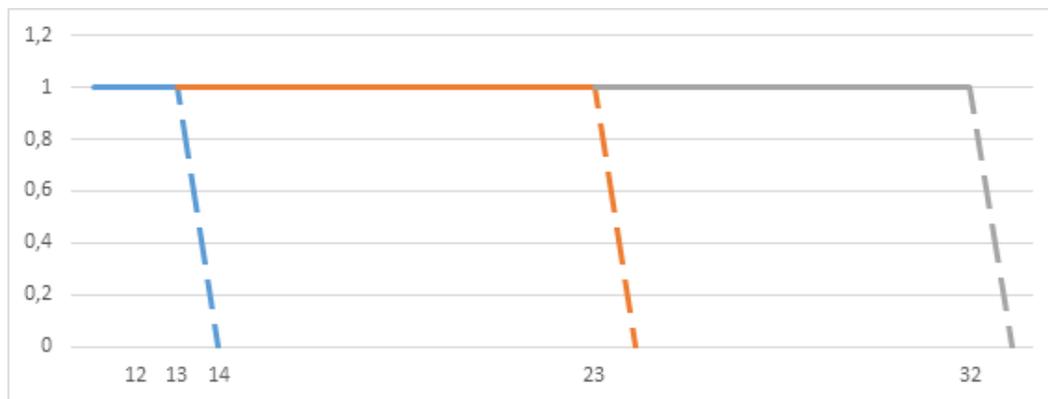


FIGURE 4.11 – Représentation du coût d'exploration de 2 hypothèses.

4.7.5 Choix des hypothèses

Pour classer les hypothèses selon leur coût, nous proposons de définir un front d'équivalence sur l'ensemble des hypothèses, qui représenterait le prix que nous sommes prêt à payer pour une certaine quantité de connaissances.

Soit $g(P)$ une fonction qui va de N dans $[0, 1]$, telle que à chaque coût P on affecte une précision N .

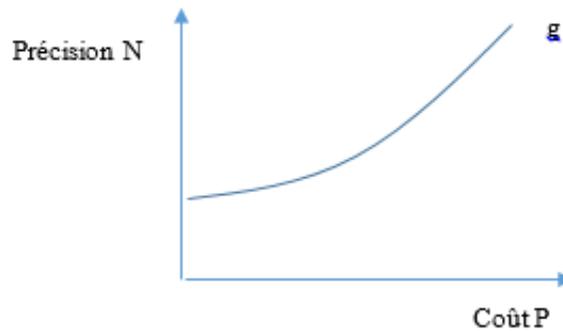


FIGURE 4.12 – Front d'équivalence.

Nous placerons ensuite nos hypothèses par rapport au front d'équivalence selon leurs coûts et leurs mesures nécessités.

Pour cela, nous affecterons à chaque hypothèse un coût pm_i , tel que :

$$pm_i = \max_x \{ \operatorname{argmax}_x \mu_{p_i}(x), \forall x \}$$

i.e. pm_i est le prix maximal que peut coûter l'hypothèse i .

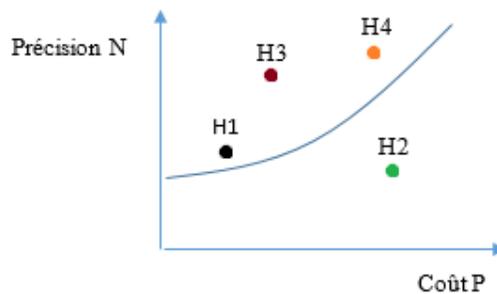


FIGURE 4.13 – Hypothèses par rapport au front d'équivalence.

Ainsi, une hypothèse i est meilleure qu'une hypothèse j par rapport au coût si :

$$|pm_i - f^{-1}(N_i)| \geq |pm_j - f^{-1}(N_j)|$$

et

$$|N_i - f(p_i)| \geq |N_j - f(p_j)|$$

4.8 Modèle représentatif de la démarche d'expertise

Dans cette partie, nous proposons un modèle qui permet de représenter le déroulement d'une expertise. Ce modèle permettra entre autres d'analyser le projet et les tâches qui le constituent, et de garder un historique de l'expertise.

Cette représentation est inspirée des réseaux PERT. Elle nous permettra, entre autres, de déterminer un chemin critique, pour lequel la durée de l'expertise sera minimale.

4.8.1 Mise en oeuvre

Nous utiliserons un graphe de dépendances composé de nœuds de décision.

Les sommets de ce graphe représentent les différentes tâches de l'expertise et les arcs les résultats de chaque tâche.

Sommet :

Comme pour la méthode PERT, nous affecterons à chaque tâche une date de début au plus tôt et une date de début au plus tard.

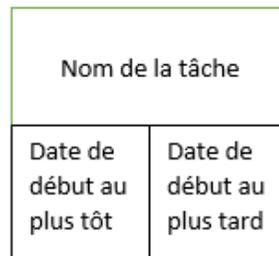


FIGURE 4.14 – Représentation d'une tâche.

Arc :

Les arcs peuvent, par exemple, représenter les hypothèses formulées au cours de l'expertise.

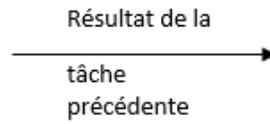


FIGURE 4.15 – Représentation d'un arc.

Nœud de décision : Nous utiliserons les nœuds de décision pour représenter le choix de réitérer ou non une incrémentation, ou bien le choix de finir l'expertise après avoir validé ou non un sous-ensemble d'hypothèses

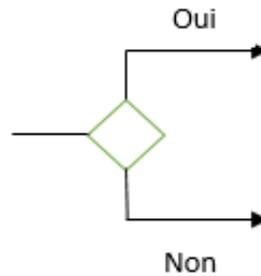


FIGURE 4.16 – Représentation d'un nœud de décision.

4.8.2 Modèle de représentation

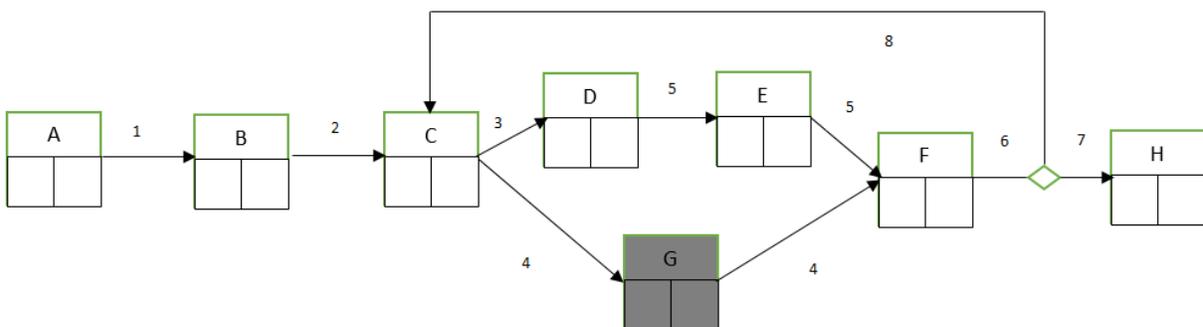


FIGURE 4.17 – Représentation d'une démarche d'expertise.

Explication du modèle :

- A Début de l'expertise.
- 1 Problème et moyens définis
- B Enumération des hypothèses
- 2 Ensemble des hypothèses énumérées
- C (re)Classification des hypothèses
- 3 Ordre d'exploration des hypothèses établi
- D Choix des (nouveaux) incréments
- 5 Incréments des hypothèses (stratégies d'exploration)
- E Exploration des hypothèses
- F Conclusions intermédiaires sur toutes les explorations
- 6 Résultats des explorations
- 7 Fin de l'expertise et conclusion
- 4 Hypothèses gélées (hypothèses à ne pas explorer à cet instant)
- G Hypothèses non explorées
- 8 Conclusion intermédiaire et explorer d'autres pistes
- H Fin de l'expertise

Incrémentation :

Comme plusieurs incréments sont envisageables pour une seule hypothèse, nous détaillons la partie entre les tâches D et F comme ceci :

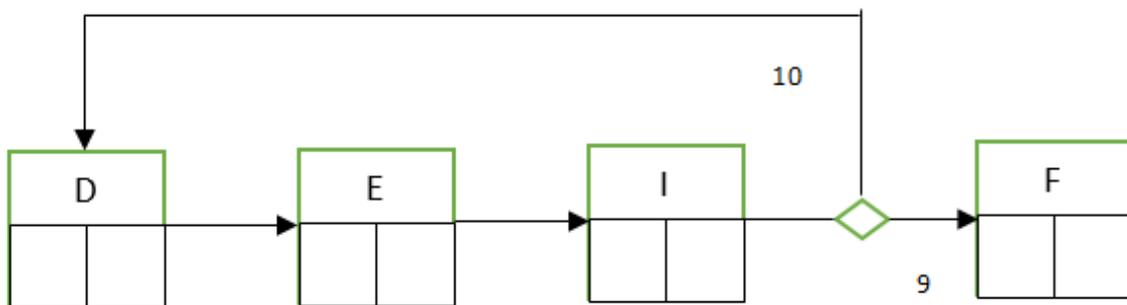


FIGURE 4.18 – Représentation de réitération.

Où :

I Conclusion intermédiaire sur cette l'exploration E.

9 Conclure avec les autres explorations.

10 Choisir un autre incrément.

Exemple

Prenons l'exemple du paragraphe 4.3, en choisissant l'ordonnancement suivant :

Explorer en parallèle les hypothèses 4, 5 et 2 pour conclure positivement, dans le cas contraire nous explorerons le reste des hypothèses.

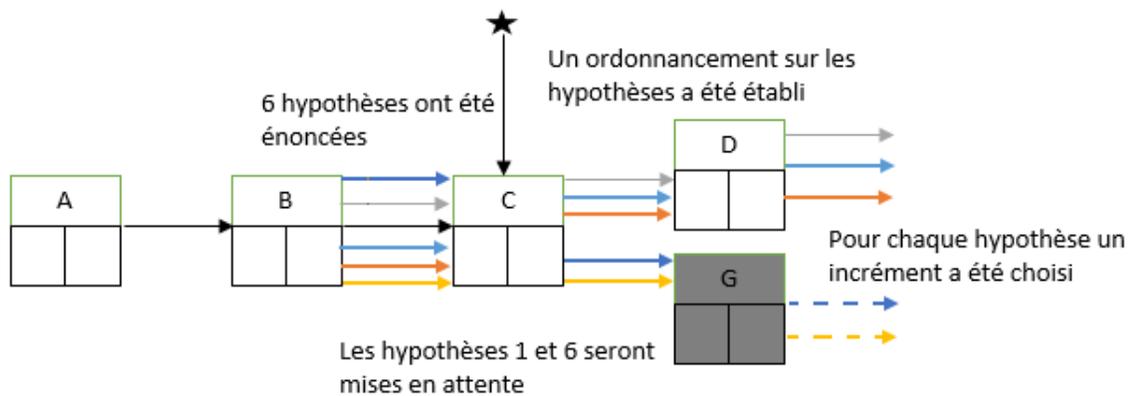


FIGURE 4.19 – Exemple d'une représentation.

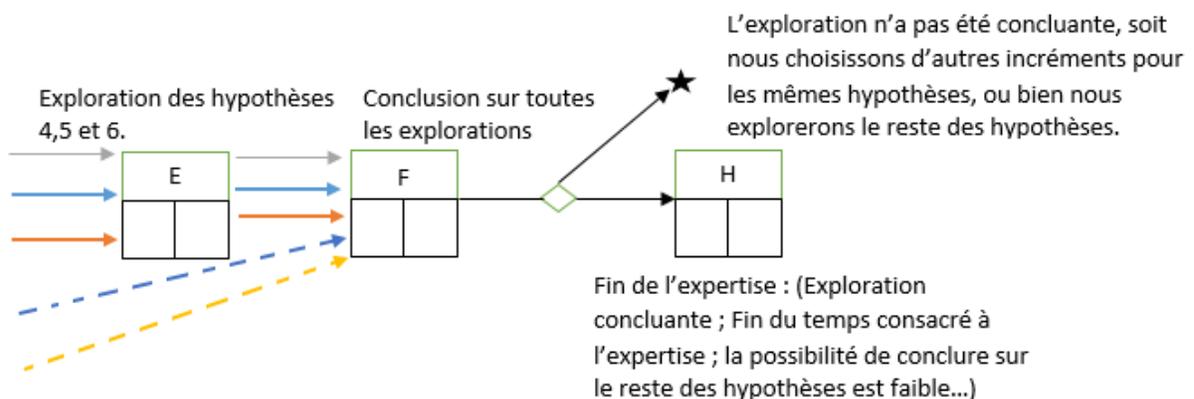


FIGURE 4.20 – Suite de l'exemple.

Cette représentation nous permet d'avoir une vision globale de la démarche proposée. Elle nous permet de voir l'expertise à n'importe quel moment t ainsi que l'évolution dynamique des hypothèses. Ces hypothèses qui sont au départ juste énoncées, sont ensuite classées, explorées, reclassées, rejetées...

En intégrant les dates de chaque tâche et en affectant une contrainte de début et de fin, nous pourrions identifier les tâches et chemins critiques. Un chemin critique est un enchaînement des tâches pour lesquelles aucun retard n'est toléré, sous peine de retarder le projet. Ainsi, le décideur devra les suivre pour anticiper les conséquences du déroulement de l'expertise.

Conclusion sur le travail

L'expertise est un dispositif d'aide à la décision qui touche plusieurs domaines et qui est souvent confronté aux incertitudes. Ainsi, l'objectif de ce stage est d'ouvrir une voie pour le traitement de ces incertitudes, afin de concevoir un formalisme qui répond pleinement aux attentes des experts. Dans la mesure où les domaines touchés par l'expertise sont très divers, ce formalisme doit être large pour s'appliquer à chacun d'eux.

Sous la direction de M. Laurent Geneste et de M. Romain Guillaume, j'ai pu élaborer un formalisme se basant sur la théorie des possibilités, qui permet d'aider l'expert dans ses décisions par rapport aux hypothèses à explorer et dans sa gestion de planning. J'ai également proposé un modèle s'inspirant de la méthode PERT, qui permet de représenter de manière logique les tâches qui constituent une expertise, afin d'avoir une meilleure organisation du projet.

Durant une expertise, on est confronté aux incertitudes, au temps et aux contraintes de coûts. Ainsi, durant mon dernier mois de stage, je travaillerai sur un formalisme permettant de traiter ce dernier point.

Conclusion personnelle

Au cours de mon stage de fin d'études, j'ai eu la chance d'intégrer un laboratoire de recherche où j'étais considéré comme un membre à part entière, c'est-à-dire comme un chercheur.

Grâce à ce stage, j'ai pu embrasser le monde de la recherche, ce qui m'a permis de développer mon autonomie et ma réflexion, qualités indispensables pour un chercheur. Ainsi, j'ai aimé la mission qui m'a été confiée et la confiance dont j'ai bénéficié.

La finalité de ce travail est que ce formalisme puisse être utilisé par des experts qui n'ont pas forcément de notions en mathématiques. Ainsi, la conception d'un programme linéaire qui a pour objectif de répondre à la question de départ en un minimum de temps et d'argent et qui peut être codé sur machine, peut être vue comme une perspective d'avenir.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AFNOR. *Qualité en expertise, Recommandations pour l'application de la norme NF X 50-110 :2003 (Prescriptions générales de compétences pour une expertise)*, Février 2011.
- [2] R.J. Almeida, T. Denoeux, and U. Kaymak. Constructing rule-based models using the belief functions framework. July 2012.
- [3] D. Dubois and H. Prade. *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2006.
- [4] L. Gacogne. *Éléments de logique floue*. Hermès, Paris, 1997.
- [5] L. Geneste, E. Villeneuve, A. Malo, and O. Martinez. Consolidation des données statistiques par expertise et similarité pour la prévision des ventes. 2013.
- [6] G. F. Gonod. *Penser l'incertitude*. 1996.
- [7] A. Kaufmann. *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs*. Masson, Paris, 1977.
- [8] G. Klir and R. Smith. On measuring uncertainty and uncertainty-based information : Recent developments. *Annals of mathematics and artificial intelligence*, 2001.
- [9] F. Lacroix. *Dynamique des avalanches*. Presses Polytechnique universitaires, Antony, France, 2006.
- [10] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. 1976.

- [11] J.M. Tacnet. *Prise en compte de l'incertitude dans l'expertise des risques naturels en montagne par analyse multicritères et fusion d'information*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne, 2009.
- [12] E. Villeneuve. *Hybridation des retours d'expérience statistique et cognitif pour l'évaluation des risques : Application à la déconstruction des aéronefs*. PhD thesis, Laboratoire Génie de Production, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, 2012.
- [13] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets, Information and control*. 1965.
- [14] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. 1978.